Ph. Sp. Wundt
956 c (2,1
Ibl
Xerokopieren aus konservatorischen Gründen nicht erlaubt
Nur im Lesesaal benützbar

524
541
558

<36610685330013

<36610685330013

Bayer. Staatsbibliothek

B

Ph. Sp. 956 c 8°

# LOGIK.

## EINE UNTERSUCHUNG DER PRINCIPIEN DER ERKENNTNISS

UND DER

## METHODEN WISSENSCHAFTLICHER FORSCHUNG

VON

**WILHELM WUNDT.**

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

ZWEI BÄNDE.

ZWEITER BAND.

## METHODENLEHRE.

ERSTE ABTHEILUNG.

*Zweite umgearbeitete Auflage.*

STUTTGART.
VERLAG VON FERDINAND ENKE.
1894.

655 D

Verlag von FERDINAND ENKE in Stuttgart.

# LOGIK.

Eine Untersuchung der Principien der Erkenntniss und der Methoden wissenschaftlicher Forschung.

Von **Prof. Dr. Wilhelm Wundt.**

*Zwei Bände.*

I. Band: **Erkenntnisslehre.**

**Zweite umgearbeitete Auflage.** gr. 8. 1893. geh. M. 15.—

# ETHIK.

Eine Untersuchung der Thatsachen und Gesetze des sittlichen Lebens.

Von **Wilhelm Wundt.**

Zweite umgearbeitete Auflage.

gr. 8. 1892. geh. M. 15.—

# Die physikalischen Axiome

und ihre Beziehung zum Causalprincip.

Ein Kapitel aus der Philosophie der Naturwissenschaften.

Von **Wilhelm Wundt.**

8. 1866. geh. M. 2.40.

# Die Ethik des Stoikers Epictet.

Anhang:

Exkurse über einige wichtige Punkte der stoischen Ethik.

Von **Adolf Bonhöffer.**

gr. 8. 1894. geh. M. 10.— (Soeben erschienen.)

# Epictet und die Stoa.

Untersuchungen zur stoischen Philosophie.

Von **Adolf Bonhöffer.**

gr. 8. 1890. geh. M. 10.—

# Die Naturwissenschaft

und die socialdemokratische Theorie.

Ihr Verhältniss,
dargelegt auf Grund der Werke von Darwin und Bebel.

Zugleich ein Beitrag zur wissenschaftlichen Kritik der Theorien der derzeitigen Socialdemokratie.

Von **Prof. Dr. H. E. Ziegler.**

8. 1894. geh. M. 4.—

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

# LOGIK.

## EINE UNTERSUCHUNG DER PRINCIPIEN DER ERKENNTNISS

UND DER

## METHODEN WISSENSCHAFTLICHER FORSCHUNG

VON

**WILHELM WUNDT.**

ZWEI BÄNDE.

ZWEITER BAND.

**METHODENLEHRE.**

**ERSTE ABTHEILUNG.**

*Zweite umgearbeitete Auflage.*

STUTTGART.
VERLAG VON FERDINAND ENKE.
1894.

# METHODENLEHRE.

VON

**WILHELM WUNDT.**

**ERSTE ABTHEILUNG.**

ALLGEMEINE METHODENLEHRE. LOGIK DER MATHEMATIK UND DER NATURWISSENSCHAFTEN.

***Zweite umgearbeitete Auflage.***

STUTTGART.
VERLAG VON FERDINAND ENKE.
1894.

Das Recht der Uebersetzung wird vorbehalten.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Druck der Union Deutsche Verlagsgesellschaft in Stuttgart.

# Vorwort zur ersten Auflage.

In dem vorliegenden Werke ist der Versuch gemacht, die wissenschaftlichen Methoden und ihre Principien einer vergleichenden Untersuchung zu unterwerfen, welche so viel als möglich unmittelbar aus den Quellen der Einzelforschung zu schöpfen sucht. Dieser Versuch ist von so grossen Schwierigkeiten umgeben, dass es vielleicht weniger erforderlieh ist seine Mängel als ihn selbst zu entschuldigen. Die Mathematik, die Naturforschung, die Geisteswissenschaften, jedes dieser Gebiete scheint reich genug, um als Grundlage einer logischen Darstellung zu dienen. Dennoch drängte sich mir bei Vollendung meiner Arbeit immer mehr die Ueberzeugung auf, dass nur eine sie alle umfassende Untersuchung von den methodischen Eigenthümlichkeiten jedes einzelnen zureichende Rechenschaft geben könne, und dass allein auf diesem Wege dem Fehler unberechtigter Verallgemeinerung gewisser Methoden wirksam zu steuern sei. Auch schien es mir fruchtbringender, der thatsächlichen Entwicklung des wissenschaftlichen Denkens in seinen verschiedenartigen Gestaltungen nachzugehen, als bei abstracten logischen Betrachtungen von fragwürdiger Anwendbarkeit zu verweilen. In diesem Plan des Buches liegt, wie

ich hoffe, eine zureichende Entschuldigung dafür, dass in demselben auf andere logische Darstellungen nur an wenigen Stellen Bezug genommen ist. Werke aus den einzelnen Wissenschaftsgebieten habe ich dagegen in der Regel dann citirt, wenn ein Hinweis auf specielle Belegstellen oder auf weitere Ausführungen zu den im Text gegebenen Andeutungen erforderlich schien.

Die Entstehungsweise meiner Arbeit brachte es mit sich, dass die allgemeine Methodenlehre, obgleich der systematische Zweck ihren Vorantritt verlangte, dennoch fast zuletzt ausgeführt wurde, nachdem die speciellen Abschnitte der Hauptsache nach vollendet waren; ich habe dann aber selbstverständlich das Ganze noch einmal einer sorgfältigen Ueberarbeitung unterzogen. Auf diese Weise fügte es sich von selbst, dass der Schwerpunkt der Darstellung in die Logik der einzelnen Wissenschaften verlegt ist. Ich hoffe nicht, dass hieraus die Meinung entstehe, jeder Abschnitt könne nöthigenfalls als ein für sich bestehendes Ganzes gelesen werden. Insbesondere betrachte ich die specielle Methodenlehre durchaus als ein zusammenhängendes Werk, dessen einzelne Theile überall auf einander hinweisen. Für die Darstellung erwuchs hieraus die Pflicht, sie in einer Form zu halten, welche — höchstens von einzelnen Ausführungen abgesehen — jedem wissenschaftlich gebildeten Leser es möglich machen soll, dem Gedankengang zu folgen. Gegenüber der Zersplitterung der Einzelforschungen und der mit ihr so oft verbundenen Unterschätzung fremder Arbeitsgebiete ist es, wie ich meine, eine der schönsten philosophischen Aufgaben, das Bewusstsein der Zusammengehörigkeit der Wissenschaften wach zu erhalten und die Gleichberechtigung der wissenschaftlichen Interessen zu wahren.

Dass nicht alle Disciplinen die nämliche Berücksichtigung gefunden haben, wird wohl Niemand dem Verfasser verargen. Eine Beschränkung auf die Hauptgebiete, welche für die Ausbildung der Methoden und Principien der Forschung vorzugsweise bestimmend sind, war schon durch den allgemeinen Charakter des Werkes geboten.

Ueberdies ist es unvermeidlich, dass der individuelle Standpunkt des Autors die gleichförmige Durchführung einer derartigen Aufgabe beeinträchtigt. Meine Beschäftigung mit Mathematik und Naturforschung ist durch den Gesichtskreis des Physiologen, mein Interesse an den Geisteswissenschaften vorzugsweise durch psychologische Studien bestimmt worden. Vielleicht lag in diesem doppelten Berufsfach für mich mehr als für manchen Andern eine Aufforderung zur Beschäftigung mit allgemeinen methodologischen Problemen. Sieht sich doch der Physiologe fast überall auf die Hülfe der exacteren Theile der Naturwissenschaft angewiesen, und der Psychologe, wenn er die unerspriesslichen Pfade des herkömmlichen Subjectivismus verlassen will, ist fortwährend gezwungen, nach beiden Seiten Umschau zu halten, um bald die experimentellen Methoden des Physikers und Physiologen für die Analyse der einfachen Bewusstseinserscheinungen zu verwerthen, bald aus der Untersuchung der Geisteserzeugnisse, wie sie Sprachwissenschaft, Mythologie, Völkerkunde und Geschichte ihm darbieten, für die Analyse der höheren psychischen Functionen Anhaltspunkte zu gewinnen. Die centrale Stellung, die ich der Psychologie zwischen den Natur- und Geisteswissenschaften angewiesen, mag in Folge dieser individuellen Beziehungen vielleicht etwas mehr betont worden sein, als es sonst geschehen wäre; dennoch ist es meine Ueberzeugung, dass sie thatsächlich der Bedeutung entspricht, welche diese Wissenschaft — nicht jetzt besitzt, aber in der Zukunft besitzen wird.

Leipzig, im Juli 1883.

**W. Wundt.**

# Inhalt.

## Erster Abschnitt.

## Allgemeine Methodenlehre.


Erstes Capitel. Die Methoden der Untersuchung. Seite

1. Analyse und Synthese . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
   a. Allgemeine Bedeutung der analytischen und synthetischen Methode . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1
   b. Die Analyse . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2
   c. Die Synthese . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8
2. Abstraction und Determination . . . . . . . . . . . . . 11
   a. Die Abstraction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 11
   b. Die Determination . . . . . . . . . . . . . . . . . . 17
3. Induction und Deduction . . . . . . . . . . . . . . . . 20
   a. Die logischen Elemente der Induction . . . . . . . . . 20
   b. Die Induction als Methode . . . . . . . . . . . . . . 25
   c. Die Deduction . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 31

Zweites Capitel. Die Formen der systematischen Darstellung.

1. Die Definition . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39
2. Die Classification . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 47
   a. Allgemeine Eigenschaften der Classification und Entwicklung der Classificationsformen . . . . . . . . . . . . . . . 47
   b. Die descriptive Classification . . . . . . . . . . . . 50
   c. Die genetische Classification . . . . . . . . . . . . 52
   d. Die analytische Classification . . . . . . . . . . . . 60
   e. Die Zwei-, Drei- und Viertheilung . . . . . . . . . . 62
3. Der Beweis . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 65
   a. Allgemeine Aufgaben des Beweisverfahrens . . . . . . . 65
   b. Die directen Beweisformen . . . . . . . . . . . . . . 70
   c. Die indirecten Beweisformen . . . . . . . . . . . . . 79

## Zweiter Abschnitt.

### Von der Logik der Mathematik.

Erstes Capitel. Die allgemeinen logischen Methoden der Mathematik. Seite
1. Die Aufgaben der mathematischen Untersuchung . . . . . 87
2. Die mathematische Analyse und Synthese . . . . . . . . . 94
3. Die mathematische Induction und Abstraction . . . . . . . 100
a. Der mathematische Realismus und Nominalismus . . . . 100
b. Die historische Bedeutung der mathematischen Induction . 114
c. Die bleibenden Formen der mathematischen Induction . . 118
d. Die mathematische Abstraction . . . . . . . . . . . . 125
4. Die mathematische Deduction . . . . . . . . . . . . . . 131

Zweites Capitel. Die arithmetischen Methoden.
1. Die Zahlen und ihre Symbole . . . . . . . . . . . . . . 135
a. Das Ziffernsystem . . . . . . . . . . . . . . . . . . 135
b. Die Zahlarten und Zahlsysteme . . . . . . . . . . . . 139
c. Die Zahlgrenzen . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 150
2. Die algebraischen Operationen . . . . . . . . . . . . . 154
a. Die Entstehung und Bedeutung algebraischer Gleichungen . 155
b. Die allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Gleichungen 161

Drittes Capitel. Die geometrischen Methoden.
1. Die geometrischen Constructionsmethoden . . . . . . . . . 166
a. Die Entwicklung der geometrischen Constructionsmethoden . 166
b. Die Theilung der Figuren . . . . . . . . . . . . . . . 170
c. Die ergänzenden Hilfsconstructionen . . . . . . . . . . 172
d. Die genetischen Constructionen . . . . . . . . . . . . 177
2. Die Anwendung algebraischer Methoden auf die geometrische Untersuchung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 190
a. Die algebraische und die analytische Geometrie . . . . . 190
b. Die geometrische Analysis . . . . . . . . . . . . . . . 194

Viertes Capitel. Der Functionsbegriff und die Infinitesimalmethode.
1. Die analytischen Functionen . . . . . . . . . . . . . . 199
a. Die Entwicklung des Begriffs der Function . . . . . . . 199
b. Die Hauptformen der analytischen Functionen . . . . . 208
2. Der Differentialbegriff . . . . . . . . . . . . . . . . 223
a. Allgemeine Entwicklung des Differentialbegriffs . . . . . 223
b. Der phoronomische Differentialbegriff . . . . . . . . . . 227
c. Der geometrische Differentialbegriff . . . . . . . . . . 231
d. Der arithmetische Differentialbegriff . . . . . . . . . . 238
e. Der Begriff der derivirten Function . . . . . . . . . . 240
3. Das Princip der Integration . . . . . . . . . . . . . . 243
4. Die Anwendungen der Infinitesimalmethode . . . . . . . . 249

## Dritter Abschnitt.

## Von der Logik der Naturwissenschaften.

Erstes Capitel. Die allgemeinen Grundlagen der Naturforschung. Seite
1. Die Entwicklung und Gliederung der Naturwissenschaften . . 260
a. Die Entwicklung der Naturwissenschaften . . . . . . . 260
b. Das System der Naturwissenschaften . . . . . . . . . . 265
2. Heuristische Principien der Naturforschung . . . . . . . . 272
a. Causale und teleologische Naturbetrachtung . . . . . . 272
b. Das Postulat der Anschaulichkeit . . . . . . . . . . . 278
c. Der kritische Zweifel . . . . . . . . . . . . . . . 283
d. Das Princip der Einfachheit . . . . . . . . . . . . . 286
3. Die Principien der Mechanik und der Causalbegriff der mechanischen Naturlehre . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 291
a. Die Entwicklung der mechanischen Grundbegriffe . . . . 291
b. Die Formulirung der mechanischen Axiome durch Newton . 299
c. Teleologische Fundamentaltheoreme der Mechanik . . . . 302
d. Causale Fundamentaltheoreme der Mechanik . . . . . . 314
e. Die phoronomischen und die dynamischen Voraussetzungen der Mechanik . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 322
f. Der Causalbegriff der mechanischen Naturlehre und das Postulat der geschlossenen Naturcausalität . . . . . . . . . . . 326
4. Die allgemeinen Methoden und Hülfsmittel der Naturforschung 333
a. Allgemeiner Charakter der naturwissenschaftlichen Methoden 333
b. Die experimentelle Methode . . . . . . . . . . . . . 334
c. Die vergleichende Methode . . . . . . . . . . . . . 339
d. Naturbeschreibung und Naturerklärung . . . . . . . . . 344

Zweites Capitel. Die Logik der Physik.
1. Die physikalischen Methoden . . . . . . . . . . . . . . 347
a. Die Analyse der Naturerscheinungen . . . . . . . . . 347
b. Die synthetische Erzeugung der Naturerscheinungen . . . 357
c. Die physikalische Induction . . . . . . . . . . . . . 359
d. Die physikalische Abstraction . . . . . . . . . . . . 373
e. Die physikalische Deduction . . . . . . . . . . . . . 379
2. Die Hülfsmittel der physikalischen Forschung . . . . . . . 394
a. Die physikalische Beobachtung . . . . . . . . . . . . 395
b. Die Messung der Naturerscheinungen . . . . . . . . . . 403
c. Die mathematischen Hülfsoperationen der physikalischen Untersuchung . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 416
d. Die physikalische Constantenbestimmung . . . . . . . 421
3. Das Substrat der Naturerscheinungen . . . . . . . . . . . 427
a. Continuitätshypothese und Atomistik . . . . . . . . . 428
b. Die dynamische Atomtheorie . . . . . . . . . . . . . 431
c. Die kinetische Atomtheorie . . . . . . . . . . . . . 434

Seite

d. Rückkehr zu Continuitätsvorstellungen . . . . . . . . . 435
e. Logische Prüfung der Hypothesen . . . . . . . . . . . 438
4. Die allgemeinen Naturgesetze . . . . . . . . . . . . . 447
a. Kraftgesetze und Kraftfunctionen . . . . . . . . . . . 447
b. Die Energiegesetze . . . . . . . . . . . . . . . . . . 453
c. Die physikalischen Grenzbegriffe . . . . . . . . . . . 457

Drittes Capitel. Die Logik der Chemie.

1. Die chemischen Methoden . . . . . . . . . . . . . . . 468
a. Allgemeine Aufgaben der chemischen Untersuchung . . . 468
b. Die chemische Analyse . . . . . . . . . . . . . . . . 470
c. Die chemische Synthese . . . . . . . . . . . . . . . 478
d. Die chemische Induction . . . . . . . . . . . . . . . 481
e. Die chemische Abstraction und Deduction . . . . . . . 491
2. Die chemische Statik und Dynamik . . . . . . . . . . . 495
a. Die Principien der chemischen Statik . . . . . . . . . 495
b. Die Principien der chemischen Dynamik . . . . . . . . 501
3. Der chemische Atombegriff . . . . . . . . . . . . . . . 506

Viertes Capitel. Die Logik der Biologie.

1. Die biologischen Methoden . . . . . . . . . . . . . . . 514
a. Allgemeine Aufgaben der biologischen Forschung . . . . 514
b. Die morphologische Analyse . . . . . . . . . . . . . . 517
c. Die physiologisch-chemische Untersuchung . . . . . . . 524
d. Die physiologisch-physikalische Untersuchung . . . . . 526
e. Die physiologische und pathologische Functionsanalyse . . 528
2. Die allgemeinen Gesetze der Lebenserscheinungen . . . . . 533
a. Die biologischen Richtungen . . . . . . . . . . . . . 533
b. Teleologische Principien der Biologie . . . . . . . . . 537
c. Causale Principien der Biologie . . . . . . . . . . . . 553
3. Die biologischen Grundbegriffe und die Hypothesen über den allgemeinen Zusammenhang der Lebensvorgänge . . . . . . 558
a. Das organische Individuum und der Elementarorganismus . 558
b. Die systematischen Begriffe der Biologie . . . . . . . 564
c. Die Ursachen des Lebens . . . . . . . . . . . . . . . 568
d. Der Begriff der Krankheit . . . . . . . . . . . . . . 580

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Erster Abschnitt.

# Allgemeine Methodenlehre.

Erstes Capitel.

## Die Methoden der Untersuchung.

### 1. Analyse und Synthese.

a. Allgemeine Bedeutung der analytischen und synthetischen Methode.

Jede einzelne wissenschaftliche Untersuchung besteht entweder in der Zergliederung eines zusammengesetzten Gegenstandes in seine Bestandtheile, oder in der Verbindung irgend welcher relativ einfacher Thatsachen zum Behuf der Erzeugung zusammengesetzter Resultate. Analyse und Synthese sind daher die allgemeinsten Formen der Untersuchung, die in alle anderen als unerlässliche Bestandtheile eingehen. So erheben sich auf beiden zunächst zwei Paare zusammengesetzter Methoden: erstens die Abstraction mit ihrer Umkehrung, der Determination, und zweitens die Induction mit ihrer Umkehrung, der Deduction. Die Abstraction gründet sich auf analytische Untersuchungen; die Determination ist ein synthetisches Verfahren. Die Induction stützt sich vorzugsweise auf eine Analyse der Thatsachen; die Deduction verbindet wiederum die durch die Analyse gewonnenen Elemente. Doch ist damit nur die vorwiegende Richtung der Denkoperationen bezeichnet; denn es verräth sich gerade in der combinirten Anwendung der Analyse und Synthese die zusammengesetztere Beschaffenheit der Methoden.

Von den Methoden der Untersuchung sind die Formen der systematischen Darstellung abhängig. Auch in Bezug auf diese

bewähren daher die Analyse und Synthese ihre grundlegende Bedeutung. Den einfachen Methoden derselben entsprechen die Formen der Definition, welche entweder in der Zerlegung eines Begriffs in seine Elemente oder in dem Aufbau desselben aus diesen Elementen bestehen kann. Den Methoden der Abstraction und Determination schliesst sich das Verfahren der Classification an. Die Gewinnung der Allgemeinbegriffe eines Systems beruht auf Abstraction, während bei der Bildung der Eintheilungsglieder das umgekehrte Verfahren der Determination Platz greift. Endlich auf die Induction und Deduction stützen sich die Formen der Demonstration. Denn der Beweis eines Satzes besteht entweder in einer abgekürzten Reproduction des Weges, auf welchem derselbe gewonnen wurde, oder auf einer umgekehrten Zurücklegung dieses Weges. Da nun alle wissenschaftlichen Sätze durch Induction oder Deduction gefunden sind, so folgt hieraus, dass auch das Beweisverfahren bald den inductiven, bald den deductiven Weg einschlagen wird, wobei jedoch wegen der angedeuteten Umkehrungen ein Uebergewicht des deductiven Verfahrens bestehen bleibt.

Die allgemeine Methodenlehre muss sich darauf beschränken, in Bezug auf jede der angegebenen Methoden die allgemeingültigen logischen Gesichtspunkte zu entwickeln, während die Untersuchung der besonderen Bedingungen und einzelnen Formen ihrer Anwendung den folgenden Abschnitten, welche die Logik der einzelnen Wissenschaftsgebiete behandeln, überlassen bleibt.

### b. Die Analyse.

Die Gegenstände unserer Erfahrung sind von zusammengesetzter Beschaffenheit. Jedes einzelne Object oder Ereigniss bietet uns bald mehrere bleibend coexistirende Bestandtheile, bald verschiedene in der Zeit auf einander folgende Zustände dar, und nicht selten verbinden sich diese beiden Merkmale mit einander. Die Analyse ist daher diejenige methodische Denkoperation, welche durch die natürliche Beschaffenheit der Erfahrungsobjecte in der Regel zuerst angeregt wird. Eine klare und deutliche Auffassung der Gegenstände ist die Grundbedingung der wissenschaftlichen Untersuchung und zugleich das nächste Merkmal, welches dieselbe von der gewöhnlichen praktischen Betrachtung der Dinge unterscheidet. Die bestimmte Vergegenwärtigung der einzelnen simultan oder successiv wahrzunehmenden Elemente, aus denen eine Thatsache besteht, muss daher

der erste Schritt bei der Untersuchung derselben sein. Diese Analyse der Thatsachen vollzieht sich aber wieder in einer bestimmten Entwicklungsfolge, innerhalb deren sich im allgemeinen drei Stufen unterscheiden lassen. Naturgemäss ist es nur die erste derselben, welche in der angedeuteten Weise die Vorbereitung zu jeder weiteren Untersuchung bildet, während sich die übrigen mit synthetischen Verfahrungsweisen verbinden können und in dieser Verbindung namentlich Bestandtheile der Induction und Deduction zu bilden pflegen.

Jene erste Stufe ist die der elementaren Analyse. Sie besteht lediglich in der Zerlegung einer Erscheinung in ihre Theilerscheinungen, ohne dass man sich noch darum kümmert, in welchen gegenseitigen Beziehungen die Theile des Ganzen zu einander stehen mögen. Eine solche Zerlegung erfüllt zunächst einen rein descriptiven Zweck. Denn darin besteht das Wesen der Beschreibung, dass man ausschliesslich über das Neben- und Nacheinander der Bestandtheile einer Erscheinung Rechenschaft gibt. Ausserdem kann aber die Beschreibung die eingehendere causale Untersuchung vorbereiten, und es ist dies regelmässig der Fall, wenn nicht die Schwierigkeit des Gegenstandes eine einstweilige Beschränkung auf die blosse Beschreibung gebietet. Im übrigen können die Hülfsmittel, deren sich die elementare Analyse bedient, der verschiedensten Art sein. In den einfachsten Fällen stützt sie sich auf die natürlichen Sinneswerkzeuge oder, bei der psychologischen Analyse, auf die unmittelbare innere Wahrnehmung. Der logische Charakter des Verfahrens bleibt aber der nämliche, wenn künstliche Werkzeuge den Sinnesorganen zu Hülfe kommen, wie bei den vollkommeneren Formen der naturwissenschaftlichen Beobachtung, oder wenn aus den Berichten verschiedener Augenzeugen, historischen Documenten, statistischen Erhebungen u. dergl. eine Anzahl von Thatsachen in Bezug auf ihre räumliche und zeitliche Verbindung festgestellt wird, wie solches bei der Untersuchung socialer und historischer Fragen stattzufinden pflegt. Selbst dann verliert die Methode noch nicht den Charakter elementarer Analyse, wenn gewisse Versuchsverfahren zu Rathe gezogen werden, deren Anwendung an sich schon auf die Kenntniss gewisser causaler Beziehungen gegründet ist, so lange sich nur der Zweck des Verfahrens auf die thatsächliche Feststellung der Elemente einer Erscheinung beschränkt und bloss die äussere räumliche und zeitliche Verbindung derselben berücksichtigt. So ist die chemische Elementaranalyse auch im logischen Sinne eine solche, so weit sich auch hier der Vorgang von der einfachen Zerlegung einer

sinnlichen Wahrnehmung in ihre Theile entfernen mag. Denn das Resultat der chemischen Elementaranalyse ist bloss die Kenntniss der einfachen Bestandtheile des untersuchten Körpers ohne Rücksicht auf die näheren Bedingungen ihrer Verbindung. Aber gerade in diesen verwickelteren Fällen, in denen schon für den descriptiven Zweck experimentelle Hülfsmittel herbeigezogen werden müssen, pflegt die erste unaufhaltsam zu den weiteren Stufen der analytischen Methode überzuführen.

Als zweite Stufe ergibt sich so die der causalen Analyse. Sie besteht in der Zerlegung einer Erscheinung in ihre Bestandtheile mit Rücksicht auf die ursächlichen Beziehungen derselben. Eine derartige vom Zweck der Erklärung geleitete Zergliederung setzt die elementare descriptive Analyse bereits voraus. Doch kann diese unter Umständen sehr schnell erledigt sein oder auch sofort in die causale Zergliederung verwoben werden, so dass die Untersuchung unmittelbar mit der letzteren zu beginnen scheint. Beispiele solcher Art bieten unter den Naturwissenschaften die Physik, unter den Geisteswissenschaften die Psychologie und Geschichte, während anderseits Chemie und Physiologie, Staats- und Gesellschaftslehre leicht als Gebiete zu erkennen sind, in denen das descriptive Stadium eine selbständigere Bedeutung besitzt. Der Grund dieses Unterschieds liegt in den verschiedenen Bedingungen dieser Wissenschaften. Physik und Psychologie beschäftigen sich beide mit der Erklärung der allgemeinen Erscheinungen, jene der äusseren, diese der inneren Erfahrungen. Zu diesem Behuf beginnen beide ihre Analyse mit den einfachsten Thatsachen, bei denen ohne beschreibende Vorbereitung eine causale Erwägung unmittelbar nahe gelegt wird. Die Untersuchung der verwickelteren Erscheinungen stützt sich dann aber bereits auf jene einfachsten Causalanalysen, und es verbindet sich daher sofort mit ihnen der Versuch, durch ein synthetisches Verfahren die Anwendbarkeit der analytisch gewonnenen causalen Principien zu prüfen. Der historischen Untersuchung mangeln zwar solche einfache Ausgangspunkte; dafür aber bedient sie sich eines weitgehenden Abstractionsverfahrens, das es ihr gestattet, zunächst gewisse Hauptmomente des historischen Geschehens herauszugreifen, für welche die Zurückführung auf bestimmte psychologische Motive nahe liegt. In völlig entgegengesetzter Lage befinden sich die an zweiter Stelle angeführten Gebiete. Bei ihnen ist meistens schon in den einfachsten Fällen das rein thatsächliche Verhalten, wie es z. B. in der qualitativen und quantitativen Zusammensetzung einer

chemischen Verbindung, in den morphologischen und chemischen Eigenschaften eines Organs, in den Berufs- und Sittenzuständen einer Bevölkerung gegeben ist, so wenig der unmittelbaren Beobachtung zugänglich, dass die descriptive Analyse der Thatsachen einen selbständigen Werth für sich in Anspruch nimmt.

In der Ausführung zeichnet sich die causale Analyse vor allem durch ein willkürliches Isoliren einzelner Elemente aus den zu untersuchenden complexen Thatsachen aus, welches Verfahren in der Absicht geübt wird, die causalen Beziehungen der isolirt betrachteten Elemente kennen zu lernen. Während demnach die elementare Analyse den Gegenstand höchstens insofern verändert, als sie zum Behuf der Nachweisung seiner Bestandtheile diese successiv von einander trennt, vernachlässigt die causale von vornherein die Existenz gewisser Bestandtheile; sie beschränkt sich dann aber nicht auf die Nachweisung der übrigen in Rücksicht gezogenen, sondern sie sucht so viel als möglich die Bedingungen ihrer Coexistenz oder Aufeinanderfolge zu verändern. Zu der Isolation gesellt sich auf diese Weise die Variation der Elemente als das wesentlichste Hülfsmittel. Am vollendetsten gestaltet sich die letztere dann, wenn die Natur des Gegenstandes es gestattet, willkürlich einzelne Elemente der Erscheinung entweder ganz zu beseitigen oder in ihrer Grösse zu verändern. In einer solchen willkürlichen Variation besteht die analytische Form des experimentellen Verfahrens. Wo das Experiment angewandt werden kann, verdient es vor jeder anderen Art causaler Analyse den Vorzug, weil es auf dem directesten Wege das causale Verhältniss der Bestandtheile einer Erscheinung ermitteln lässt. Ist es wegen der Natur des Gegenstandes nicht anwendbar, wie bei gewissen den Menschen betreffenden physiologischen Fragen, bei den allgemeinsten kosmologischen und biologischen, bei historischen und socialen Problemen, so muss der Variation der Elemente der untersuchten Erscheinung die Variation der Elemente verschiedener einander ähnlicher Erscheinungen substituirt werden. Es greift daher nun allgemein ein Vergleichungsverfahren Platz, bei welchem man die zu untersuchende Thatsache in Parallele bringt mit anderen bekannten Thatsachen, die ihr in irgend welchen Beziehungen ähnlich sind. Je mehr solche Variationen denjenigen Veränderungen gleichen, die man bei der experimentellen Methode willkürlich hervorbringen würde, um so mehr gewinnen natürlich auch die Resultate einen experimentellen Werth. Da jedoch die Auffindung geeigneter Thatsachen von glücklichen Zufällen abhängt, so bean-

spruclit hier die Untersuchung auch unter den günstigsten Verhältnissen eine längere Zeit, und sie setzt die Ansammlung eines umfangreicheren Erfahrungsmateriales voraus. In nicht seltenen Fällen aber bleibt jede Annäherung an die experimentelle Methode dadurch ausgeschlossen, dass die untersuchten Thatsachen einen singulären Charakter besitzen, insofern selbst die einigermassen verwandten Erscheinungen immer noch zu verschieden sind, um eine unmittelbare Vergleichung zu gestatten. Dies findet namentlich bei denjenigen Vorgängen der Entwicklung statt, bei denen, wenigstens in einer unserer Beobachtung zugänglichen Zeit, periodische Wiederholungen ausgeschlossen sind, wie bei der ersten Entstehung kosmischer und organischer Gebilde oder bei historischen Ereignissen. Hier muss sich dann die vergleichende Causalanalyse theils mit entfernteren Analogien begnügen, theils wird sie von Voraussetzungen geleitet, die einem allgemeineren Gebiet von Thatsachen angehören, das eine Anwendung auf den untersuchten Gegenstand zulässt. So stützt sich die Analyse der Artentwicklung auf die individuelle Entwicklungsgeschichte und auf die nachweisbare Bildung von Spielarten; oder die historische Analyse folgt allgemein anerkannten psychologischen Gesichtspunkten.

Die dritte Stufe ist die logische Analyse. Sie besteht in der Zerlegung einer complexen Thatsache in ihre Bestandtheile mit Rücksicht auf die logischen Beziehungen derselben. Hierzu ist erforderlich, dass eine allgemeine Feststellung der begrifflichen Eigenschaften der Elemente des Ganzen bereits erfolgt sei. Ist diese Voraussetzung erfüllt, so übernimmt dann die logische Analyse die Entwicklung der einzelnen Folgerungen, welche sich aus diesen Eigenschaften ergeben. In doppelter Weise kann aber jene allgemeine Feststellung geschehen, welche die Vorbedingung der logischen Analyse ist: erstens durch ein synthetisches Verfahren, welches nach in der Anschauung gegebenen oder willkürlichen Motiven die Beziehungen der Elemente eines Begriffs zugleich mit diesem selbst bestimmt, und zweitens durch die vorangegangenen Stufen der elementaren und causalen Analyse. Nur im zweiten dieser Fälle bildet demnach die logische Analyse das Endglied des analytischen Verfahrens überhaupt, während im ersten die nachher zu schildernde synthetische Methode in sie einmündet. Diese auf synthetischer Grundlage erwachsene logische Analyse ist die häufigste und zugleich die vollendetste Form. Insbesondere gehören hierher alle Anwendungen des analytischen

Verfahrens im Gebiet der reinen Mathematik. So besitzt man in der Gleichung einer Curve einen auf synthetischem Wege gewonnenen Ausdruck, welcher den Begriff der Curve sammt den Beziehungen seiner wesentlichen Elemente in sich schliesst. Die analytische Behandlung dieses Ausdrucks entwickelt dann durch Zerlegung des Begriffs die verschiedenen Eigenschaften der Curve. Stellt dagegen der einer solchen Analyse unterworfene mathematische Ausdruck ein allgemeines Naturgesetz dar, so pflegt dieses durch eine vorangegangene causale Analyse der Erscheinungen gewonnen zu sein, worauf nun die nachfolgende logische Analyse Folgerungen entwickelt, die wiederum durch Beobachtung oder Experiment geprüft werden können. Auf diese Weise fordern gerade hier, wo die logische Analyse das analytische Untersuchungsverfahren abschliesst, nicht selten die Resultate derselben eine theilweise Rückkehr zu den vorangegangenen Stufen. Uebrigens pflegt auch in diesen Fällen an der Feststellung der Begriffe, welche der logischen Analyse zu unterwerfen sind, immerhin in gewissem Grade die synthetische Methode betheiligt zu sein, da die Formulirung allgemeiner Naturgesetze niemals das Resultat einer reinen Analyse ist, sondern aus dem zusammengesetzten Verfahren der Induction entspringt.

Wegen der exacten Form, in welcher die mathematische Symbolik die Beziehungen der mit einander verbundenen Grössenbegriffe anzugeben vermag, erweist sich der mathematische Ausdruck eines Begriffs als vorzugsweise geeigneter Ausgangspunkt für die logische Analyse. Doch kann diese auch in solchen Begriffssystemen, deren Natur die mathematische Formulirung ausschliesst, zu verhältnissmässig grosser Vollendung gelangen. Das hervorragendste Beispiel dieser Art bilden die Rechtsbegriffe, die, nachdem sie durch Definitionen festgestellt sind, bald mit Rücksicht auf allgemeine Rechtsfragen, bald aus Anlass individueller Rechtsanwendungen der logischen Analyse unterworfen werden. Immerhin verräth sich die minder exacte Natur solcher Definitionen noch häufig genug in den widerstreitenden Resultaten, zu denen die Analyse gelangen kann, und deren Ausgleichung eine der erheblichsten Aufgaben juristischen Scharfsinns zu sein pflegt.

An den hier geschilderten drei Stufen der analytischen Methode können sich die verschiedenen logischen Functionen in ziemlich wechselnder Weise betheiligen. Eine logische Zergliederung dieser wie jeder anderen Methode lässt sich daher nur insofern vornehmen, als man die logischen Grundformen bezeichnet, auf welche die

betreffenden Methoden vermöge der in ihnen herrschenden Gedankenthätigkeit vorzugsweise zurückgehen. Unter dieser Voraussetzung lässt sich als die Grundform der elementaren Analyse das disjunctive Urtheil betrachten, das eine Thatsache $M$ in ihre Theile $A$, $B$, $C$ . . . zerlegt, ohne über die logische Beziehung dieser Theile zu einander Rechenschaft zu geben:

$$M \geqq A \,)(\, B \,)(\, C \ldots .$$

Die causale Analyse zerlegt diese Form in ebenso viele Abhängigkeitsurtheile, als zuvor einzelne Glieder unterschieden worden sind. Sie gewinnt so Beziehungen von der Form:

$$A \underset{\dashv}{\vDash} B,\; B \underset{\dashv}{\vDash} C,\; C \underset{\dashv}{\vDash} D, \ldots .$$

wobei das obere oder untere Symbol gilt, je nach der Richtung der causalen Abhängigkeit, unter Umständen aber auch beide in dem Zeichen der Wechselbestimmung $\mp$ sich vereinigen können. (Bd. I, S. 274.) Endlich die logische Analyse setzt an die Stelle des causalen Abhängigkeits- das allgemeinere Bedingungsurtheil, indem sie zugleich die sämmtlichen Glieder des untersuchten Begriffs mit einander zu verbinden strebt, so dass sie schliesslich ein Gesammturtheil gewinnt von der Form:

$$M \vDash (A, B, C \ldots)$$

oder in mathematischer Symbolik ausgedrückt

$$M = f\,(A, B, C \ldots .),$$

wo das Abhängigkeits- oder Functionssymbol vor der Gesammtheit der Begriffsglieder andeutet, die Zerlegung des Begriffs $M$ in seine Elemente $A$, $B$, $C$ . . . solle in der Weise stattfinden, dass zugleich die logischen Beziehungen dieser Elemente zu einander angegeben werden. Mit Rücksicht hierauf kann man daher in der logischen Analyse ein Verfahren erblicken, welches die formalen Eigenschaften der beiden vorangehenden Stufen verbindet.

### c. Die Synthese.

Das synthetische Verfahren kann in der einfachen Umkehrung einer vorausgegangenen Analyse bestehen. Dann ist die Synthese eine reproductive: sie hat einen verhältnissmässig beschränkten Werth, da sie hauptsächlich im Interesse einer nochmaligen Prüfung der analytischen Resultate unternommen wird. Es kann aber auch das synthetische Verfahren in einer solchen Weise zur Anwendung

kommen, dass nur gewisse Ergebnisse vorangegangener analytischer Untersuchungen oder sogar nur die Begriffselemente, die eine vorherige Analyse gefunden hat, benützt werden, während die Synthese selbst in neuer und unabhängiger Weise die Elemente verbindet. Hier ist die Synthese eine productive: sie führt zu Ergebnissen, welche die analytische Untersuchung in wesentlichen Punkten ergänzen oder in dieser nicht einmal angedeutet lagen. Zwischen beiden Arten der Synthese finden sich mannigfache Zwischenstufen, für die namentlich die synthetische Form des experimentellen Verfahrens Belege darbietet. Nachdem die Analyse eines zusammengesetzten Klangs gewisse Partialtöne in ihm nachgewiesen hat, versucht man aus einfachen Tönen den Klang zusammenzusetzen. Nachdem durch die Analyse des weissen Sonnenlichts die Spectralfarben als dessen Bestandtheile erkannt sind, erzeugt man das Weiss durch die Mischung der Farben. Aber hier liegt es dann zugleich nahe, das Verfahren zu modificiren, so dass der Weg einer bloss reproductiven Synthese verlassen wird. An Stelle aller Bestandtheile des Sonnenlichts begnügt man sich mit der Mischung einzelner Farben und gewinnt so durch selbständige Synthese verschiedene Combinationen derselben, die sich zu Weiss verbinden lassen. Ebenso entfernt sich die chemische Synthese, namentlich bei den zusammengesetzteren Verbindungen, in der Regel mehr oder weniger von dem Weg der Analyse, da man, von bestimmten Voraussetzungen über die Constitution der Verbindungen ausgehend, von vornherein durch die Synthese eine Prüfung jener Voraussetzungen zu gewinnen sucht. Am eigenthümlichsten gestaltet sich die Synthese dann, wenn sie von vorangegangenen analytischen Untersuchungen nur die Elemente übernimmt, mit denen sie ihren Aufbau beginnt. Sie führt hier den Namen der Construction, ein Ausdruck, der zunächst dem mathematischen Gebiete entnommen ist. So benützt die synthetische Geometrie den Punkt, die Gerade und die Ebene als Elemente, mit denen sie ihre Constructionen ausführt. Der productive Charakter der letzteren ist aber namentlich auch deshalb ein so ausgeprägter, weil die Analysen, die zur Auffindung jener Elemente geführt haben, höchst einfacher Art waren, so dass sie den Erfolg der sich anschliessenden synthetischen Operationen nicht vorausahnen liessen.

Abgesehen von dieser in dem Verhältniss zur vorangegangenen Analyse begründeten Unterscheidung sind bei der synthetischen Untersuchung, eben weil sie eine Umkehrung der analytischen ist,

die nämlichen Stufen wie bei dieser möglich. Doch tritt die elementare Synthese fast ganz zurück, da der rein thatsächliche Nachweis der Elemente eines Ganzen in der Regel durch die analytische Untersuchung in zureichender Weise geliefert werden kann. Dagegen ist die causale Synthese von hervorragender Bedeutung. Sie bildet einen wichtigen Bestandtheil des experimentellen Verfahrens, der nicht bloss da seine Anwendung findet, wo es sich darum handelt ein analytisches Resultat durch die Umkehrung des Versuchswegs zu bestätigen, sondern vielfach auch selbständig durch neue Combinationen elementarer Bedingungen complexe Erscheinungen hervorbringt. Eine logische Synthese endlich ist bei allen mathematischen und sonstigen begrifflichen Constructionen wirksam. Bald werden solche Constructionen, wie in der synthetischen Geometrie, durch die Anschauung geleitet, wobei jedoch die Verarbeitung der letzteren immer logischen Gesichtspunkten unterworfen bleibt, bald beruhen sie auf einer rein begrifflichen Zusammenfügung, wie bei dem Euklidischen Beweisverfahren in seinen mathematischen, philosophischen und sonstigen Anwendungen, oder bei gewissen dialektischen Verfahrungsweisen von synthetischem Charakter, für welche Hegels Dialektik ein prägnantes Beispiel ist. Die verhältnissmässig einwurfsfreieste unter diesen Methoden, die Euklidische, zeigt jedoch deutlich, was bei den anderen zuweilen mehr verhüllt wird, dass es sich hier im besten Falle um reproductive Synthesen handelt, bei denen man, wie dies schon von Newton trotz seiner Hochschätzung des Euklidischen Verfahrens richtig erkannt wurde, analytische Ergebnisse in die synthetische Form umprägt. Wo dies nicht der Fall ist, wie in den synthetischen Verfahrungsweisen philosophischer Dialektik, da treten an die Stelle einer haltbaren logischen Synthese nur zu leicht willkürliche Begriffscombinationen.

Die synthetische Methode ist im allgemeinen von beschränkterer Anwendung als die analytische. Insbesondere pflegen sich die Thatsachen, sobald sie eine gewisse Verwicklung erreichen, der synthetischen Construction oder selbst Reconstruction zu entziehen. So beschränkt sich schon die synthetische Geometrie auf die Untersuchung verhältnissmässig einfacher Raumgebilde, wie der Curven und Flächen zweiten Grades; die Untersuchung complicirterer Probleme überlässt sie der analytischen Geometrie. Ebenso reicht in der Physik und Chemie die Analyse bis zu den zusammengesetztesten Erscheinungen und Körpern, während die Synthese immer nur relativ einfachere Processe aus ihren Bedingungen oder einfachere Verbin-

dungen aus ihren Elementen zu erzeugen im Stande ist. Aus dem nämlichen Grunde ist die Synthese im Gebiet der Geisteswissenschaften von beschränkter Anwendung. Die meisten psychologischen, socialen und historischen Thatsachen sind von allzu verwickelter Beschaffenheit, als dass sie einen anderen als den analytischen Weg der Untersuchung zuliessen. Nur die Psychologie gestattet bei den einfachsten Processen der sinnlichen Wahrnehmung ein synthetisches Experimentalverfahren. Ebenso hat auf Grund gewisser allgemeingültiger psychologischer Thatsachen die Nationalökonomie, indem sie durch eine weitgehende Abstraction die Probleme auf einfachste Bedingungen zurückführte, gewisse Folgerungen auf synthetischem Weg gewonnen. Dabei sind dann freilich diese insofern nur von hypothetischer Bedeutung, als durch die gemachten Abstractionen die Fiction eines Thatbestandes entsteht, welcher von dem wirklichen Geschehen stets mehr oder weniger weit sich entfernt.

Da das synthetische nur eine Umkehrung des analytischen Verfahrens ist, so bleiben auch die logischen Grundformen hier die nämlichen. Die elementare Synthese entspricht einfach dem copulativen Urtheil von der Form:

$$A\,)(\,B\,)(\,C\,....\leqq M.$$

Die causale Synthese führt dann aber sofort zu einem zusammengesetzten Abhängigkeitsurtheil von der Form:

$$(A,\ B,\ C\ ...)\ \urcorner\ M \text{ oder } f\,(A,\ B,\ C\ ...) = M,$$

da, dem Charakter der synthetischen Methode gemäss, das für die Analyse charakteristische Herausheben einzelner Causalbeziehungen hinwegfällt. Der nämlichen Form folgt dann schliesslich die logische Synthese, bei der nur die Abhängigkeits- und Functionssymbole eine allgemeinere Bedeutung gewinnen.

## 2. Abstraction und Determination.

### a. Die Abstraction.

Unter der Abstraction verstehen wir allgemein das Verfahren, durch welches aus einer zusammengesetzten Vorstellung oder aus einer Mehrzahl solcher Vorstellungen gewisse Bestandtheile eliminirt und die zurückbleibenden als Elemente eines Begriffs festgehalten werden. Die Abstraction ist daher das hauptsächlichste Hülfsmittel für die Bildung von Allgemeinbegriffen; ihrer-

seits aber stützt sie sich auf die Analyse. Denn die Thatsachen, die als Objecte der Begriffsbildung gegeben sind, müssen zunächst in gewisse Bestandtheile zerlegt sein, ehe ein Eliminationsverfahren eintreten kann.

Die wissenschaftliche Bedeutung der Abstraction beruht theils auf dem Werthe, der ihr an und für sich zukommt, theils und besonders aber auf der Wichtigkeit, die sie als Bestandtheil und Hülfsmittel anderer logischer Verfahrungsweisen besitzt. Aus der Fülle der einzelnen Erscheinungen, die einen complexen Thatbestand ausmachen, bestimmte Elemente herausheben und isolirt der weiteren Untersuchung oder der Ordnung der Erscheinungen zu Grunde legen zu können, ist eine der werthvollsten Errungenschaften der analytischen Methode. Dabei gewährt es noch einen besonderen Vortheil, dass die Abstraction vollkommen nach unserer freien Wahl in der verschiedensten Weise und im verschiedensten Grade geübt werden kann. Denn es ist schliesslich derselbe Vorgang, der den Systematiker befähigt, bei der Untersuchung einer naturgeschichtlichen Species die individuellen Variationen zu vernachlässigen, die eine im übrigen mit zahlreichen concreten Eigenschaften ausgerüstete Artform darbietet, und der es dem Mathematiker möglich macht, Begriffe festzuhalten, welche in der von ihm definirten Weise in gar keiner concreten Erfahrung gegeben sind, sondern für welche die einzelnen Erfahrungsobjecte nur als Hülfsmittel der Versinnlichung dienen müssen.

Die Abstraction vollzieht sich in zwei von einander abweichenden Formen, die wir als isolirende und generalisirende Abstraction unterscheiden können. Unter ihnen ist die erstere die ursprünglichere, da die analytische Methode immer zunächst zu ihr führt, und da sie jeder generalisirenden Abstraction nothwendig vorausgeht. Im übrigen aber bilden beide nicht etwa zwei regelmässig auf einander folgende Entwicklungsstufen, sondern die isolirende Abstraction besitzt ihren selbständigen Werth, und bei vielen der wichtigsten Anwendungen des Abstractionsverfahrens bleibt dieses ganz auf die isolirende Form beschränkt, und die generalisirende bildet eine verhältnissmässig unwichtigere Ergänzung.

Das Wesen der isolirenden Abstraction liegt darin, dass man aus einer in der Beobachtung gegebenen complexen Erscheinung einen bestimmten Bestandtheil oder mehrere Bestandtheile willkürlich abgetrennt denkt und für sich der Beobachtung unterzieht. So reflectirt der Physiker bei der Untersuchung der Lichtbrechung im

Prisma nur auf den Gang der Lichtstrahlen und die Farbenzerstreuung, er abstrahirt aber von der gleichzeitigen Erwärmung des Prismas, seiner thermischen Ausdehnung, der Elasticitätsänderung des Glases u. s. w. So nimmt der Nationalökonom bei der Untersuchung der allgemeinen Gesetze des Güterverkehrs nur auf den Trieb der Menschen, Güter zu erwerben und zu ersparen, Rücksicht, um dagegen alle möglichen anderen Eigenschaften, moralische Triebe, Leidenschaften, mangelnde Einsicht u. dergl., die in der Wirklichkeit nicht selten die Effecte jener wirthschaftlichen Eigenschaften durchkreuzen, zu vernachlässigen. So reflectirt schliesslich der Geometer, wenn er den Begriff eines mathematischen Punktes bildet, nur auf die Anschauungsfunction, welche einen Ort im Raume fixirt, er abstrahirt aber von allen Eigenschaften der physischen Objecte, die wir zur Ortsbestimmung verwenden, also nicht bloss von ihrer Lichtbeschaffenheit, sondern insbesondere auch von ihrer räumlichen Ausdehnung.

Die generalisirende Abstraction besteht darin, dass man innerhalb einer der vergleichenden Analyse unterworfenen Anzahl von Gegenständen oder Thatsachen die von einem individuellen Fall zum anderen wechselnden Eigenschaften vernachlässigt, um gewisse der gesammten Gruppe gemeinsam zugehörige zurückzubehalten und zu Merkmalen eines allgemeinen Begriffs zu erheben. Diese Abstraction zerfällt wieder in zwei Unterformen, je nachdem die der Analyse unterworfenen Objecte wirkliche Gegenstände der Anschauung oder des Denkens oder aber einzelne Sätze sind, die sich auf irgend welche Relationen von Gegenständen beziehen. Im ersten Fall gehen aus der Abstraction Gattungsbegriffe hervor, im zweiten Fall liefert dieselbe abstracte Regeln oder Gesetze. So sind die Begriffe der naturhistorischen Classificationen durch eine generalisirende Abstraction der ersten Art gebildet: sie sind zugleich Gegenstandsbegriffe, wenn ihnen auch nicht unmittelbar reale Gegenstände entsprechen, da diese stets individuelle Eigenschaften besitzen, die bei der Bildung der Gattungsbegriffe eliminirt werden. Andere Gattungsbegriffe entstehen durch eine Generalisation, die nicht von empirischen Gegenständen, sondern von Begriffen ausgeht, welche bereits eine isolirende Abstraction voraussetzen. Den allgemeinen Begriff des Dreiecks z. B. bilden wir aus einer Vielheit einzelner geometrischer Dreiecke, deren jedes das Resultat einer mathematischen Abstraction ist. Ebenso finden sich innerhalb aller anderen Begriffsgebiete Verhältnisse der Ueber- und Unterordnung, die auf eine Stufenfolge

generalisirender Abstraction hinweisen. Nicht minder ist die zweite Form der letzteren, die Abstraction von Regeln oder Gesetzen, von allgemeiner Bedeutung. Wie die Begriffe einer nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung wirkenden Kraft oder einer transversalen Wellenbewegung durch Generalisation entstanden sind, so beruhen auch die allgemeinen Gesetze einer solchen Kraft oder Bewegung auf generalisirender Abstraction. Ueberhaupt aber ist diese bei der Aufstellung aller derjenigen Gesetze betheiligt, die eine Vielheit concreter Gesetze, deren jedes durch eine besondere Induction gefunden ist, unter sich begreifen.

Auf diese Weise schliesst nicht selten die generalisirende Abstraction einen zusammengesetzten Inductionsprocess ab, während umgekehrt die isolirende denselben theils vorbereitet, theils in seinen Ablauf unterstützend eingreift. Ein charakteristischer äusserer Unterschied beider Formen liegt ausserdem darin, dass sich die Isolation nöthigenfalls an einem einzigen Erfahrungsgegenstande vollziehen kann, die Generalisation aber stets eine Vielheit von Objecten voraussetzt. Die Gesetze der Lichtbrechung würden sich an einem einzigen Prisma studiren, der Begriff der Geraden an einer einzigen mit dem Lineal gezogenen Linie entwickeln lassen, wenn auch in der Wirklichkeit wegen der wünschenswerthen Variation der Bedingungen selten eine solche Beschränkung stattfinden wird. Dagegen ist für die Begriffe der Naturgeschichte oder der systematischen Geisteswissenschaften die Vielheit der Abstractionsobjecte ein unbedingtes Erforderniss, da die Heraushebung der den allgemeinen Begriff constituirenden Elemente nur durch ihr Vorkommen in einer Vielheit einzelner Gegenstände oder Specialbegriffe veranlasst wird.

Als die logische Grundform der Abstraction lässt sich der Vergleichungsschluss, und zwar vorzugsweise in seiner positiven Form, betrachten (Bd. I, S. 363), nach folgendem Schema:

$$\begin{array}{c} A < M_1,\ M_2,\ M_3, \\ B < M_1,\ M_2,\ M_4, \\ C < M_1,\ M_2,\ M_5, \\ \hline A,\ B,\ C < M_1, \end{array}$$

worin $M_1$ die in Betracht gezogenen Begriffselemente repräsentirt, während $M_2$, $M_3$, $M_4$, $M_5$ die zu eliminirenden Elemente bedeuten, von denen einzelne ($M_2$) ebenfalls übereinstimmen können, während

andere ($M_3$, $M_4$, $M_5$) variiren. Die beiden Arten der Abstraction unterscheiden sich nicht sowohl in der Grundform des Vorgangs als in der Auswahl und weiteren Verwerthung der Elemente. Während bei der Isolation die verglichenen Objecte $A$, $B$, $C$ . . . nur dazu dienen, die Elemente $M_1$ zu gewinnen, und diese dann zum Zweck der Auffindung allgemeiner Abhängigkeitsbeziehungen den zusammengesetzteren Verfahrungsweisen der Induction überliefert werden, bleibt bei der Generalisation die Ordnung der ursprünglichen Objecte $A$, $B$, $C$ . . . von entscheidender Bedeutung, und das in die symbolische Formel $A, B, C < M_1$ gefasste Resultat deutet daher zugleich den wesentlichen Zweck des Abstractionsverfahrens selbst an. Denn dieser besteht in der Verbindung der Elemente $M_1$ zu einem Gattungsbegriff, der den Objecten oder Thatsachen $A$, $B$, $C$ . . . übergeordnet ist.

Beide Formen der Abstraction werden vorbereitet in jenen Begriffsentwicklungen des gewöhnlichen Bewusstseins, die überall den von wissenschaftlichen Zwecken geleiteten Operationen vorangehen. Für die Isolation fällt dieser Umstand wenig ins Gewicht. Zwar knüpft auch hier die wissenschaftliche Untersuchung an die durch die oberflächlichen Unterschiede der Wahrnehmungen nahe gelegten Abstractionen an, nur aber um diese sofort einer Bearbeitung durch die Induction zu unterwerfen, welche etwa begangene Fehler leicht auszugleichen im Stande ist. Um so bedeutungsvoller sind die natürlichen Begriffsbildungen für die Generalisation. Stets trifft diese bereits Gattungsbegriffe an, über deren Bildung sich das vorwissenschaftliche Denken keine zureichende Rechenschaft gibt, und denen es gleichwohl durch feststehende sprachliche Bezeichnungen eine grosse Widerstandskraft verleiht. Dazu kommt bei den untersten Gattungsbegriffen noch der Umstand, dass sie, da in solchen Fällen die Uebereinstimmung der oberflächlichen derjenigen der tieferen Merkmale parallel zu gehen pflegt, meistens von der Wissenschaft sanctionirt werden müssen, wodurch leicht die Täuschung entsteht, als wenn ein Abstractionsverfahren hier überhaupt gar nicht vorhanden wäre. Hatte sich diese Täuschung in der Platonischen Ideenlehre auch auf die oberen Gattungen übertragen, denen dann freilich nur eine transcendente Existenz zugestanden werden konnte, so ist sie in der neueren Wissenschaft in der vielleicht gefährlicheren Form erhalten geblieben, dass man die unteren Gattungen für wirkliche Erfahrungsgegenstände hielt. In der Naturgeschichte hat dieser Irrthum zu der lange Zeit herrschenden Lehre geführt, dass jede

organische Species eine primitive organische Form sei. Der Canis familiaris und die Felis domestica, meinte man, seien wirkliche Objecte oder mindestens einmal solche gewesen, während Niemand der Meinung war, dass der Wiederkäuer oder das Wirbelthier als solche existiren oder auch nur jemals existirt haben. Aehnlich verhält es sich noch mit anderen Producten generalisirender Abstraction. Die nordische Mythologie, die deutsche Sprache gelten als wirkliche geistige Dinge; aber dem Polytheismus oder der Sprache überhaupt schreibt man eine solche Realität nicht zu. Immerhin ist es bemerkenswerth, dass hier in gewissem Sinne die Entwicklungslehre zu einer eigenthümlichen Erneuerung der Platonischen Ansicht von der Existenz realer Urbilder der Begriffe geführt hat, indem sie auf verschiedenen Gebieten bemüht war nachzuweisen, dass sogar solche Allgemeinbegriffe, die bis dahin als reine Producte logischer Abstraction betrachtet worden waren, auf Thatsachen zurückführten, die freilich nicht einer transcendenten Welt, wohl aber einer entfernten Vergangenheit der wirklichen Welt angehören sollen. Das abstracte Wirbelthier nimmt in einem hypothetischen Acranier der Primordialzeit concrete Gestalt an, der Begriff der indogermanischen Sprachenfamilie hypostasirt sich zu einer arischen Ursprache. Aus dieser in so verschiedenen Gestalten hervorgetretenen Neigung, begrifflichen Abstractionen eine reale Unterlage zu geben, kann selbstverständlich kein Einwand gegen die genetische Auffassung überhaupt entnommen werden; wohl aber mahnt jene Neigung zur Vorsicht gegenüber denjenigen genetischen Constructionen, die nicht von realen Thatsachen, sondern zunächst nur von Producten unserer Abstraction ausgehen. Diese für sich genommen können, auch wenn sie noch so zweckmässig gebildet sind, immer nur auf bestimmte objective Ursachen unserer Abstractionen hinweisen; um festzustellen, dass diese Ursachen wirkliche Gegenstände seien, dazu ist aber stets ein besonderes Inductionsverfahren erforderlich.

In nahem Zusammenhange mit der Abstraction steht die Benennung der Erscheinungen. Sie ist ein Erzeugniss der Isolation. Denn der Name eines Gegenstands, mag er nun auf dem natürlichen Wege der Sprachbildung entstanden oder aus bestimmten wissenschaftlichen Bedürfnissen erfunden sein, bezeichnet stets ein einzelnes Merkmal. Hieran schliesst sich aber sofort eine Generalisation an, indem der bei einem bestimmten Gegenstand geschaffene Name auf andere ähnliche Gegenstände übertragen wird, die er in eine Gattung zusammenfasst. Wie die Benennung ein Erzeugniss

der isolirenden, so ist sie demnach das wesentliche Hülfsmittel der generalisirenden Abstraction, und in ihrer Entstehungs- und Anwendungsweise spiegelt sich die naturgemässe Aufeinanderfolge jener beiden logischen Operationen. Der Umstand aber, dass die Wissenschaft in der Sprache bereits ein natürlich entstandenes System von Namen für die Objecte und Erscheinungen vorfindet, bringt nicht bloss den grossen Vortheil leichter Verständigung, sondern auch mannigfache Nachtheile mit sich. Nichts begünstigt mehr jene Neigung, die nächsten Abstractionsproducte für wirkliche Dinge zu halten, als das Vorhandensein von Namen, denen jede Spur einer willkürlichen Entstehung verloren gegangen ist. Doch besitzt die Sprache in dem Vorgang des Bedeutungswechsels ein wirksames Mittel, diesen Nachtheil wieder auszugleichen. So ist das Wort Vogel, das ursprünglich alle fliegenden Thiere bezeichnete, in der wissenschaftlichen Bedeutung auf eine bestimmte Classe derselben eingeschränkt worden; umgekehrt haben Bezeichnungen, wie Keim, Ei, Nahrung, Athmung, die Namen für die meisten Organe des Thierkörpers u. s. w., fortschreitende Verallgemeinerungen erfahren, durch die sie sich den Bedürfnissen der wissenschaftlichen Terminologie anpassten. Immerhin bietet es unverkennbare Vortheile dar, wenn die Wissenschaft, wie bei gewissen allgemeineren Gattungsbegriffen oder bei solchen, die eine eindringende wissenschaftliche Untersuchung voraussetzen, in der Lage ist, die Benennungen selbst schaffen zu können. Nur hierdurch ist es z. B. der chemischen Terminologie möglich geworden, an die Namen der Verbindungen zugleich die allgemeinsten Andeutungen über deren Constitution zu knüpfen, so dass jene die Stelle allgemeiner Definitionen vertreten. Dennoch zeigt es sich auch in diesem Fall an den Namen der Elemente, dass die einfachsten Begriffe, selbst wenn sie künstlich gebildet sind, unter dem Einfluss ähnlicher zufälliger Motive stehen wie die natürlichen Benennungen der Sprache.

### b. Die Determination.

Die Determination ist die Umkehrung der Abstraction und setzt daher stets eine vorangegangene Abstraction voraus. Ihre wissenschaftliche Bedeutung beruht aber hauptsächlich darauf, dass sie den Weg der Abstraction in der Regel nicht einfach umkehrt, sondern zugleich in veränderter Weise zurücklegt. Bei der Determination fügen wir nämlich einem durch Abstraction gewonnenen Begriff be-

sondere Merkmale bei, wodurch ein den concreten Thatsachen näher liegender Begriff aus ihm hervorgeht. Dabei brauchen nun nicht nothwendig die nämlichen Elemente wiedereingeführt zu werden, die bei der Abstraction eliminirt worden waren. So sind in der Naturgeschichte und anderen systematischen Wissenschaften die Gattungsbegriffe zunächst aus einzelnen meist zufällig vorgefundenen Exemplaren der Gattung durch Generalisation gebildet, worauf dann bei der Rückkehr vom Gattungsbegriff zu den Arten oder zu den specielleren Thatsachen ausser jenen ursprünglichen auch andere Objecte für die Bildung der Untergruppen massgebend werden. Noch selbständiger verfährt die Umkehrung der Isolation. Nachdem der Geometer die Abstractionen der Geraden, der Ebene u. s. w. vollzogen, versieht er sie durch die Beziehungen, in die er sie zu anderen Vorstellungen bringt, mit näheren Bestimmungen, die von völlig neuer Beschaffenheit sein können. Ebenso lässt sich der Physiker bei der Verbindung eines zuerst isolirt untersuchten Phänomens mit anderen Erscheinungen von selbständigen Gesichtspunkten leiten, ohne eine besondere Rücksicht auf jene Erscheinungen zu nehmen, von denen ursprünglich abstrahirt werden musste. Diese Selbständigkeit der Determination beruht wesentlich darauf, dass sie überall auf die Anwendung der synthetischen Methode sich stützt, die ihrerseits zwar eine Umkehrung der Analyse ist, auf der alle Abstraction beruht, dabei aber doch unabhängig von irgend einem speciellen analytischen Process angewandt werden kann.

Den beiden Formen der Abstraction entsprechen zwei im selben Sinne von einander abweichende Formen der Determination, die wir als Colligation und als Specification unterscheiden können. Die erstere ist die Umkehrung der isolirenden Abstraction. Sie besteht darin, dass man die Veränderungen ermittelt, die an zuerst isolirt untersuchten Theilerscheinungen durch die Verbindung mit anderen Elementen entstehen, welche mittelst einer ähnlichen Abstraction gewonnen sind*). So untersucht die Mechanik zunächst die Bedingungen des Gleichgewichts eines festen Körpers, an dem in bestimmten Richtungen Kräfte angreifen, indem sie bloss seine geometrischen Eigenschaften berücksichtigt, ihn also als absolut unveränderlich in seiner Gestalt voraussetzt, um dann zu ermitteln,

*) Der Ausdruck Colligation ist hier in einem wesentlich anderen Sinne gebraucht als in Whewell's „Philosphy of the inductive sciences“ (Vol. II, p. 201), wo er die Sammlung einzelner Thatsachen bezeichnet, die der Verf. als vorbereitendes Stadium der Induction betrachtet.

wie die unter dieser Annahme festgestellten Bedingungen des Gleichgewichts abgeändert werden, wenn man die in der Elasticität begründete Verschiebbarkeit der Theilchen in Rechnung zieht. So kann ferner der Nationalökonom zuerst den Einfluss der relativen Höhe des Zinsfusses auf die Bewegung des flüssigen Capitals losgelöst von allen begleitenden Umständen untersuchen, um hierauf successiv diese letzteren, wie z. B. den verschiedenen Capitalwerth der einzelnen Ländergebiete, die verschiedene Handelslage u. dergl., einer Mitberücksichtigung zu unterwerfen.

Wesentlich anders verhält sich die Specification, in welcher die generalisirende Abstraction ihre Umkehr findet. Wie schon die letztere an die Vergleichung einer Vielheit von Objecten gebunden ist, so hat auch die Specification wiederum auf dem Wege der Vergleichung des Einzelnen diejenigen Begriffselemente zu finden, die sich zur Bildung der beschränkteren Gattungs- und Artcharaktere geeignet erweisen. Deshalb bewegt sich diese Form der Determination minder frei in der Auswahl der zu beachtenden Erscheinungen; sie ist theils an die Beschaffenheit der Erfahrungsobjecte, theils an die Richtung des vorangegangenen Abstractionsprocesses gebunden. Ueberall aber, wo es sich um eine systematische Ordnung von Begriffen handelt, da findet die Specification ihre Anwendung, also nicht bloss in den verschiedenen Gebieten der Naturgeschichte, sondern auch in der erklärenden Naturwissenschaft, sobald diese zum Zweck der Untersuchung oder Darstellung eine Gliederung ihres Gegenstandes auszuführen sucht, und in ähnlichem Sinne in den hauptsächlichsten Geisteswissenschaften, wo insbesondere die Rechtsbegriffe durch die präcise Form ihrer Determination sich auszeichnen. Aehnlich wie die Colligation der Induction in die Hände arbeitet, indem sie deren mittelst der isolirenden Abstraction gewonnene Grundlagen durch die Mitberücksichtigung begleitender Erscheinungen vervollständigt, so ist die Specification das hauptsächlichste Hülfsmittel der Classification. Denn diese geht von einem Allgemeinbegriff aus, den sie successiv durch eine immer vollständiger werdende Determination in die einzelnen Begriffe zerlegt, die ihm unterzuordnen sind.

Ihr Vorbild findet die Determination als logische Methode in der einfachen Determination der Begriffe (Bd. I, S. 144 u. 251). Sucht man sich aber nicht bloss über das Resultat des logischen Vorgangs, sondern über diesen selbst Rechenschaft zu geben, so lässt er sich auf eine Umkehrung des der Abstraction zu Grunde

liegenden Vergleichungsschlusses zurückführen. Hierbei wird zunächst der Allgemeinbegriff $M_1$ den Objecten übergeordnet, aus denen er ursprünglich abstrahirt worden war, und es werden dann die Begriffselemente einzelner Objecte $A$, $B$, die unter den Begriff $M_1$ fallen, durchgegangen, um irgend welche ihnen gemeinsame Merkmale $M_2$ mit $M_1$ zu verbinden und so einen beschränkteren Begriff $M_1 M_2$ zu bilden, nach dem Schema:

$$\begin{array}{l} M_1 > A,\ B, \\ A < M_1,\ M_2, \\ B < M_1,\ M_2, \\ \hline M_1 > M_1 M_2. \end{array}$$

Dieses Schema lässt sich auf die beiden Grundformen der Determination anwenden. Während aber bei der Specification im allgemeinen die nämlichen Objecte $A$, $B$, $C$ . . ., die zur Abstraction des Gattungsbegriffes $M_1$ gedient haben, auch für die Determination des engeren Begriffes $M_1 M_2$ zur Verwendung kommen, können bei der Colligation völlig andere Objecte $A'$, $B'$, $C'$ . . . herbeigezogen werden, sobald sie nur die Bedingung erfüllen, dass sie dem Allgemeinbegriff $M_1$ entsprechen.

### 3. Induction und Deduction.

#### a. Die logischen Elemente der Induction.

Von Aristoteles wurde die Induction oder ἐπαγωγή dem Syllogismus als eine besondere Schlussweise, welche vom Einzelnen zum Allgemeinen aufsteige, gegenübergestellt. Die Aristotelische Induction besteht aber lediglich in der Zusammenfassung gewisser Specialregeln in einen allgemeineren Ausdruck*). Der die Aristotelische Logik beherrschende Gesichtspunkt der Subsumtion verräth sich überdies darin, dass der gewonnenen Conclusion erst dann eine allgemeine Bedeutung zugestanden wird, wenn in der einen Prämisse Prädicat und Subject vollständig sich decken, so dass das Urtheil umgekehrt und der Schluss in einen solchen der ersten Figur umgewandelt werden kann**).

*) Dies erhellt deutlich aus dem Aristotelischen Beispiel: „Mensch, Pferd, Maulesel sind langlebig; Mensch, Pferd, Maulesel sind gallenlos; also sind gallenlose Thiere langlebig.“ Analytic. poster. II, 23.

**) So entsteht die „vollständige Induction“: „Mensch, Pferd, Maulesel sind langlebig; das Gallenlose ist Mensch, Pferd, Maulesel; also ist das Gallenlose langlebig.“

Indem Baco von der Ueberzeugung ausging, dass alle Erkenntniss auf einzelne Erfahrungen gegründet sei, musste vor allem gegen diese Zurückführung der Induction auf den Subsumtionsschluss seine Polemik sich richten. Der letztere vermag nach ihm höchstens zu zeigen, wie gegebene Sätze zu ordnen sind, niemals aber zu neuen Erkenntnissen zu führen. Solches ist vielmehr die Aufgabe einer wahren Methode der Induction, die darum der syllogistischen Logik um ebenso viel vorzuziehen ist, als die Auffindung der Wahrheiten wichtiger ist als ihre mehr oder minder zweckmässige Anordnung. Auf diese Weise gewinnt bei Baco erst der Begriff der Induction die Bedeutung, die ihm heute noch beigelegt wird *).

Dennoch ist Baco im Irrthum, wenn er meint, das Princip des Syllogismus finde auf seine inductive Methode gar keine Anwendung. Wenn er lehrt, man habe zuerst in einer Tafel der „positiven Instanzen" alle die Fälle zu registriren, in denen eine der Untersuchung unterworfene Erscheinung beobachtet wird, dann eine Tafel der „negativen Instanzen" aufzustellen, in der die den vorigen verwandten Fälle aufgezählt werden, in denen die betreffende Erscheinung fehlt, so haben wir es hier zunächst mit Vergleichungsschlüssen zu thun, denen sich leicht die Form der zweiten Aristotelischen Figur geben lässt. Freilich ist mit diesen Vergleichungen bei Baco die Induction nicht beendet, sondern es entsteht nun erst die Aufgabe zu bestimmen, welche allgemeine Bedingung, oder welcher allgemeine Begriff, von Baco „Form" genannt, den übereinstimmenden Fällen zukommt und in den nicht übereinstimmenden fehlt **). Zu diesem Zweck schreibt Baco vor, den vorangegangenen Tafeln eine dritte, die der „gradweisen Abstufungen" hinzuzufügen, solche Fälle, in denen die untersuchte Erscheinung in quantitativen Unterschieden beobachtet wird. Diese Tafel der Grade bildet eine Art von Vermittelung zwischen den positiven und den negativen Instanzen, da ein Fall $A'$, in welchem $M$ nicht beobachtet wird, gradweise übergehen kann in den Fall $A$, welchem $M$ zukommt. Derartige Unterschiede eignen sich aber nach Baco ganz besonders zur Erkenntniss der „Form" einer Erscheinung. Denn eine Bedingung, in der sich eine positive und eine negative Instanz unterscheiden, wird voraussichtlich für das Wesen der untersuchten

---

*) Baco, Novum organon, Lib. I.

**) Nov. organ. II, 1, 20.

Erscheinung bedeutsamer sein als andere Merkmale. Zum Abschluss der Untersuchung bedarf es daher nur noch der Elimination unwesentlicher Unterschiede, was mittelst der so genannten „Lese“ und der an sie sich anschliessenden Aufstellung der „prärogativen Instanzen“ geschieht, einer Sammlung von Gesichtspunkten, in der neben vielem Unwesentlichen und Irrthümlichen einzelne Lichtblicke vorkommen, in denen gewisse Grundsätze der experimentellen Methodik in bewundernswerther Weise vorausgenommen sind.

Es ist längst bemerkt worden, dass sich die Baconische Induction einer Weitschweifigkeit schuldig macht, die bei den wirklich geübten Inductionen der Wissenschaft niemals vorkommt. In der That waltet in ihr der nämliche Irrthum ob, der die Aristotelische Induction beherrscht: dass nur die vollständige Induction wissenschaftlichen Werth besitze. Dieser Irrthum ist aber bei Baco noch augenfälliger, weil er die Existenz allgemeiner Voraussetzungen, welche die Aufzählung der Fälle von vornherein beschränken könnten, leugnet, so dass bei ihm der Induction die Unmöglichkeit zugemuthet wird, sie solle thatsächlich die Erfahrung erschöpfen. Der zweite Fehler besteht in der Vermengung der Induction mit der Abstraction. Schon der Begriff der „Form“, in deren Nachweisung Baco das Ziel des Inductionsverfahrens erblickt, besitzt die Doppelnatur eines Allgemeinbegriffs und eines allgemeinen Gesetzes. So lehren denn auch die zwei ersten Tafeln seiner Instanzen ein Vergleichungsverfahren, das an sich nur zur Abstraction von Begriffen führen kann. Erst bei den gradweisen und prärogativen Instanzen wird die Gewinnung allgemeiner Sätze über die Erscheinungen zum vorherrschenden Gesichtspunkt.

In beiden Beziehungen hat die neuere inductive Logik, die auf dem Baconischen Standpunkte weiterbaute, und deren Hauptrepräsentant John Stuart Mill ist, die Lehre von der Induction zu verbessern gesucht*). Die Induction wird hier als das Verfahren definirt, durch welches wir erkennen, dass was sich in einzelnen Fällen als wahr bestätigt hat, in allen unter den gleichen Bedingungen eintretenden Fällen wahr sein werde. Sie scheidet sich dadurch ebensowohl von der Begriffsabstraction wie von der so genannten vollständigen Induction, die nichts anderes als die Einführung einer Collectivbezeichnung für eine Anzahl einzelner Thatsachen ist. Die wahre Induction ist nach Mill nicht eigentlich ein

---

*) Mill, System der Logik, 3. Buch, besonders Cap. III—V.

Schluss vom Einzelnen auf das Allgemeine, sondern vom Einzelnen auf das Einzelne, da wir zunächst immer nur in einzelnen den vorangegangenen ähnlichen Fällen auch einen ähnlichen Erfolg erwarten. Es steht aber ein jeder solcher Schluss unter der Voraussetzung, dass der Gang der Natur gleichförmig sei, oder dass unter ähnlichen Umständen immer wieder das Aehnliche eintreten werde. Jede Induction lässt sich daher in die Form eines Syllogismus bringen, in dem jene Voraussetzung die obere Prämisse bildet.

Hier entsteht nun die Frage, wie der oberste Grundsatz aller Inductionen, das Axiom von der Gleichförmigkeit der Natur, selber entstanden sei. Jener Grundsatz ist offenbar nichts anderes als das allgemeine Causalgesetz, und rücksichtlich seiner gibt Mill die Antwort, es sei eine Induction der rohesten Art, eine blosse „inductio per enumerationem simplicem". Dies steht aber mit der Voraussetzung, dass es der gemeinsame Obersatz aller Inductionen sei, im Widerspruch. Mindestens eine Induction muss es dann geben, die auf andere Weise entstanden ist, und consequenter Weise wird man nicht leugnen wollen, dass unter diesen Umständen noch andere Inductionen von dem nämlichen unzuverlässigen Ursprunge sein könnten. Es würden dann alle Inductionen in zwei Formen zerfallen:

| in die strenge Induction: | und in die bloss aufzählende Induction: |
|---|---|
| Unter gleichen Bedingungen treten gleiche Erfolge ein, | |
| unter den Bedingungen *a*, *b*, *c* . . . trat häufig der Erfolg *X* ein, | Unter den Bedingungen *a*, *b*, *c* . . . trat häufig der Erfolg *X* ein; |
| also tritt unter den Bedingungen *a*, *b*, *c* . . . immer der Erfolg *X* ein. | also tritt unter den Bedingungen *a*, *b*, *c* . . . immer der Erfolg *X* ein. |

Da jedoch der Obersatz der strengen Inductionen seinerseits auf einer blossen Aufzählung beruht, so ist der Unterschied beider Formen in Bezug auf ihre Sicherheit nur ein scheinbarer. Dass die hier zu Grunde liegende Auffassung des Causalprincips eine ungenügende sei, wurde früher nachgewiesen. (Bd. I, S. 606.) Ausserdem steht die darauf gebaute Theorie der Induction ebenfalls noch unter dem Bann der Aristotelischen Syllogistik. Die Baconische Forderung einer vollständigen Induction hat sie zwar aufgegeben; dafür verlangt sie, dass jede Induction ein regelrechter Subsumtionsschluss sei, um wenigstens eine formale Sicherheit für sie zu retten.

In verschiedener Weise hat man nun diese formale in eine reale Gewissheit umzuwandeln gesucht. Entweder liess man im Anschlusse

an Kants Kategorienlehre das Causalprincip als eine apriorische Wahrheit gelten, wodurch der Obersatz des Mill'schen Inductionsschlusses seines zweifelhaften Charakters entkleidet wurde, oder man zog es vor zu der Aristotelischen Ansicht zurückzukehren und nur der vollständigen Induction eine vollkommen bindende Kraft zuzugestehen, eine Auffassung die nebenbei leicht mit der vorigen zu vereinigen war*). Unter allen diesen Ansichten, welche die Form des Aristotelischen Syllogismus möglichst für die Induction zu bewahren suchen, wird diejenige der specifisch-logischen Form derselben am meisten gerecht, die jede Induction als eine Umkehrung des gewöhnlichen subsumirenden Syllogismus betrachtet. Denn diese Ansicht erfasst in der That vollkommen richtig das schematische Verhältniss der Induction zu der auf den Subsumtionsschluss zurückführenden Deduction**). Aber sie ist doch nur für den einzelnen Inductionsschluss, nicht aber für die zusammengesetzte Methode der Induction zutreffend. Wir schliessen nämlich in einfachster Form

$$\begin{array}{ccc} \text{inductiv:} & \qquad\qquad & \text{deductiv:} \\ \widehat{SP} & & \widehat{MP} \\ \underline{\widehat{SM}} & & \underline{\widehat{SM}} \\ \widehat{MP} & & \widehat{SP} \end{array}$$

Die elementare logische Form der Induction ist, wie dieses Schema zeigt, der Verbindungsschluss. Er ist am nächsten verwandt dem Vergleichungsschluss, welcher der Methode der Abstraction zu Grunde liegt. Während aber dieser letztere durch Umkehrung in den classificirenden Subsumtionsschluss $\widehat{SM}$, $\widehat{MP}$, $\widehat{SP}$ übergeht, wandelt sich der erstere durch die gleiche Operation in den exemplificirenden Subsumtionsschluss um: $\widehat{MP}$, $\widehat{SM}$, $\widehat{SP}$. (Bd. I, S. 338.) Diese Umwandlungsproducte unterscheiden sich von den ursprünglichen Formen wesentlich dadurch, dass die letzteren mehrdeutige Schlüsse sind. (Ebend. S. 384 ff.) Bei der Abstraction äussert sich diese Mehrdeutigkeit in der freien Auswahl der Merkmale, die zur Constitution des allgemeinen Begriffes bestimmt sind, und ihr äusseres

---

*) So bei Apelt (Theorie der Induction, Leipzig 1854), der übrigens jeden disjunctiven Schluss zur Induction zählt und daher, wie schon früher (Bd. I, S. 373) erwähnt, die Inductions- und Wahrscheinlichkeitsschlüsse zusammenwirft.

**) Jevons, Principles of Science. 2. edit. p. 122, 218. Sigwart, Logik II, S. 250, 356. 2. Aufl., S. 289, 401.

Symptom ist die Willkürlichkeit der Benennung. Bei der Induction kommt sie in der Unbestimmtheit der Beziehung zum Vorschein, die zwischen den im Schlussurteil verbundenen Begriffen besteht. Diese Unbestimmtheit aufzuheben und dadurch zu allgemeinen Sätzen von apodiktischer Geltung zu gelangen, ist die Hauptaufgabe der inductiven Methode.

### b. Die Induction als Methode.

Die inductive Methode bedient sich bei der Lösung ihrer Aufgaben zweier wesentlich von einander verschiedener Verfahrungsweisen. Erstens sucht sie durch eine mannigfach wechselnde Benützung der analytischen und synthetischen Methode die Deutungen der Thatsachen zu beschränken. Zweitens nimmt sie eine einzelne Deutung, die sich ihr als möglich darbietet, hypothetisch als wirklich geltend an, um die daraus sich ergebenden Folgerungen zu entwickeln und an der Erfahrung zu prüfen. Auf diese Weise können successiv verschiedene Hypothesen untersucht werden, damit man schliesslich diejenige zurückbehalte, die sich durch ihre Uebereinstimmung mit den Thatsachen am meisten empfiehlt. Unter diesen beiden Hülfsmethoden gehört nur die erste vollständig der Induction an; die zweite besitzt in ihrem ganzen Verlauf bereits den Grundcharakter der Deduction, und nur insofern, als sie sich in eine zusammenhängende Induction einschiebt und bei der Prüfung der Thatsachen sich durchaus auf inductive Hülfsmittel stützt, kann sie noch zu den Bestandtheilen der Induction gerechnet werden. Immerhin macht dieser Umstand häufig eine scharfe Trennung der beiden Methoden unmöglich, so dass man bei ihrer Unterscheidung zunächst auf die Gesammtrichtung der Untersuchung Rücksicht zu nehmen hat.

Als das Resultat einer Induction ergibt sich stets ein allgemeiner Satz, welcher die einzelnen Thatsachen der Erfahrung die zu seiner Ableitung gedient haben als specielle Fälle in sich enthält. Einen solchen Satz nennen wir ein Gesetz. Wie die Constanz der Objecte unserer Beobachtung die Bedingung ist für die Abstraction von Gattungsbegriffen, so ist die Regelmässigkeit des Geschehens die Bedingung für die Induction von Gesetzen. Aber diese Bedingung spielt weder die Rolle einer Prämisse, die sich an jeder Induction betheiligt, noch begründet sie die Annahme, dass die Absicht einer Subsumtion unter Gesetze allen Inductionen

vorausgehe. Vielmehr ist jene Beschaffenheit der Erfahrungsobjecte so gut wie die Existenz derselben ein thatsächliches Verhalten, welches durch das Gelingen unserer Abstractionen und Inductionen wirklich erprobt werden muss, durch welches Erproben dann erst die weiterhin alle wissenschaftliche Forschung lenkende Maxime des durchgängigen Zusammenhangs der Erfahrungen entsteht. So kommt hier abermals das allgemeine Princip zur Geltung, dass die logischen Gesetze unseres Denkens zugleich die Gesetze der Objecte des Denkens sind. (Bd. I, S. 90, 559.)

Nach dem Grad der Allgemeinheit, welche die durch einzelne Verbindungsschlüsse gewonnenen Gesetze besitzen, können wir nun drei Stufen der Induction unterscheiden: 1) die Auffindung empirischer Gesetze, 2) die Verbindung einzelner empirischer Gesetze zu allgemeineren Erfahrungsgesetzen, und 3) die Ableitung von Causalgesetzen und die logische Begründung der Thatsachen.

Bei der Auffindung empirischer Gesetze entfernt sich der logische Vorgang noch wenig von dem einfachen Verbindungsschlusse, den wir oben als Grundform der Induction kennen lernten. Wie wir jedoch bei der Abstraction der Gattungsbegriffe uns nicht damit begnügen, die Zusammengehörigkeit gewisser Objecte zu behaupten, sondern einen Begriff bilden, in welchem diese Zusammengehörigkeit unmittelbar realisirt ist, so drücken wir bei der Induction sofort die nähere Art der Beziehung, die zwischen den Prädicaten *A* und *B* zweier auf die nämliche Erscheinung *M* sich beziehender Verbindungsurtheile stattfindet, in der Form eines Bedingungsurtheils aus, das auf ein Verhältniss regelmässiger Gleichzeitigkeit oder Aufeinanderfolge hinweist: „Wenn *A* stattfindet, so findet auch *B* statt." Zur Entscheidung der Frage, welches unter den verbundenen Elementen *A* und *B* Bedingung oder Folge sei, besitzen wir zwei Kriterien, die unmittelbar theils aus dem logischen Verhältniss von Grund und Folge, theils aus den früher erörterten anschaulichen Grundlagen des Causalbegriffs sich ergeben. (Bd. I, S. 596.) Das Glied *A* nämlich ist dann Bedingung und nicht Folge, wenn 1) der Eintritt von *A* regelmässig den von *B* mit sich führt, aber nicht umgekehrt, und wenn 2) im zeitlichen Verlauf der Erscheinungen *A* dem *B* vorausgeht oder, falls es sich um permanente Erscheinungen handelt, wenn der ursprüngliche Eintritt von *A* als ein dem *B* vorausgehendes Ereigniss gedacht werden kann. (Bd. I, S. 603.) Trifft der erste Theil des ersten und der letzte Theil des zweiten Kriteriums sowohl für *A* wie

für $B$ zu, so handelt es sich um ein Verhältniss der Wechselwirkung.

Ein auf solche Weise aufgestelltes empirisches Gesetz enthält nun noch keine Causalbeziehung, sondern nur die Aussage über einen regelmässigen räumlichen oder zeitlichen Zusammenhang von Erscheinungen. Dies schliesst nicht aus, dass wir nicht gelegentlich auch solche Gesetze bloss empirisch formuliren, die auf einen Causalzusammenhang zurückgeführt werden können, sobald wir nur aus irgend welchen Gründen von dem letzteren abstrahiren wollen. Wir begeben uns dann aber eigentlich auf einen Standpunkt zurück, welcher der Unterordnung gewisser empirischer Verbindungen unter ein Causalverhältniss vorausging. So in den Beispielen: „Der Fallraum ist beim freien Fall proportional dem Quadrat der Fallzeit", „die Schwingungen eines Pendels sind isochronisch", „die Erde bewegt sich in einer Ellipse um die Sonne". Bei der Aufstellung solcher Gesetze können wir, wie diese Beispiele zeigen, leicht der Form des Bedingungsurtheils entbehren. Wo wir aber die letztere einführen, da geschieht dies regelmässig in solcher Weise, dass als Bedingung lediglich die Constellation von Umständen angeführt wird, unter denen eine bestimmte Thatsache zur Beobachtung kommt.

Die Verbindung einzelner empirischer Gesetze zu allgemeineren Erfahrungsgesetzen besteht in der Herstellung einer allgemeinen Form, die mehrere einzelne empirische Gesetze als Specialfälle unter sich begreift. Während sich die erste Auffindung dieser Specialgesetze auf mannigfache Anwendungen der analytischen und synthetischen Methode stützt, so beruht die Gewinnung allgemeinerer Erfahrungsgesetze auf einem Abstractionsverfahren, das sich als eine eigenthümliche Form der Generalisation darstellt. Ganz in derselben Weise wie die Generalisation von Begriffen zu allgemeineren Gattungsbegriffen, so führt die Generalisation einzelner empirischer Gesetze zu allgemeineren Erfahrungsgesetzen. Auch die hierzu erforderlichen logischen Operationen sind von verwandter Art. Denn die Generalisation der Gesetze eliminirt die variablen und darum minder allgemeinen Bestandtheile der einzelnen Gesetzmässigkeiten, um die constanten und gemeinsamen zurückzubehalten. So sind das Boyle'sche Gesetz der Reciprocität von Druck und Volum der Gase sowie das Gesetz, dass sich die Gase nach einfachen Volumverhältnissen chemisch verbinden, durch eine Verallgemeinerung der für die einzelnen Gase festgestellten Volumgesetze entstanden. Die beiden ersten Kepler'schen Gesetze sind

Generalisationen aus den Bewegungsgesetzen der einzelnen Planeten, während das dritte Gesetz, das sich auf das Verhältniss der Umlaufszeiten zu den mittleren Entfernungen von der Sonne bezieht, aus einer Anzahl von Einzelgesetzen abstrahirt ist, die durch Vergleichung der Umlaufszeiten und Entfernungen je zweier Planeten gewonnen wurden.

Die Aufstellung empirischer Gesetze in den bisher besprochenen beiden Stadien ihrer Entwicklung vollzieht sich in genauem Anschlusse an beobachtete Thatsachen. Die Gesetze enthalten in ihrem Ausdruck nur eine Verallgemeinerung des Zusammenhangs der Thatsachen selbst, ohne dass denselben ein weiterer Begriff hinzugefügt wäre. Sie weichen nur darin von den Thatsachen ab, dass in beiden Stadien eine wesentliche Betheiligung des Abstractionsverfahrens stattfindet, da bereits bei den einfachen empirischen Gesetzen von den Schwankungen der einzelnen Beobachtungen und dann bei den durch Generalisation gewonnenen wiederum von den Besonderheiten der einzelnen empirischen Gesetze abstrahirt ist. Bloss insofern lässt sich ein principieller Einfluss auf dieses Abstractionsverfahren nachweisen, als sich durchweg das Bestreben geltend macht, die einzelnen Beobachtungen zu Gunsten möglichst regelmässiger allgemeiner Beziehungen zu verbessern. Aber so zweifellos es ist, dass der Feststellung der meisten Erfahrungsgesetze die Voraussetzung einer bestimmten Regelmässigkeit bereits voranging, so boten sich doch anderseits für diese Voraussetzung in den einfachsten Formen des Geschehens hinreichende Anhaltspunkte, um dieselbe zugleich vom empirischen Standpunkte aus als gerechtfertigt erscheinen zu lassen; und oft genug musste im einzelnen die vorschnelle Formulirung eines Gesetzes wieder aufgegeben werden, weil die genaue Controle der Beobachtungshülfsmittel keine genügende Uebereinstimmung mit den Thatsachen erzielen liess, so dass dennoch schliesslich die Erfahrung als die allein entscheidende Instanz für die Gültigkeit eines Erfahrungsgesetzes stehen bleibt.

Dieser Standpunkt wird nun verlassen bei der Ableitung von Causalgesetzen. Denn hier wird stets dem Ausdruck der beobachteten Thatsachen, den das Erfahrungsgesetz enthält, ein Begriff hinzugefügt, welcher selbst nicht in der thatsächlichen Beobachtung gegeben ist, aber geeignet erscheint, gewisse in regelmässiger Beziehung stehende Thatsachen zusammenzufassen. Der so ergänzte Begriff ist eine Specialisirung des allgemeinen Causalbegriffs, und er verleiht daher dem betreffenden Gesetze den Cha-

rakter eines speciellen Causalgesetzes. Insofern die Formulirung des letzteren, eben deshalb weil sie über den Thatbestand unmittelbarer Erfahrung hinausgeht, stets mit einer gewissen Willkür geschieht, die andere Formulirungen nicht absolut ausschliesst, ist dieser Vorgang durchaus demjenigen verwandt, in welchem die Abstraction von Gattungsbegriffen in Folge der willkürlichen Bevorzugung bestimmter Gattungsmerkmale sich abschliesst. Auch bei der Induction von Causalgesetzen prägt sich dieser Charakter in der Willkür der Benennung der gewonnenen Causalbegriffe aus, an welche sodann die Causalgesetze in Form von Definitionen solcher Begriffe sich anschliessen. So ergab sich für Newton aus den Kepler'schen Gesetzen die causale Definition der Gravitation als einer von der Sonne ausgehenden und auf alle Planeten nach dem umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernungen wirkenden Kraft, oder für Dalton aus dem empirischen Gesetz der Verbindung nach festen Gewichtsverhältnissen die causale Definition der chemischen Affinität als einer zwischen Atomen von constanten Eigenschaften stattfindenden und bestimmte Lagerungsverhältnisse derselben herbeiführenden Anziehungskraft. Da alle Naturcausalität zurückbezogen wird auf die materielle Substanz als ihren Träger, so ist diese Aufstellung von Causalgesetzen unmittelbar verbunden mit der Entwicklung bestimmter Kraftbegriffe. Für jeden der letzteren sucht man womöglich ein fundamentales Kraftgesetz zu gewinnen, aus dem die einzelnen causalen und empirischen Gesetze eines bestimmten Gebietes abgeleitet werden können. Wie aber das Streben nach Verbindung des Mannigfaltigen schon bei den empirischen Gesetzen zur Abstraction allgemeiner Erfahrungsgesetze führte, so veranlasst es hier zur Aufsuchung allgemeinerer Kraftbegriffe und ihnen entsprechender Causalgesetze.

Den physischen Causalgesetzen, auf welche die naturwissenschaftliche Induction hinleitet, stehen im Gebiete der Geisteswissenschaften psychische Causalgesetze gegenüber. Es ist aber charakteristisch, dass hier dieser letzte Schritt des Inductionsverfahrens nur von der Psychologie selbst geschehen kann, während die von ihr abhängigen Gebiete, wie die Gesellschaftslehre, Sprachwissenschaft, Mythologie u. s. w., bloss zur Aufstellung empirischer Gesetze gelangen, die erst eine causale Form annehmen, wenn sie einem der reinen Psychologie angehörigen Causalgesetze subsumirt werden. So kann z. B. durch statistische Ermittelungen festgestellt sein, dass mit der Erhöhung der Getreidepreise die Zahl der Ge-

burten und Eheschliessungen abnimmt. Die Zurückführung dieser empirischen Regel auf ein Causalgesetz ist aber nur möglich, insofern man dieses etwa als einen speciellen Fall des allgemeinen psychologischen Gesetzes betrachtet, dass, sobald in unserm Bewusstsein ein einzelner Trieb, wie der Selbsterhaltungstrieb, über seine normale Intensität gesteigert wird, die übrigen Triebe eine Abnahme erfahren. Es entspricht übrigens dieses Verhältniss durchaus demjenigen der Naturwissenschaften zur Physik, wenn man die Aufgabe der letzteren in jenem allgemeinen Sinne bestimmt, in welchem Chemie und Biologie ihre Theile bilden. Auch schliesst dasselbe keineswegs aus, dass Thatsachen, die den speciellen Geisteswissenschaften angehören, die Auffindung psychologischer Causalgesetze veranlassen. Nur ist zur Aufstellung dieser immer die subjective Erfahrung ein nothwendiges Erforderniss.

Vermöge jener Willkür, die bei der Aufstellung der Causalgesetze stattfindet, enthalten diese stets ein hypothetisches Element, das um so deutlicher hervorzutreten pflegt, von je allgemeinerem Charakter sie sind. Dass die Planeten von der geradlinigen Bewegung in der Richtung gegen die Sonne hin abweichen, ist eine Thatsache der Erfahrung; dass aber diese Abweichung durch eine von der Sonne ausgehende Anziehungskraft vermittelt wird, ist eine hypothetische Voraussetzung. Auf diese Weise ist in einem Causalgesetz immer dasjenige Thatsache der Erfahrung, was dem empirischen Gesetz angehört, aus dem es hervorging. Aber der logische Nutzen der causalen Formulirung ergibt sich daraus, dass dieselbe auch dem empirischen Inhalt des Gesetzes eine einfachere und allgemeinere Gestalt gibt, wie dies die Vergleichung der Kepler'schen Gesetze mit dem Newton'schen deutlich macht. Jener hypothetische Charakter veranlasst ausserdem, nach weiteren Hypothesen zu suchen, die entweder zur Veranschaulichung der Erscheinungen oder zur Vereinfachung der Erklärungen dienlich sind. So liegt es z. B. nahe, der Gravitationskraft ein materielles Substrat zu leihen, dessen Bewegungen die Fernewirkungen der Weltkörper veranschaulichen. Auf diese Weise sind überhaupt alle Annahmen über die Materie und ihre Bewegungsformen Hypothesen, die unmittelbar aus Anlass bestimmter Causalgesetze und zum Behuf einer tieferen Begründung und theoretischen Verwerthung derselben aufgestellt wurden.

Eine weitere wichtige Folge der theilweise hypothetischen Natur der Causalgesetze ist es, dass sie Sätze aufzustellen erlaubt,

die auch in Bezug auf den Inhalt der unter ihnen enthaltenen Erfahrungsgesetze noch hypothetisch, aber einer Prüfung zugänglich sind, durch welche dann die Causalgesetze selbst bestätigt werden können. So hat Galilei die Fallgesetze nicht durch Induction gefunden, sondern theils bediente er sich dabei der isolirenden Abstraction, indem er alle begleitenden Nebenumstände der Versuche in seiner Anschauung des Vorgangs zu eliminiren wusste; theils bestand sein Verfahren in der Erfindung von Hypothesen und in der Vergleichung der Folgerungen aus diesen Hypothesen mit der Erfahrung. In allem dem findet die innige Beziehung der Deduction zur Induction ihren Ausdruck. Fast immer sucht die erstere das Geschäft der letzteren abzukürzen, indem sie sich namentlich an der Entwicklung causaler Gesetze aus einzelnen empirischen Gesetzen betheiligt; zuweilen tritt sie aber auch, wie das letzte Beispiel zeigt, von Anfang an für sie ein, indem eine auf die unmittelbare Abstraction aus der Wahrnehmung gegründete Annahme zu deductiven Entwicklungen Anlass geben kann, durch deren nachträgliche Bestätigung dann die ursprünglich fehlende Induction ersetzt wird.

### c. Die Deduction.

Die deductive Methode kann entweder an eine vorangegangene Induction anknüpfen oder unabhängig von einer solchen als selbständiges Verfahren auftreten. Weder aber pflegt sie im ersten Fall in einer blossen Umkehrung zu bestehen, da sie in der Regel zu Nebenresultaten führt, die nicht durch die vorangegangene Induction gefunden wurden; noch fehlt im zweiten Fall ganz und gar die inductive Grundlage, sondern diese gehört entweder den gewöhnlichen Thatsachen der Sinneswahrnehmung oder einem anderen Gebiet wissenschaftlicher Untersuchungen an. Nicht selten würden an sich für die Gewinnung eines gegebenen complexen Resultates beide Wege, der inductive und der deductive, möglich sein, und es hängt dann von zufälligen Ausgangspunkten und Gedankenrichtungen ab, welcher von ihnen wirklich gewählt wird. So hat Galilei die Fallgesetze durch Deduction gefunden; eine inductive Entdeckung derselben würde sich aber ebenso leicht denken lassen. Umgekehrt ist Newton zu dem Gravitationsgesetz durch Induction gelangt; es wäre aber ebenso gut möglich gewesen, dass er es zuerst als Hypothese aufgestellt und dann daraus die Kepler'schen Gesetze deducirt hätte, wie solches gegenwärtig in der theoretischen Astro-

nomie zu geschehen pflegt. In der That hat Newton selbst schon bei einer einzelnen für seine Theorie sehr wichtigen Frage den Weg der Deduction eingeschlagen, bei der Frage nämlich, ob die Kraft, die den Mond von der geradlinigen Bahn abzieht, mit der irdischen Schwere identisch sei*).

Die Deduction hat vor der Induction in allen Fällen den Vorzug, dass sie sofort alle Folgerungen aus den an die Spitze gestellten Principien ableiten kann, während bei der Induction häufig, wie das zuletzt angeführte Beispiel zeigt, sehr wichtige Resultate durch hülfsweise eintretende Deductionen nachgeholt werden müssen. Hieraus erklärt sich das durchgängig namentlich in den Naturwissenschaften hervorgetretene Streben, die Deduction zur bevorzugten Methode zu erheben. Ausserdem hat in diesem Fall das Beispiel der Mathematik und der abstracten Mechanik mitgewirkt, in denen die Induction wegen der einfachen Anschauungsgrundlagen, die hier massgebend sind, verhältnissmässig zurücktritt. Dagegen besitzt die inductive vor der deductiven Methode den nicht zu unterschätzenden Vorzug, dass sie die hypothetischen Causalgesetze, in denen schliesslich beide Methoden gipfeln, gründlicher vorbereitet, und dass sie daher den bei einseitig gepflegter Deduction namentlich gegenüber verwickelteren Problemen so oft begangenen Fehler unzureichender Voraussetzungen vermeiden hilft. Es ist charakteristisch, dass aus diesem Grunde, in diametralem Gegensatze zu der gegenwärtigen Tendenz der Naturforschung, auf manchen Gebieten der Geisteswissenschaften der Ruf nach einer umfassenderen Anwendung der Induction laut geworden ist. Besonders innerhalb der nationalökonomischen und historischen Forschung liegt es nahe, von einzelnen beschränkten Erfahrungen aus und unter Zuhülfenahme allgemein anerkannter psychologischer Thatsachen eine Deduction zu versuchen. Es ist daher begreiflich, dass hier zunächst diese überwiegt, und dass erst allmählich das Bedürfniss nach einer gründlicheren Anwendung der inductiven Methode rege wird.

Da die Deduction, mag sie nun eine Umkehrung einer vorangegangenen Induction sein oder nicht, regelmässig mit denjenigen Gesichtspunkten anfängt, bei denen die Induction aufzuhören pflegt, so bildet bei ihr die Aufstellung causaler oder logischer Beziehungen den Ausgangspunkt der Entwicklung. Von diesem Ausgangspunkt ist der Verlauf der Deduction abhängig, die demnach

*) Mathemat. Principien der Naturphilosophie, 3. Buch, 1. Abschnitt.

entweder einen causalen oder einen rein logischen Charakter besitzt. Diese Unterscheidung trifft jedoch mehr die äussere Gestalt als das Wesen der Methode. Denn wie das Causalprincip überhaupt sich betrachten lässt als eine Anwendung des logischen Satzes vom Grunde auf den Inhalt der Erfahrung, so ist auch die causale Deduction lediglich eine Verbindung causaler Gesetze durch Schlussoperationen, wobei sich dann jene durch diese in Erkenntnissgründe für die empirischen Erscheinungen umwandeln. Am augenfälligsten wird dies, wenn die causale Deduction eine mathematische Einkleidung zulässt, wie solches z. B. im Gebiete der theoretischen Physik der Fall ist. Die abstracte Form, die hierbei die Naturgesetze annehmen, würde ebenso gut auf einen rein logischen Zusammenhang von Grössenbegriffen bezogen werden können. So bleibt als der wesentliche Unterschied beider Fälle nur das verschiedene Anwendungsgebiet übrig, indem die causale Deduction in den Erfahrungswissenschaften, die logische dagegen in den reinen Anschauungs- und Begriffswissenschaften die herrschende ist.

Bedeutsamer sind die Unterschiede, die aus der verschiedenen Richtung der logischen Operationen entspringen. Ihnen entsprechen zwei Hauptmethoden, die wir als die synthetische und als die analytische Deduction unterscheiden können. In der ersten herrscht die Synthese, in der zweiten die Analyse als elementare Methode vor. Die Namen dieser Hauptformen weisen daher zugleich schon auf einen beachtenswerthen Unterschied der Deduction von der Induction hin. Während in dieser Analyse und Synthese in wechselnder Weise, wenn auch in der Regel mit einem gewissen Uebergewicht der ersteren, zur Anwendung kommen, pflegt die Deduction an der einen oder der anderen vom Anfang bis zum Ende festzuhalten. Hierin verräth sich der auch sonst zur Geltung kommende strengere Gang des deductiven Verfahrens. Die synthetische Deduction ist aber hier voranzustellen, weil die Synthese bei der Deduction, im Gegensatze zu ihren sonstigen Anwendungen, als das näher liegende und daher im ganzen ursprünglichere Hülfsmittel angesehen werden muss.

Die synthetische Deduction geht von einfachen Sätzen von allgemeiner Geltung aus und leitet aus deren Verbindung andere Sätze von speciellerem und meist zugleich verwickelterem Charakter ab. Zu dieser Ableitung dient ihr der Subsumtionsschluss, theils in seiner einfachen kategorischen Form, theils aber und vorzugsweise häufig in der Gestalt des subsumirenden Bedingungsschlusses. Regel-

mässig sind es verwickelte syllogistische Formen, auf die in dieser Weise die synthetische Deduction zurückführt: Kettenschlüsse und Schlussverzweigungen, deren Conclusionen oft zu neuen Schlüssen verbunden werden, um das gewünschte Resultat zu erzielen. Die synthetische Deduction ist aber nicht bloss, wie es nach dieser äusseren Beschreibung scheinen könnte, eine zusammengesetzte Form des subsumirenden Syllogismus, sondern ihre fruchtbare Anwendung beruht vor allem auf einigen weiteren Eigenschaften, die sich zwar nicht so leicht wie die übrigen in allgemeingültiger Weise schildern lassen, die aber gerade deshalb, weil sie in einer sehr wechselnden, überall den besonderen Bedingungen sich anpassenden Form zur Geltung kommen, die methodischen Vorzüge dieser Deduction ausmachen. Namentlich sind hier zwei Eigenschaften hervorzuheben. Die erste besteht in dem verschiedenartigen Charakter der allgemeinen Sätze, welche als Prämissen der Deduction dienen, die andere in den Hülfsverfahren, deren jede Deduction bedarf.

Die Prämissen der synthetischen Deduction bestehen zur einen Hälfte in exacten Beschreibungen oder Erklärungen der Begriffe oder Thatsachen, auf die sich die Deduction bezieht, zur anderen in Erklärungen über bestimmte Relationen von allgemeingültiger Art, die zwischen den in Betracht kommenden Begriffen oder Thatsachen bestehen. Die Sätze der ersten Art werden innerhalb der systematischen Darstellungsformen der Deduction als Definitionen, die der zweiten als Theoreme oder als Axiome bezeichnet, wobei man unter den letzteren speciell solche Theoreme versteht, die nicht aus anderen abgeleitet werden können, sondern als ursprünglich in der Anschauung oder in den Eigenschaften der Begriffe gegebene Relationen gelten müssen. Ist die Deduction eine principielle, d. h. setzt sie in keiner Beziehung vorangegangene Deductionen voraus, so scheiden sich demnach ihre Prämissen regelmässig in Definitionen und Axiome. Keiner dieser Bestandtheile kann entbehrt werden. Eine Schlussfolgerung aus lauter Definitionen oder aus lauter Axiomen ist keine methodische Deduction mehr, sondern ein gewöhnlicher Syllogismus oder Kettenschluss, da in diesem Falle regelmässig auch jene Hülfsverfahren unmöglich werden, die das zweite Kennzeichen der synthetischen Deduction ausmachen. Hierin zeigt sich zugleich, dass diese beiden Eigenschaften nothwendig zusammenhängen. Fallen sie hinweg, so bleibt bloss die formale Aussenseite des syllogistischen Verfahrens zurück, welches an sich nur eine Unterordnung gegebener Sätze unter andere gegebene Sätze oder eine Umformung vermittelst

der Substitution äquivalenter Begriffe, niemals eine Deduction neuer Sätze gestattet. Wohl aber kann es vorkommen, dass Definitionen oder selbst Axiome nicht ausdrücklich formulirt, sondern stillschweigend vorausgesetzt werden. Dies geschieht namentlich bei geläufigen Anschauungen oder Begriffen, deren Definitionen man als bekannt annimmt, oder in Bezug auf die Axiome bei Sätzen, die sich durch eine nahe liegende Umformung aus den vorhandenen Definitionen ergeben. Ein nicht seltener Fall endlich ist es, dass einzelne der als Grundlagen der Deduction dienenden Definitionen oder Axiome einen hypothetischen Charakter besitzen, sei es nun, dass sie auf willkürlicher Begriffsbildung beruhen, wie in manchen Gebieten der speculativen Mathematik, sei es, dass sie aus dem Bedürfniss hervorgegangen sind, für gewisse empirische Thatsachen eine verknüpfende Voraussetzung zu finden, wie solches in den Theorien der Erfahrungswissenschaften gewöhnlich stattfindet. Es versteht sich von selbst, dass dann auch die Resultate der Deduction hypothetisch werden; doch kann im zweiten der angeführten Fälle die Vergleichung mit der Erfahrung oder mit parallel laufenden Inductionen die Folgerungen und dadurch indirect die ursprünglichen Voraussetzungen bestätigen.

Als Hülfsverfahren der synthetischen Deduction können Begriffsanalysen, Constructionen und experimentelle Verfahrungsweisen in Anwendung kommen. Unter ihnen schliesst sich die Begriffsanalyse am nächsten an den unmittelbaren Gang der Deduction selbst an, indem sie lediglich durch Zerlegung eines in dem Schlussverfahren verwendeten Begriffs die Gewinnung bestimmter Resultate vermittelt. Ihrer Hülfe bedienen sich naturgemäss vorzugsweise Wissenschaften von streng begrifflichem und logischem Charakter, wie Philosophie und Rechtswissenschaft, wogegen die Construction eine anschauliche Darstellung der Begriffe und das Experiment sogar empirisch gegebene Objecte voraussetzt, deren gegenseitige Beziehungen wir willkürlich verändern können. Die Construction ist daher das hauptsächlichste Werkzeug der mathematischen Deduction. Sie besteht hier nicht nur in den mannigfaltigen Formen der geometrischen Construction, sondern in einem weiteren Sinne sind ihr auch alle die Verfahrungsweisen der Analysis unterzuordnen, bei denen man Hülfsgrössen und Hülfsfunctionen zur Lösung bestimmter Probleme anwendet. Denn da sich diese Operationen mit Hülfe geometrischer Constructionen veranschaulichen lassen, so können sie selbst als logische Formen der Construction betrachtet werden, sobald man den

Begriff der letzteren so erweitert, dass er nicht nur die willkürliche Erzeugung und Combination von Gebilden der reinen Anschauung, sondern auch von Begriffen, die solchen Gebilden entsprechen, enthält. Der Construction nahe verwandt ist endlich das experimentelle Verfahren. Insbesondere theilen beide mit einander das Merkmal der *Willkür*, der freilich durch die objectiven Bedingungen dort der Gesetze der Anschauung, hier der Erfahrung bestimmte Schranken gesetzt sind. Ein Unterschied des experimentellen Verfahrens von der eigentlichen Construction liegt aber darin, dass diese Schranken bei jenem engere sind als bei dieser. Denn die Erfahrung ist nicht nur auf das strengste gebunden an die unveränderlichen Gesetze der Anschauung, sondern sie wird auch ausserdem von dem nach Ort und Zeit veränderlichen Inhalt dieser Anschauung bestimmt. Das Experiment vermag daher nur theils Erscheinungen herbeizuführen, deren Verlauf den objectiv gegebenen Bedingungen überlassen bleibt, theils aber auch in einen gegebenen Verlauf von Ereignissen durch die Veränderung dieser Bedingungen verändernd einzugreifen.

Die *analytische Deduction* besitzt entweder einen *rein logischen* oder einen *causalen* Charakter. Das erstere ist der Fall in den reinen Anschauungs- und Begriffswissenschaften, das letztere in den Erfahrungswissenschaften. Hier wie dort gehen der analytischen Deduction synthetische Operationen voraus, die, theils in genetischen Constructionen theils in der Verbindung einzelner Wahrnehmungen bestehend, das Material für die nachfolgende Deduction herbeischaffen. Für diese selbst ist die allgemeine Bezeichnung der Begriffe, wie sie aus der algebraischen Symbolik in alle Gebiete der Mathematik und ihrer empirischen Anwendungen übergegangen ist, ein besonders wirksames Hülfsmittel. Denn indem sie die Beziehungen der Einzelbegriffe und die Schlussoperationen, die sich aus denselben ergeben, deutlich übersehen lässt, legt sie von selbst eine Form der Deduction nahe, bei der sich alle Ergebnisse als Folgerungen darstellen, die in den anfänglich aufgestellten Sätzen bereits enthalten sind und daher zu ihrer Gewinnung nur einer geeigneten Analyse dieser Sätze bedürfen. Eine deductive Analyse dieser Art umfasst aber, wie namentlich das Beispiel der Mathematik zeigt, *drei* wesentlich verschiedene Operationen, die in der mannigfaltigsten Weise in einander eingreifen können.

Die *erste* dieser Operationen besteht in der *Zerlegung eines allgemeinen Begriffs in seine Bestandtheile*. Wenn die Be-

griffszerlegung schon bei der synthetischen Deduction als ein wichtiges Hülfsverfahren in Anwendung kommt, so ist sie bei der analytischen um so unentbehrlicher, als hier zum grossen Theil auf ihrer vorwaltenden Benützung der analytische Charakter der Methode beruht. In der Zerlegung eines arithmetischen Ausdrucks in seine Factoren, einer Function in eine Reihe oder in eine Anzahl elementarerer Functionen, eines complexen Bewegungsgesetzes in eine Anzahl einfacherer Gesetze, eines zusammengesetzten Rechtsbegriffs in die ihn constituirenden Elemente begegnen uns verschiedenartige Beispiele dieses Verfahrens.

Als zweite Fundamentaloperation schliesst sich hieran der Uebergang von einem allgemeinen zu einem in ihm enthaltenen engeren Begriffe oder von einem allgemeinen Gesetze zu einem speciellen Fall desselben. So entwickelt die analytische Deduction aus dem Begriff der bürgerlichen Gesellschaft den des Staates, aus der allgemeinen Form des Newton'schen Potentials den Begriff des elektrischen Potentials u. dergl. In der mathematischen Symbolik vollzieht sich ein derartiger Uebergang stets in der Form einer Substitution einzelner bestimmter Werthe für solche, die in dem allgemeinen Ausdruck der Begriffe unbestimmt gelassen sind. Den Charakter der Analyse besitzt dieses Verfahren, insofern auch hier der durch dasselbe gewonnene engere Begriff in dem ursprünglich gegebenen enthalten ist. Der Unterschied von der einfachen Begriffszerlegung liegt aber darin, dass die Analyse in diesem Fall erst durch die begleitende Substitution ermöglicht wird.

Die dritte, häufig mit der vorigen nahe verbundene Operation besteht endlich in der Transformation gegebener Begriffe mittelst einer veränderten Verbindungsweise ihrer Elemente, wobei die neue Verbindung in der ursprünglichen vorgebildet sein muss, so dass sie aus ihr durch eine Reihe zwingender Schlussfolgerungen abgeleitet werden kann. So gewinnt man mittelst passender Transformationen arithmetischer Gleichungen die in ihnen enthaltenen unbekannten Grössen. Eine Gleichung, die analytischer Ausdruck einer geometrischen Curve oder eines allgemeinen Naturgesetzes ist, lässt durch solche Transformationen andere Ausdrücke entstehen, aus deren Interpretation sich specielle Eigenschaften der vorgelegten Curve oder einzelne Folgesätze des betreffenden Naturgesetzes ergeben. Nicht selten tritt zu dieser Transformation noch eine Combination verschiedener Begriffe, die gewisse Elemente mit

einander gemein haben, hinzu: man combinirt z. B. die Gleichungen zweier Curven, um daraus die Bedingungen für deren Schnitt- und Berührungspunkte abzuleiten, oder man verbindet mehrere einfache Bewegungsgesetze, um eine zusammengesetzte Bewegungsform zu gewinnen. Handelt es sich bei diesem Combinationsverfahren um ein Hereinragen der synthetischen Methode in die analytische Deduction, so ist dagegen das Transformationsverfahren an und für sich, ebenso wie das Substitutionsverfahren, lediglich als eine unter speciellen Nebenbedingungen stattfindende Begriffszerlegung aufzufassen. Diese Nebenbedingungen bestehen hier darin, dass erst die Ausführung bestimmter Aenderungen in der Anordnung der Begriffselemente, welche in der Natur derselben ihre Rechtfertigung finden, die für die Deduction erforderlichen Schlussoperationen ermöglicht.

Die analytische Deduction eignet sich ihrem ganzen Charakter nach vorzugsweise für solche Gebiete, bei denen die Untersuchungsobjecte von zusammengesetzterer Beschaffenheit nicht in dem Auftreten neuer Elemente der Erkenntniss ihre Quelle haben, sondern lediglich durch eine mehrfache Anwendung gewisser gleichförmig wiederkehrender logischer Operationen aus den einfacheren hervorgehen. Auf keinem Gebiet trifft diese Bedingung vollkommener zu als auf dem der Mathematik. Von ihr aus hat sich dann die analytische Deductionsmethode auf die Behandlung physikalischer Probleme übertragen, die aber insoweit nur mathematische Probleme sind, als man sich bei ihrer Untersuchung auf die Betrachtung des formalen Verlaufs der Naturvorgänge beschränkt. Das Mittelglied zwischen der reinen Mathematik und der theoretischen Physik bildet hier die Mechanik, deren verwickeltere Aufgaben aus denselben Gründen wie diejenigen der Geometrie eine analytische Behandlung erfordern, und die in ihrer abstractesten Form als eine analytische Geometrie erscheint, welche durch die Dimension der Zeit ergänzt ist. Die analytische Mechanik zerlegt erstens jede Bewegung in die Componenten der Geschwindigkeit und der Beschleunigung nach bestimmten Coordinatenrichtungen, und sie zerlegt zweitens die Bewegungen eines Körpers in die Bewegungen eines Systems von Punkten, das man dem Körper substituirt denkt. Auf diese Weise enthalten die allgemeinen Bewegungsgleichungen eines Systems die sämmtlichen begrifflichen Elemente, in welche sich die Bewegung zerlegen lässt, sammt den wechselseitigen Beziehungen derselben.

In den Geisteswissenschaften herrscht vermöge der verwickelten Beschaffenheit ihrer Probleme die analytische Deduction

vor. So pflegt eine Rechtsdeduction in der Zerlegung irgend eines der Beurtheilung unterbreiteten Thatbestandes zu bestehen, wobei zugleich nachgewiesen wird, dass bestimmte Rechtsdefinitionen auf die einzelnen Thatsachen Anwendung finden. Die Erscheinungen des wirthschaftlichen Verkehrs erklärt man, indem man den Conflict und die Selbstregulirung der egoistischen Interessen als deren bedingende Elemente aufzeigt; ein historisches Ereigniss deducirt man theils aus den Willensmotiven der massgebenden Individuen, theils aus den Förderungen und Widerständen, welche dieselben in den allgemeinen Bedingungen der Gesellschaft vorfanden. Wenn die Deduction in diesen Fällen vielfach Lücken darbietet und des zwingenden Charakters entbehrt, so beruht dies darauf, dass die Probleme der Geisteswissenschaften vermöge ihrer complexen Beschaffenheit der eindringenden Analyse unbesiegbare Schwierigkeiten entgegensetzen. Es wird daher überhaupt nur möglich, sie der Analyse zu unterwerfen, indem man sich theils hypothetische Voraussetzungen gestattet theils aber ein weitgehendes Abstractionsverfahren ausübt, bei welchem es nicht selten dahingestellt bleiben muss, ob dabei nicht auch von solchen Bedingungen abstrahirt worden sei, die für den Zusammenhang der zu erklärenden Erscheinungen von wesentlicher Bedeutung sind.

---

## Zweites Capitel.

## Die Formen der systematischen Darstellung.

### 1. Die Definition.

Untersuchung und Darstellung greifen in ihrer wissenschaftlichen Anwendung fortwährend in einander ein. Keineswegs lassen sie daher in dem Sinne sich scheiden, dass die erstere völlig abgeschlossen sein müsste, wenn die zweite beginnen soll. Wohl aber setzt jede systematische Darstellung voraus, dass eine Reihe von Begriffen durch vorangegangene Untersuchungen zureichend festgestellt sei, um einerseits die wünschenswerthe Abgrenzung der einzelnen Gebiete zu ermöglichen, und um anderseits für die Fortführung der Untersuchung die erforderlichen Grundlagen darzubieten.

Diese Aufgabe erfüllt die Definition. Sie ist die elementarste unter den systematischen Formen, weil Classification und Beweisführung auf ihr weiterbauen, und sie steht ihrer thatsächlichen Entstehung nach mitten inne in dem Verlauf der inductiven Forschung. Denn jedes Resultat der letzteren sucht in einer zureichenden Begriffsbestimmung seinen Abschluss zu finden, damit dann an diese die Deduction anknüpfen könne.

Dieser Doppelstellung entspricht die Natur der Definition. Als systematische Form sucht sie einen gegebenen Begriff auf das schärfste von den verwandten Begriffen zu trennen; als nächstes Ergebniss einer Untersuchung, welcher die Begrenzung der Begriffe erst zu einem tieferen Eindringen in den Gegenstand verhelfen soll, kann sie nicht das Wesen dieses Gegenstandes erschöpfend bestimmen wollen, sondern sie muss sich mit der Hervorhebung derjenigen Elemente begnügen, welche zur sicheren Unterscheidung zureichend sind. Die Definition bildet aber in doppelter Weise die Grundlage für die Weiterführung der Untersuchung: einmal durch sich selbst, insofern die klare Feststellung der charakteristischen Elemente eines Begriffs für die Untersuchung desselben und seines Verhältnisses zu anderen Begriffen ein wesentliches Erforderniss ist, und sodann durch die nahe Beziehung, in der die Definitionen zu den Grundsätzen stehen, auf welche die Deduction die einzelnen Theoreme zurückzuführen sucht. Diese Beziehung stellt sich wieder in einer doppelten Form dar. Entweder gestatten, wie in der Mathematik und in den reinen Begriffswissenschaften, gewisse Fundamentaldefinitionen eine unmittelbare Transformation in axiomatische Sätze; oder es lassen sich umgekehrt Erfahrungsgesetze, die durch Induction gewonnen sind, in Definitionen allgemeiner Begriffe umwandeln, wie in den physikalischen Disciplinen. Der Unterschied beider Formen entspringt daraus, dass in den erstgenannten Wissenschaften die Feststellung der Begriffe auf einer willkürlichen, wenn auch durch die Natur der Anschauung nahegelegten Construction beruht, deren Sinn festgestellt sein muss, ehe man zu Gesetzesformulirungen übergehen kann, während im zweiten Fall der durch den Zwang der Wahrnehmung sich aufdrängende Zusammenhang der Erscheinungen zunächst zur Annahme gesetzmässiger Beziehungen herausfordert, die dann erst nachträglich einem allgemeinen Begriff subsumirt werden. Die systematische Darstellung verwischt schliesslich diese Unterschiede der Entstehungsgeschichte. In ihrem Streben nach zwingender Deduction sucht sie alle Theoreme als apodiktische Folgerungen

aus einer begrenzten Zahl ursprünglich gegebener Begriffsbestimmungen darzustellen, wobei dann die Frage, wie man zu diesen Begriffsbestimmungen gelangt sei, nicht weiter zur Erörterung zu kommen braucht. In diesem Sinne bilden Definitionen die Grundlage einer jeden systematischen Wissenschaft. Es ist aber dazu keineswegs erforderlich, dass sie, wie in dem Euklidischen System, der Entwicklung der Deductionen und sonstigen Untersuchungen vorangestellt werden, sondern es genügt vollkommen, wenn eine jede an dem Orte vorkommt, wo sie zum ersten Male gebraucht wird. Doch hat dieser Umstand sowie der andere, dass geläufige Begriffsbestimmungen leicht als selbstverständlich vorausgesetzt werden können, zuweilen die fundamentale Bedeutung der Definition übersehen lassen.

Da wir uns als Zeichen der Begriffe im allgemeinen der Worte bedienen, so ist jede Definition zunächst eine Worterklärung; und da Begriffe immer nur durch andere Begriffe, also auch Worte nur durch andere Worte erklärt werden können, so besteht die Definition regelmässig darin, dass ein Wort, dessen begrifflicher Sinn noch nicht festgestellt ist, durch Worte bestimmt wird, deren begriffliche Bedeutung als bekannt vorausgesetzt werden darf. Dieser regelmässigen Aufgabe scheint es zu widerstreiten, wenn man die Worterklärung von der eigentlichen Definition zu unterscheiden pflegt, indem man beide als Nominal- und Realdefinition einander gegenüberstellt. In der That ist auch diese Unterscheidung deshalb bekämpft worden, weil es niemals Definitionen der Dinge selbst geben könne, sondern immer nur Definitionen der Wörter, mit denen wir die Dinge bezeichnen. Die Realdefinition ist daher, wie Mill meint, ebenfalls nur eine Worterklärung; sie unterscheide sich aber von der blossen Nominaldefinition durch den Umstand, dass sie daneben noch die Voraussetzung einschliesse, es gebe ein Ding, das dem Wort entspreche*). Dennoch ist es offenbar nicht der Gedanke an reale Existenz, der uns hier zunächst beschäftigt. Vielmehr liegt der eigentliche Unterschied darin, dass wir bei der blossen Nominaldefinition völlig absehen von dem wissenschaftlichen Zusammenhang, in den der betreffende Begriff durch die Definition gebracht werden soll, indem wir bei ihr den nämlichen Zweck verfolgen wie bei der Uebersetzung eines Wortes aus einer fremden Sprache: die Nominaldefinition ersetzt nur das Wort von unbekannter Bedeutung durch synonyme Ausdrücke

---

*) Mill, Logik I. Uebersetzt von Schiel, 2. Aufl., S. 172.

und Umschreibungen ohne jede Rücksicht auf die systematische Stellung der Begriffe. Der Realdefinition ist es dagegen um die letztere zu thun. An und für sich kann daher ebenso gut die Nominaldefinition eines Pferdes wie die Realdefinition eines Centauren gegeben werden, auch wenn man nicht im geringsten daran zweifelt, dass das Pferd ein wirkliches Thier und der Centaur ein blosses Geschöpf der Phantasie sei. Hiernach bedarf es kaum der Bemerkung, dass die blosse Worterklärung kein Gegenstand logischer Untersuchung ist, sondern dass diese sich nur mit Realdefinitionen im obigen Sinne, d. h. mit solchen Definitionen zu beschäftigen hat, durch welche die Stellung eines Begriffs innerhalb eines allgemeineren Zusammenhangs von Begriffen bestimmt wird.

Diese Aufgabe wird nun in der einfachsten Weise erfüllt, wenn man erstens den zunächst übergeordneten Begriff angibt, unter den der zu definirende gehört, und wenn man zweitens das Merkmal oder den Complex von Merkmalen bestimmt, wodurch er sich von den ihm coordinirten Begriffen unterscheidet. Im günstigsten Fall können so zwei Namen, ein Gattungsname und eine Eigenschaftsbezeichnung, zur Definition genügen. Diese Regel des genus proximum und der differentia specifica ist in der systematischen Naturgeschichte für die hauptsächlich seit Linné üblichen, aber schon vor ihm gebrauchten Doppelbezeichnungen, wie Felis domestica, Canis familiaris u. dergl., massgebend geworden. Die Benennung soll hier eine kurze Definition ersetzen, die aber freilich in Folge der Willkürlichkeit der Genusbenennung und der oft planlosen Auswahl des specifischen Unterschieds der eigentlichen Aufgabe einer Realdefinition wenig entspricht. Darum pflegt man selbst in der systematischen Naturgeschichte diesen Namen ausführlichere Definitionen folgen zu lassen, und in anderen Gebieten, wie bei mathematischen, physikalischen, juristischen und nationalökonomischen Begriffsbestimmungen, behält die Regel des genus proximum und der differentia specifica nur noch in einem allgemeineren Sinne ihre Geltung, insofern nämlich als bei jeder systematischen Definition die zur Verwendung kommenden Begriffe in zwei Gruppen zerfallen, von denen die eine einen oder mehrere übergeordnete Begriffe enthält, die als bekannt aus vorangegangenen Definitionen vorausgesetzt werden, während die andere die besonderen Bestimmungen hinzufügt, durch welche der betreffende Begriff in eindeutiger Weise von allen ihm verwandten Begriffen abgegrenzt wird. Damit eine solche eindeutige Abgrenzung zu Stande komme, darf der Definition selbstverständlich kein für den Begriff wesent-

liches Element fehlen; und ebenso fordert der systematische Zweck, dass sie nicht mit unwesentlichen, etwa schon in anderen Elementen vorausgesetzten Bestimmungen überlastet werde. Je einfacher und zugleich logisch durchgebildeter ein Begriffsgebiet ist, um so mehr wird aber eine Definition, die der Forderung der Eindeutigkeit genügt, doch zugleich eine vollständige Einsicht in die Constitution des Begriffs gewähren. In vollkommenster Weise besitzen diese Eigenschaft die mathematischen Begriffe. Die exacte Definition einer geometrischen Curve enthält ebenso wie die für sie aufzustellende Gleichung bereits alle ihre Eigenschaften vorgebildet. Der Definition in Worten kann daher in diesem Fall der analytische Ausdruck als eine symbolische Form der Definition substituirt werden. Am weitesten dagegen entfernen sich von diesem idealen Ziel die Begriffsbestimmungen concreter Naturobjecte. Nur in geringem Umfange sind wir im Stande, die charakteristischen Eigenschaften einer Pflanze oder eines Thieres in einen solchen Zusammenhang zu bringen, dass sich uns aus bestimmten einzelnen dieser Eigenschaften die anderen mit Nothwendigkeit ergeben. Die Definition muss sich darum in diesem Falle damit begnügen, diejenigen Merkmale herauszugreifen, in deren Constanz eine Bürgschaft ihrer begrifflichen Bedeutung zu liegen scheint, ohne dass sie aber den Anspruch erheben kann, damit irgendwie das W e s e n des Objects anzugeben, wie man dies so oft als die Aufgabe aller Definition angesehen hat, eine Aufgabe die selbstverständlich nur erfüllt werden kann bei Begriffen, deren Bestimmung nach Inhalt wie Umfang schliesslich in unserer eigenen Macht liegt. Neben der Mathematik sind es daher die systematischen Geisteswissenschaften, wie die Rechts- und Staatslehre, sowie die verschiedenen Zweige der systematischen Philosophie, in denen jene ideale logische Aufgabe der Definition am ehesten annähernd erreichbar ist.

Da jede Definition zur Feststellung eines Begriffs anderer Begriffe bedarf, so setzt sie diese als bereits gegeben voraus, sei es dass sie durch vorangegangene Definitionen bestimmt, sei es dass sie unmittelbar aus der Anschauung bekannt und daher keiner Definition bedürftig sind. Sobald eine Definition die gewöhnliche Gliederung in das genus proximum und die differentia specifica zulässt, so ist regelmässig das erstere der Gegenstand vorangegangener Definitionen, während die letztere an die unmittelbare Erfahrung appellirt, die höchstens eine anschauliche Zerlegung, in keiner Weise aber eine Feststellung mittelst anderer Begriffe gestattet. Jene De-

finition der übergeordneten Begriffe zerfällt nun selbstverständlich ihrerseits wieder in ein oberes Genus und eine specifische Differenz, von denen jenes abermals eine ähnliche Zerlegung erfährt, bis man schliesslich bei denjenigen Allgemeinbegriffen des betreffenden Gebietes angelangt ist, die einen weiteren Rückgang nicht mehr gestatten. Indem dieser Process von den zunächst untersuchten Begriffen alle anschaulichen Elemente successiv losgelöst hat, bleiben schliesslich als nicht weiter definirbare oberste Gattungen solche Begriffe übrig, die völlig abstracter Art sind, d. h. unmittelbar gar keine anschaulichen Elemente mehr enthalten, wie die Begriffe Ding, Substanz, Grösse, Zahl u. dergl. Auf diese Weise führt die Analyse der Definitionen auf zwei undefinirbare Bestandtheile von völlig verschiedenem Charakter: erstens auf die Elemente der unmittelbaren Erfahrung oder die elementaren Empfindungen, die unmittelbar angeschaut werden müssen und eben darum nicht definirt werden können, und zweitens auf die allgemeinsten Abstractionen, die, insofern ihnen jeder anschauliche Inhalt abhanden gekommen ist, eine bloss formale Bedeutung besitzen, da in ihnen lediglich die intellectuellen Functionen zum Ausdruck kommen, deren wir uns bei der Ordnung des empirischen Stoffes bedienen. Diese Functionen sind aber wiederum einer eigentlichen Definition nicht zugänglich, sondern es können bei ihnen höchstens die Bewusstseinsacte beschrieben werden, die bei der Erzeugung der Begriffe wirksam sind. So führen wir z. B. den Begriff des Dings auf die selbständige Apperception des einzelnen Wahrnehmungsinhaltes, den Begriff der Zahl auf die Verbindung einer Reihe von Apperceptionsacten zurück u. s. w. (Bd. I, Abschnitt V, Cap. II u. f.)

Indem die Definition einen gegebenen Begriff stets durch eine Mehrheit anderer Begriffe erklärt, kann sie entweder auf einer Zerlegung in diese oder aber auf ihrer Verbindung zu einem neuen Begriffe beruhen. Die Definition stützt sich daher auf die elementareren Methoden der Analyse und Synthese, und sie lässt hiernach zwei Hauptformen zu: die analytische und die synthetische Definition.

Die analytische Definition ist die nächstliegende und darum häufigste Form. Fast unerlässlich bei der Begriffsbestimmung von Erfahrungsobjecten bietet sie sich auch auf abstracten Gebieten immer zunächst dar, weil sie von dem gegebenen Begriff, der definirt werden soll, ausgeht. Die einfachste Art analytischer Definition besteht aber in der Hervorhebung der unterscheidenden Merkmale,

welche die Beschreibung des Gegenstandes an ihm kennen lehrt. Diese descriptive Definition ist selbst nichts anderes als eine abgekürzte, auf die charakteristischen Eigenschaften eingeschränkte Beschreibung. Wie die Beschreibung überhaupt, so hat sie den Nachtheil, dass sie die Begriffselemente nur äusserlich an einander reiht, ihre innere Beziehung aber nicht kennen lehrt. So in den bekannten Definitionen der Naturgeschichte, aber auch bei mathematischen Begriffsgebilden, wo jedoch die exacte Bestimmung der Begriffselemente leicht jene Beziehung ergänzen lässt. Wenn wir z. B. den Kreis als diejenige in einer Ebene gelegene Linie definiren, deren Punkte sämmtlich gleich weit von einem festen Punkte der nämlichen Ebene entfernt sind, so ist diese Begriffsbestimmung an sich rein descriptiv; trotzdem schliesst sie in Folge der scharfen Fassung des Begriffs der Aequidistanz alle wesentlichen Eigenschaften des Kreises in sich. Immerhin müssen wir auch hier die descriptive Definition verlassen, wenn die wechselseitige Beziehung der Begriffselemente angegeben werden soll. Dies geschieht in der analytischen Definition im engeren Sinne, die symbolisch immer in der Form einer Functionsgleichung

$$M = F(a, b \ldots u, v \ldots)$$

ausgedrückt werden kann, wo $M$ den zu definirenden Begriff, $a, b \ldots$ die constanten, $u, v \ldots$ die variablen Elemente, in die er zerlegt wird, und endlich das Zeichen $F$ die Functionsbeziehung bezeichnet, die zwischen allen diesen Elementen stattfindet. In diesem Sinne ist die Gleichung des Kreises zugleich die analytische Definition desselben. Sie enthält alle Elemente der descriptiven Definition und ausser ihnen mit Hülfe der Operationssymbole den exacten Ausdruck ihrer wechselseitigen Relationen. Neben der Mathematik sind es wieder die einer strengeren logischen Cultur zugänglichen Geisteswissenschaften, wie die Erkenntnisslehre, die Rechtswissenschaft und zum Theil die Nationalökonomie, in denen analytische Definitionen erstrebt werden können. Da uns aber hier ein dem algebraischen ähnliches Zeichensystem mangelt, so müssen die Beziehungen der Begriffselemente mit den gewöhnlichen Hülfsmitteln der Sprache ausgedrückt werden, ein Umstand der in Folge der ungenügenden Präcision dieser Hülfsmittel nicht selten die Definition ganz oder theilweise auf die descriptive Stufe zurücksinken lässt.

Den entgegengesetzten Weg schlägt die synthetische Definition ein. Sie gibt an, wie sich der Begriff aus seinen charakte-

ristischen Elementen zusammensetzt. Hierbei erscheinen dann meistens diese Elemente zugleich als die Bedingungen seiner Entstehung, und die synthetische nimmt so die geläufige Form der genetischen Definition an. Wenn man mit geringer Abänderung der oben gegebenen Beschreibung den Kreis durch die Bewegung eines Punktes in der Ebene entstehen lässt, der von einem festen Punkt der nämlichen Ebene immer gleich weit entfernt bleibt, wenn man ferner die verschiedenen Curven zweiten Grades aus bestimmten Modificationen dieses Bewegungsgesetzes ableitet oder noch einfacher als Schnitte eines geraden Kegels durch eine Ebene von wechselnder Lage auffasst, so gewinnt man abermals genetische Definitionen, wobei übrigens, wie das letzte Beispiel zeigt, im allgemeinen für ein und dasselbe Raumgebilde verschiedene Entstehungsweisen und darum verschiedene genetische Erklärungen möglich sind. Doch ist dies nur der Fall, wo die Definition, wie in der Mathematik, Ausdruck einer willkürlichen Construction ist. Bei Erfahrungsobjecten kann die genetische Definition immer nur in dem Versuch einer Nacherzeugung der wirklichen Entstehung des Gegenstandes bestehen, und da diese in der Regel nur eine einzige ist, so ist hier im allgemeinen nur eine Form derselben möglich. Bloss wo es sich um eine genetische Definition solcher Objecte handelt, die unserer unmittelbaren Erfahrung entrückt sind, wie der Sprache, der ursprünglichen Rechts- und Staatsformen, der mythologischen Vorstellungen, da haben wohl auch verschiedene genetische Begriffsbestimmungen neben einander Raum, die nun aber freilich nicht, wie in der Mathematik, ein gleiches Recht für sich in Anspruch nehmen, sondern als Ausdrucksformen verschiedener hypothetischer Anschauungen einander bekämpfen. Nicht selten geschieht es ferner, dass nur einzelne Seiten eines Begriffs eine genetische Definition zulassen, während andere, die zur Unterscheidung von verwandten Begriffen immerhin der Hervorhebung bedürfen, bloss einer Beschreibung zugänglich sind. Es entstehen dann gemischte, genetisch-descriptive Definitionen. Die Andeutung eines derartigen Verhaltens findet sich in den Artbenennungen der Naturgeschichte, wo die eine Hälfte der Doppelbezeichnung, das genus proximum, auf die Abstammung der Art hinweist, während die differentia specifica, die Aufzählung der charakteristischen Artmerkmale, einer bloss descriptiven Aneinanderreihung überlassen bleibt.

Die angegebenen Unterschiede der Definition stehen in nahem Zusammenhange mit den Eigenschaften derjenigen systematischen

Form, die sich auf die Definition stützt, indem sie die fundamentalen Definitionen eines Wissensgebietes zu dessen geordneter Gliederung verwerthet. Diese Form ist die Classification.

## 2. Die Classification.

### a. Allgemeine Eigenschaften der Classification und Entwicklung der Classificationsformen.

Wir bezeichnen als Eintheilung jede Gliederung eines Begriffs, durch welche derselbe in eine Anzahl coordinirter und additiv mit einander verbundener Theile zerlegt wird. Die logische Eintheilung führt daher stets zu einem vollständigen disjunctiven Urtheil von der Form

$$S = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots P_n.$$

Die Eintheilung wird zur Classification, wenn die so gewonnenen Begriffe allgemeine Classen bezeichnen, an denen der Vorgang der Eintheilung einmal oder mehrmals wiederholt werden kann. Jede Classification besteht daher aus einer Haupteintheilung und aus Untereintheilungen.

Damit die Eintheilung eines Begriffs ausgeführt werden könne, müssen seine wesentlichen Elemente durch vorangegangene Analyse ermittelt sein, und insbesondere muss diese darüber Aufschluss geben, welche unter den Begriffselementen constant, und welche veränderlich sind. Unter den veränderlichen werden dann diejenigen ausgewählt, die sich zur Abgrenzung der Glieder des einzutheilenden Begriffs als die geeignetsten erweisen. Ein variables Begriffselement, dessen Veränderungen in dieser Weise benutzt werden, heisst Eintheilungsgrund. In den einfachsten Fällen genügt ein einziger; in verwickelteren wird es aber nicht selten nöthig, mehrere Eintheilungsgründe zu combiniren, um eine hinreichend vollständige Gliederung des Begriffs zu gewinnen.

Gehen wir auf den allgemeinen analytischen Ausdruck der Definition eines Begriffs zurück:

$$M = F\ (a,\ b\ \ldots,\ u,\ v\ \ldots),$$

so würden demnach unter den variablen Elementen $u$, $v$ . . . die Eintheilungsgründe zu wählen sein*). Da die Wahl zwischen ihnen im

*) Diese logischen Variabeln dürfen, wie schon hier bemerkt werden mag, nicht verwechselt werden mit den Variabeln algebraischer Gleichungen. Wir

allgemeinen, abgesehen von Rücksichten der Zweckmässigkeit, freisteht, so lässt jeder zusammengesetzte Begriff verschiedene Eintheilungsweisen zu. Erfordert die Vollständigkeit der Eintheilung die Combination mehrerer Eintheilungsgründe, so bestimmt sich die Gesammtzahl der Theile nach der Anzahl der Combinationen, die zwischen den durch die einzelnen Eintheilungsgründe gewonnenen Theilen möglich sind. Wählt man also z. B. $u$ und $v$, so würde, wenn $M$ nach $u$ eingetheilt in $A$, $B$ und $C$, nach $v$ eingetheilt in $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ zerfällt, als Resultat der combinirten Theilung

$$M = A\alpha + A\beta + A\gamma + B\alpha + B\beta + B\gamma + C\alpha + C\beta + C\gamma$$

sich ergeben. In allen solchen Fällen bedarf es jedoch einer besonderen Untersuchung darüber, ob nicht einzelne der logisch möglichen Glieder in Folge von Bedingungen, die in der speciellen Constitution des Begriffs liegen, hinwegfallen.

Für die Wahl der Eintheilungsgründe gelten zwei Hauptregeln, die freilich bei der Classification von Erfahrungsobjecten nicht immer strenge befolgt werden können. Erstens sollen die Eintheilungsgründe allen Gliedern des einzutheilenden Begriffs zukommen, damit es nicht nöthig werde, plötzlich mit ihnen zu wechseln. Zweitens sollen die Veränderungen der zu Eintheilungsgründen gewählten Merkmale den wesentlichen Veränderungen des Gesammtbegriffs, also den Veränderungen der wichtigsten anderen variabeln Begriffselemente, parallel gehen. Wie auf der ersten dieser Regeln die logische Richtigkeit der Eintheilung, so beruht auf der zweiten die der Natur des Gegenstandes angemessene Wahl der Eintheilungsgründe.

Durch die Hervorhebung einzelner für die gegenseitige Abgrenzung der Theile eines allgemeinen Begriffs geeigneter Elemente steht die Classification in unmittelbarem Zusammenhang mit der Definition. Einerseits setzt sie zureichende Definitionen der einzutheilenden Begriffe voraus, anderseits werden durch sie selbst, namentlich durch die Fortschritte, die sie im Verlauf der systematischen Entwicklung einer Wissenschaft macht, die Definitionen vervollkommnet und immer mehr in eine sich wechselseitig stützende Verbindung gebracht. Hierbei verwerthet die Classification die verschiedenen Untersuchungsmethoden, die sich an der Entwicklung des Wissens betheiligen. Vor allem ist es die Abstraction, die sich

---

werden unten sehen, dass vielmehr die logischen Variabeln bei der analytischen Classification mathematischer Begriffe regelmässig unter den algebraischen Constanten zu wählen sind.

zunächst in der Form der isolirenden bei der Wahl der Eintheilungsgründe bethätigt, um sodann als generalisirende die Feststellung der allgemeinen Gattungsbegriffe zu vermitteln. Die Art aber, wie diese Formen der Abstraction geübt werden, ist wiederum abhängig von der jeweils erreichten Stufe der Induction und Deduction. Auf diese Weise ist es die Classification nebst dem von ihr getragenen System von Definitionen, an der am unmittelbarsten der Grad der Entwicklung, der in der Untersuchung eines bestimmten Gebietes erreicht ist, erkennbar wird; ja der Verlauf der Entwicklung selbst spiegelt sich regelmässig in der Aufeinanderfolge der Classificationssysteme einer Wissenschaft. In dem Wechsel der Formen der Classification ist daher meistens eine bestimmte Regelmässigkeit zu erkennen, die von den allgemeinen Gesetzen wissenschaftlicher Entwicklung beherrscht wird.

Entsprechend den Formen der Definition können wir nämlich als Hauptformen analytische und synthetische Classificationen unterscheiden. Wie mit der Analyse jede wissenschaftliche Untersuchung beginnt, so äussern sich auch die ersten Versuche einer systematischen Ordnung der Begriffe regelmässig in analytischen Eintheilungen. Die beginnende Analyse vermag nun zwar über die Coexistenz der Merkmale eines Begriffs, nicht aber über die innere Beziehung derselben Aufschluss zu geben. Die analytischen Classificationen der beginnenden Wissenschaft sind daher stets descriptiver Art. Erst indem sich mit der Analyse synthetische Constructionen oder Beobachtungen nach synthetischer Methode verbinden, gewinnt diese Methode auch auf die Eintheilungen ihren Einfluss, und es geht so die descriptive in eine genetische Classification über. Aber nicht unter allen Umständen kann die letztere auf die Dauer befriedigen. Namentlich in den reinen Anschauungs- und Begriffswissenschaften macht sich mehr und mehr das Streben nach systematischen Eintheilungen geltend, die nicht bloss über die Entstehung der Begriffsgegenstände Rechenschaft ablegen, sondern einen möglichst vollständigen Ausdruck der bleibenden inneren Beziehungen ihrer Elemente enthalten. Dies ist nur durch ein Zurückkehren zur Analyse möglich, wobei aber diese sich nicht auf eine descriptive Aneinanderreihung der Merkmale beschränken darf, sondern im Sinne der mathematischen Analyse über deren gesetzmässige Beziehungen Rechenschaft geben muss. So entsteht die vollendetste Form der Classification, die analytische Classification im engeren Sinne, die der analytischen Definition parallel geht, aber,

gleich dieser, in Folge unserer unvollkommenen Einsicht in das Wesen der Erfahrungsobjecte hauptsächlich nur in den Gebieten der auf Construction beruhenden Begriffssysteme Anwendung finden kann.

### b. Die descriptive Classification.

Die descriptive Classification benützt als Eintheilungsgründe Merkmale, die bei der Beschreibung einer zusammengehörigen Reihe von Gegenständen gewonnen worden sind. Da die Beschreibung an sich in Folge ihrer Beschränkung auf die blosse Betrachtung der thatsächlichen Coexistenz der Eigenschaften eines Objectes kein Merkmal vor dem anderen bevorzugt, so ist jene Wahl der Eintheilungsgründe vollkommen freigegeben, und es wird deshalb der descriptiven Classification verhältnissmässig leicht, den beiden oben namhaft gemachten logischen Forderungen der Constanz der Eintheilungsgründe und der angemessenen Variabilität der charakteristischen Merkmale zu genügen. Je mehr aber dies der Fall ist, in um so höherem Grade muss hinwiederum die Classification mit den von anderen Gesichtspunkten aus unternommenen Gliederungen des Gegenstandes übereinstimmen, um so mehr also müssen auch ihre Resultate mit denjenigen der vollkommeneren genetischen oder analytischen Classification zusammentreffen. In der That besteht zum grossen Theil gerade hierin der Dienst, den eine logisch angemessene Classification, mag sie auch noch so sehr nach äusserlichen Merkmalen ausgeführt sein, der weiteren Untersuchung des Gegenstandes zu leisten pflegt. Man hat wegen der freien Wahl der Eintheilungsgründe, über welche diese erste Eintheilungsform mehr als jede andere verfügt, vorzugsweise der descriptiven Classification in der Naturgeschichte den Namen der künstlichen beigelegt. Aber es ist eine längst gemachte und in Folge der angedeuteten Beziehung der Merkmale leicht verständliche Bemerkung, dass die Unterordnungen der besseren künstlichen Systeme mit denjenigen der so genannten natürlichen vielfach übereinstimmen. Ein weiterer Vorzug der descriptiven Classification, der mit der freien Wahl der Eintheilungsgründe zusammenhängt, besteht in der willkürlichen Beschränkung der Zahl derselben, eine Eigenschaft, die der klaren Uebersicht der Gliederungen des Systems wesentlich zu statten kommt. In allen diesen Beziehungen ist besonders Linnés künstliches Pflanzensystem, mehr als seine Classificationen auf anderen Gebieten der Naturgeschichte, ein mustergültiges Beispiel. Indem

dieses System die Beschaffenheit der Fructificationsorgane zum Eintheilungsgrunde wählt, geht es zunächst von den allgemeinsten Unterschieden in der Lage derselben aus, worauf die weitere Unterscheidung der Classen nach der Zahl und Befestigungsweise der Staubfäden geschieht.

Diesen Vorzügen des descriptiven Systems stehen jedoch einige Nachtheile gegenüber, die allmählich zur Ersetzung desselben durch vollkommenere Classificationsformen antreiben. Solche Nachtheile entspringen hauptsächlich daraus, dass die descriptive Eintheilung vermöge der Beschränkung der Eintheilungsgründe die sie erstrebt in höherem Grade als jede andere auf die durchgängige Correlation der Merkmale sich stützen muss, während sie doch weniger als jede andere über die Ursachen dieser Correlation Rechenschaft zu geben vermag. Wenn z. B. das descriptive System als Classenmerkmal der Säugethiere den Besitz der Milchdrüsen aufstellt, so macht es nicht im geringsten begreiflich, warum mit diesem Merkmal gewisse andere Eigenschaften, wie der Besitz von Haaren, zweier Hinterhauptscondylen, eines einzigen auf der linken Seite gelegenen Aortenbogens, eines die Brust- und Bauchhöhle vollständig trennenden Zwerchfells, regelmässig verbunden sind. Und doch sind die Milchdrüsen nur deshalb ein zweckmässig gewählter Eintheilungsgrund, weil zwischen ihnen und jenen anderen Merkmalen ein constantes Verhältniss der Coexistenz besteht.

Namentlich in zwei Erscheinungen kommt hier die mangelhafte Einsicht in die wechselseitige Beziehung der Begriffselemente in störender Weise zur Geltung. Erstens geschieht es, und zwar gerade bei den in logischer Beziehung vollkommensten descriptiven Eintheilungen, nicht selten, dass einzelne Glieder, die durch das Eintheilungsprincip logisch gefordert werden, hinwegfallen, weil sie dem Wesen des eingetheilten Begriffs widerstreiten. Ueber die Gründe solcher Lücken des Systems vermag aber die descriptive Classification keine Rechenschaft zu geben, so dass deren Existenz lediglich als eine zufällige erscheint. Dem lässt sich nun freilich nicht abhelfen, wo überhaupt unsere Kenntniss der Dinge eine zu unvollkommene ist. Wenn z. B. das Linné'sche Pflanzensystem alsbald von der Decandria, der Classe mit 10 Staubgefässen, zu der Dodecandria überspringt, in der es Blüthen mit 12—20 Staubgefässen vereinigt, so entzieht sich der hier zu Grunde liegende Mangel einer Elfzahl männlicher Fructificationsorgane vorläufig unserer Erklärung. Wenn man dagegen die Curven dritten Grades erstens nach der Zahl ihrer

unendlichen Zweige und zweitens nach der parabolischen oder hyperbolischen Gestalt dieser Zweige eintheilt, so lässt auch hier diese descriptive Eintheilung dahingestellt, warum gewisse logisch denkbare Combinationen der stets paarig in den Zahlen 2, 4, 6 und 8 vorkommenden Zweige hinwegfallen, warum also z. B. unter den Curven mit sechs Zweigen nur solche mit zwei parabolischen und vier hyperbolischen vorkommen und vollends die Curven mit acht Zweigen stets hyperbolisch sind. Da es sich aber in diesem Fall um Begriffe handelt, bei denen die Erkenntniss des Zusammenhangs ihrer Eigenschaften vollkommen in unserer Macht steht, so liegt hierin zugleich ein Motiv, an die Stelle der descriptiven eine genetische oder analytische Classification zu setzen, bei denen die logisch möglichen Glieder der Eintheilung immer auch mit den thatsächlich existirenden oder dem Begriff nach nothwendigen zusammenfallen müssen.

Ein zweiter Mangel der descriptiven Eintheilung besteht darin, dass sie nicht selten genöthigt wird, entweder Zusammengehöriges zu trennen oder, wenn dieser Uebelstand vermieden werden soll, dem gewählten Eintheilungsgrund untreu zu werden. Dies ereignet sich namentlich bei Naturobjecten, deren abweichende Gestaltungen oft durch mannigfache Uebergänge verbunden sind, so dass sie den von uns willkürlich gezogenen Grenzen nur widerstrebend sich fügen. So ordnet das Linnésche System sämmtliche Liliaceen in die sechste Classe, obgleich einige Arten nicht sechs, sondern nur drei entwickelte Staubgefässe besitzen. Die Gesammtheit der sonstigen Eigenschaften gewinnt hier das Uebergewicht über das einzelne willkürlich bevorzugte Merkmal. Indem die descriptive Classification sich auf diese Weise genöthigt sieht, die allgemeinen Verwandtschaftsbeziehungen der Objecte auf Kosten der logischen Folgerichtigkeit zu bevorzugen, legt sie aber selbst schon den Gedanken einer genetischen Eintheilung nahe.

### c. Die genetische Classification.

Der Versuch, zusammengehörige Objecte unserer Beobachtung in irgend eine Entwicklungsreihe zu ordnen, ist wohl so alt wie die wissenschaftliche Beobachtung selber. Auch liegen gerade den frühesten descriptiven Eintheilungen meistens zugleich unvollkommene genetische Anschauungen zu Grunde. So sind die von Aristoteles unterschiedenen Classen des Thierreichs sichtlich nach descriptiven Merkmalen gebildet, aber für ihre Anordnung ist nebenbei die An-

nahme einer continuirlichen Entwicklungsfolge der Organismen von den Pflanzen aufwärts bis zu den Säugethieren massgebend. Gerade im Gebiet der Naturgeschichte musste sich jedoch bald der principielle Unterschied descriptiver und genetischer Eintheilung geltend machen. Denn während hier das Bedürfniss, in der Fülle der Formen eine logische Ordnung zu schaffen, zu der ersteren drängte, konnte der vergleichenden Beobachtung die Mannigfaltigkeit genetischer Beziehungen nicht verborgen bleiben. Mit klarem Bewusstsein freilich hat wohl erst der grosse Reformator der systematischen Naturgeschichte, Linné, diesen Unterschied erfasst, indem er seinem künstlichen ein natürliches System an die Seite setzte, dessen Vollendung er übrigens der Zukunft überlassen musste. Auch die später zur Ausführung gelangten natürlichen Systeme, wie sie für das Pflanzenreich Jussieu und Decandolle aufstellten, bilden erst eine Uebergangsform zwischen descriptiver und genetischer Classification, indem namentlich die Unterabtheilungen nach rein äusserlichen Merkmalen geschieden sind. Dies ist zum Theil wohl die Folge davon, dass der genetische Grundgedanke hier unter dem vielleicht noch aus der Aristotelischen Philosophie herübergenommenen Vorurtheil stand, die Entwicklung erfolge in einer einzigen Richtung, daher man auch dem natürlichen System eine lineare Anordnung zu geben suchte. Hierzu kam, dass die ersten erfolgreicheren Versuche genetischer Classification nicht einer wirklichen Beobachtung der Entwicklung, sondern einer blossen Vergleichung der fertigen Objecte ihren Ursprung verdankten, ein Standpunkt, der in den namentlich in den ersten Jahrzehnten unseres Jahrhunderts zur Ausbildung gelangten vergleichenden Wissenschaften seinen Ausdruck fand. War in der Linnéschen Schule die Untersuchung der Eigenschaften der Pflanzen und Thiere fast nur als ein Hülfsmittel betrachtet worden zur Gewinnung einer Classification, und diese wieder als ein Hülfsmittel zur Auffindung und Benennung der Objecte, so wurde nun in der vergleichenden Anatomie der Pflanzen und Thiere die Untersuchung sich selbst Zweck, und sie führte dadurch nothwendig zu einer Bevorzugung der inneren vor den bisher hauptsächlich beachteten äusseren Merkmalen. Hatte die Mineralogie ohne Rücksicht auf Vorkommen und Bildung die Mineralien nach gewissen äusseren Unterschieden geordnet, so traten ihr jetzt in der Geognosie und Geologie Wissenschaften zur Seite, deren Aufgabe von selbst auf eine vergleichende Untersuchung und damit zugleich auf die Erforschung der Entstehungsbedingungen der Gesteine hin-

wies. Von der Naturgeschichte ausgehend, ergriff dies Streben nach vergleichender Methode bald noch weitere Kreise der wissenschaftlichen Forschung. Eine „vergleichende Erdkunde“ nannte Carl Ritter sein bahnbrechendes geographisches Werk. Auf dem Gebiete der Geisteswissenschaften schlossen sich daran die vergleichende Sprachwissenschaft, die Anfänge einer vergleichenden Mythologie und schliesslich der Versuch einer aus Bevölkerungs- und Wirthschaftsstatistik allmählich hervorwachsenden vergleichenden Gesellschaftslehre. Manche dieser Disciplinen, wie Geographie, Sprachwissenschaft und sociale Statistik, waren durch die Natur ihres Gegenstandes ganz oder grossentheils auf die Vergleichung fertiger Objecte oder Zustände angewiesen. Von der Naturgeschichte kann dies zwar nicht behauptet werden, sondern es schien hier im Gegentheil die Erfahrung selbst die Forderung zu stellen, dass ein genetisches System auf die wirkliche Genese der Gegenstände zu gründen sei. Immerhin war es begreiflich, dass trotzdem der schwierigeren und zeitraubenderen entwicklungsgeschichtlichen Untersuchung die Vergleichung vorausging.

Nun kann aber ganz allgemein der Zweck einer genetischen Classification ein doppelter sein. Entweder kann sie, ohne Rücksicht auf die wirkliche Entstehung, lediglich darüber Rechenschaft geben, wie die Objecte von uns anschaulich oder begrifflich construirt werden können. In diesem Fall werden möglicherweise mehrere genetische Eintheilungen der nämlichen Gegenstände gleichberechtigt neben einander bestehen, je nach den wechselnden Gesichtspunkten, von denen unsere genetische Construction ausgeht. Oder die Classification kann ein Ausdruck der wirklichen Entwicklung sein. Nur in diesem Falle haben wir eigentlich das Recht, von einem natürlichen System zu sprechen, und es ist zugleich klar, dass hier gleichberechtigte Systeme nicht neben einander möglich sind, oder dass, wo sie vorkommen, dies bloss eine noch bestehende Unsicherheit über die empirischen Grundlagen eines solchen natürlichen Verwandtschaftssystems andeutet. Der wesentliche Unterschied beider Formen genetischer Classification ist unschwer an Beispielen zu erkennen. Mathematische Begriffsgebilde gehören regelmässig der ersten Form an. Ob ich die Curven zweiten Grades durch die Bewegungen eines nach bestimmten Gesetzen fortschreitenden Punktes oder durch die Schattenprojectionen eines Kreises bei wechselnder Lage desselben zur Projectionsebene oder endlich mittelst der Durchschneidung eines Kegels entstehen lasse, ist für die Sache selbst

gleichgültig, und jede der auf einer dieser fingirten Entstehungsweisen beruhenden Eintheilungen ist darum an sich gleichberechtigt. Wenn ich dagegen über den genetischen Zusammenhang einer Reihe chemischer Verbindungen Rechenschaft geben will, so ist nicht jede beliebige Art, wie man sich die Entstehung einer Atomgruppirung denken kann, der anderen gleichwerthig, sondern nur die ist streng genommen berechtigt, die mit der wirklichen Entstehung zusammentrifft. Die Genese ist also willkürlich, so lange es sich um eine Construction des Begriffs handelt; sie ist an die Erfahrung gebunden, sobald nur eine Reconstruction in Frage steht.

In den genetischen Systemen, namentlich der Naturgeschichte, wurden nun diese beiden wesentlich verschiedenen Fälle nicht immer genügend auseinandergehalten, und es ist begreiflich, dass besonders die Beschränkung auf die Vergleichung der gewordenen Objecte zu einer solchen Vermengung von Construction und Reconstruction Anlass geben konnte. Eine mehr oder minder willkürliche Betrachtung der Gegenstände wurde in diese selbst verlegt oder als das ideale Gesetz angesehen, das durch eine Art mystischer Causalität die Wirklichkeit bestimme. Ihren Ausdruck fand diese Betrachtungsweise in einem Begriff, der, solange man sich seines Ursprungs aus der logischen Abstraction bewusst blieb, seine Berechtigung hatte, da sein Fehler nur in der Hypostasirung bestand, die er erfuhr. Dies war der Begriff des Typus. Es gehört zu den bedeutsamsten Erscheinungen in der neueren Entwicklung der Wissenschaften, dass in den verschiedensten Gebieten, Zoologie, Botanik, Krystallographie, Chemie, Sprachwissenschaft, der nämliche Begriff beinahe gleichzeitig auftaucht. Geht man auf die empirischen Grundlagen zurück, von denen seine Abstraction ausgegangen ist, so kann eine dreifache Bedeutung desselben unterschieden werden. Erstens bezeichnet der Typus die einfachste Form, in der ein gewisses Gesetz der Structur oder der Zusammensetzung repräsentirt sein kann. Hier wird daher auch der Ausdruck Grundform in synonymer Bedeutung gebraucht. In diesem Sinne betrachtet die Krystallographie Würfel und Oktaëder als die Grundformen des regulären, die Doppelpyramide mit quadratischer Basis als die Grundform des tetragonalen Systems, oder sucht die Chemie nach der von Dumas eingeführten typischen Anschauung auf die Typen des Chlorwasserstoffs (HCl), Wassers ($H_2O$), Ammoniaks ($H_3N$) und Sumpfgases ($H_4C$) die zusammengesetzteren Verbindungen zurückzuführen. Zweitens versteht man unter dem Typus diejenige Form, in der die Eigen-

schaften einer Reihe verwandter Formen am vollkommensten repräsentirt sind. Diese Bedeutung des Begriffs fand besonders in der Naturgeschichte des Pflanzen- und Thierreichs ihre Verwerthung. So vereinigt der Typus eines Säugethiers nach Cuvier alle Merkmale in sich, die einer grösseren Zahl von Ordnungen zukommen. Zu diesem Typus gehören also fünf Zehen an den Vorder- und Hintergliedmassen, ein vollständiges Gebiss aus drei Zahnformen, obgleich bei der Mehrzahl der Säugethiere keines dieser Merkmale zutrifft. Zu dem typischen Charakter der Rosaceen gehört es, dass sie abwechselnde, von Nebenblättern begleitete Blätter haben, obgleich bei einzelnen, nämlich den Amygdaleen, die Nebenblätter ganz fehlen. Drittens endlich nimmt der Typus zuweilen noch die Bedeutung an, dass er nur eine formale Eigenschaft bezeichnet, die den Gliedern einer Gattung oder mehreren Gattungen gemeinsam zukommt. So wenn von Endlicher die Cormo- und Thallophyten als die Haupttypen des Pflanzenreiches angesehen wurden, oder wenn viele Linguisten die isolirende, agglutinative und flectirende Form als die hauptsächlichsten Sprachtypen unterschieden. Wie schon diese Beispiele zeigen, handelt es sich hier um umfassendere Eigenschaftsbegriffe, bei denen die Gefahr einer Umwandlung zu Objecten weniger nahe lag als in den zwei ersten Fällen, wo der Typus zwar auch ein Abstractionsproduct ist, aber doch zugleich sein reales Abbild in bestimmten Objecten der Erfahrung findet. Dennoch ist auch hier diese Gefahr nicht ganz vermieden worden, indem man solche Abstractionen zwar als ideale Formen auffasste, ihnen aber doch zugleich eine Art unmittelbarer Realität beimass. So wird in der so genannten Spiraltheorie von Schimper und Braun die Blattstellung auf ein abstractes geometrisches Gesetz zurückgeführt, der sich die Wirklichkeit natürlich immer nur mehr oder weniger annähern kann. Dieses Gesetz wird aber nicht bloss als eine mathematische Abstraction betrachtet, wogegen nichts einzuwenden wäre, sondern zugleich als eine reale Kraft, die in dem Wachsthum der Pflanzen sich äussern soll*). In ähnlichem Sinne suchte noch H. G. Bronn die Thierformen auf einfache geometrische Formen, Kegel, Keil u. dergl., zurückzuführen, welchen Abstractionen er den Namen „Gestaltungsgesetze“ gab**). In der

*) A. Braun, Betrachtungen über die Erscheinung der Verjüngung in der Natur. Freiburg i. Br. 1849. S. 124.

**) H. G. Bronn, Morphologische Studien über die Gestaltungsgesetze der Naturkörper. Leipzig und Heidelberg 1858.

That bestand die Meinung, morphologische Betrachtungen solcher Art seien der Aufstellung causaler Naturgesetze äquivalent. Jener von den Begründern der natürlichen Systeme des Pflanzen- und Thierreichs gebildete Begriff des Typus, der mit dem Begriff der repräsentativen, die Merkmale der Familie, Ordnung oder Classe am vollkommensten ausprägenden Art sich deckte, stand zwar an und für sich in näherer Beziehung zur unmittelbaren Erfahrung. Aber auch er besass doch insofern den Charakter einer bloss idealen Form, als man sich dabei der unendlichen individuellen Variabilität innerhalb der Art bewusst war und sich dennoch den Typus individuell dachte, als ein ideales Individuum, in welchem alle schwankenden Eigenschaften der realen Individuen aufgehoben seien. Ebenso fand man keine Schwierigkeit, die Möglichkeit eines Gattungstypus zuzugestehen, der in keiner einzigen der in der Gattung enthaltenen Arten, sondern nur in ihnen allen zusammengenommen vollständig realisirt sei, und dennoch diesen nirgends existirenden Gattungstypus als eine reale Kraft zu betrachten, die in den einzelnen Formen zur Wirkung komme. Die unbewusste Mystik dieser Anschauung trat augenfällig in der von Decandolle zunächst in Bezug auf die Pflanzen ausgebildeten, dann aber auch für das Thierreich adoptirten Lehre vom „Abortus" zu Tage. Die Abweichungen einzelner Arten von dem gemeinsamen Typus wurden hier dadurch erklärt, dass gewisse Theile verkümmert oder völlig verloren gegangen seien*). Dieser Verlust wurde aber nicht als ein wirklicher, sondern als ein idealer Vorgang gedacht, gleichsam als ein Erlebniss in einer vorbildlichen Welt, nach dessen Resultaten sich erst die Dinge der Wirklichkeit gestaltet hätten. Lagen solche Vorstellungen den älteren Formen der Typenlehre mehr unbewusst zu Grunde, so hat Agassiz das Verdienst, dass er sie mit vollem Bewusstsein zum Ausdruck brachte. Schon Cuvier hatte den Typus als die „Idee der Gattung" bezeichnet; bei Agassiz wird diese Idee zum Schöpfungsgedanken, aus dessen Verwirklichung die Wesen selber entspringen. Die Idee wird also objectivirt, zugleich aber als Bestandtheil einer transscendenten vorbildlichen Welt gedacht**). Die bis dahin noch einigermassen latent gebliebene Uebereinstimmung mit der Platonischen Ideenlehre tritt hier offen zu Tage. Um so merkwürdiger ist aber

*) Sachs, Geschichte der Botanik, S. 142.

**) L. Agassiz, Essay on Classification. Boston 1857. (Contributions to the natural history of the Unit. States of Amerika. Vol. I.) Vgl. hierzu Reinh. Körner in meinen Philos. Stud. II, S. 194 ff.

jene Uebereinstimmung, weil wir schwerlich bei diesen Morphologen an eine absichtliche Wiedererneuerung Platonischer Philosophie denken dürfen.

In der organischen Naturgeschichte hat die Typentheorie durch ihren Zusammenhang mit der Lehre von der Constanz der Arten ihr besonderes Gepräge empfangen, und namentlich ist dadurch ihre zuletzt erwähnte mystische Wendung begünstigt worden. Dennoch fasst man diese Theorie einseitig auf, wenn man sie bloss von diesem Gesichtspunkte aus betrachtet. Der Chemie und der Sprachwissenschaft liegen solche Nebengedanken ferne, und trotzdem hat hier der Begriff des Typus eine ähnliche Rolle gespielt. Die wesentliche Bedeutung desselben liegt überall darin, dass er eine genetische Ordnung gewisser Naturobjecte zu vermitteln sucht, dass aber diese Ordnung nicht auf eine Beobachtung der wirklichen Entwicklungen, sondern auf die Vergleichung der fertigen Objecte gegründet wird. Darum eben tritt an die Stelle der reconstructiven Genese, die bei Erfahrungsobjecten immer gefordert wird, eine constructive Genese, die der Erzeugung mathematischer Objecte nachgebildet ist, und die so auch im Einzelnen in den Irrthum verfallen kann, durch eine mathematische Abstraction die causale Erklärung der wirklichen Gegenstände ersetzen zu wollen. Das Streben, eine genetische Ordnung zu gewinnen, ist vorhanden, aber noch fehlt es an den vollständigen Vorbedingungen. Deshalb sind die auf der Grundlage des Typenbegriffs entstandenen Eintheilungen offenbare Uebergangsformen: sie sind in Wahrheit descriptive Classificationen in einer genetischen Form. Diese Form ist aber von aussen hinzugebracht: sie stützt sich entweder, wie in der Chemie oder Sprachwissenschaft, auf hypothetische Annahmen, oder, wie in der organischen Naturgeschichte, auf eine postulirte „ideale Entwicklung“, d. h. auf die Umwandlung von Abstractionsgebilden in wirkliche, aber einer transscendenten Welt angehörige Dinge. Das Merkmal einer wahren genetischen Classification ist es jedoch, dass sie aus einer genetischen Erklärung der betreffenden Objecte hervorgeht. So setzt die genetische Eintheilung der Kegelschnitte vollständige Definitionen ihrer Entstehung voraus. Dagegen erklärt der chemische Typus ebenso wenig die Entstehung einer Verbindung wie die Abstraction der Spirallinie die Blattstellung oder der Arttypus das Werden der organischen Arten begreiflich macht.

Wohl aber enthält in allen diesen Fällen die äusserlich und zum Theil künstlich angewandte genetische Form einen Hinweis

auf die wirkliche Entwicklung der Objecte, und eben darum bahnen die auf solche Weise entstandenen Eintheilungen den wahren genetischen Systemen den Weg. Doch wird dem genetischen Princip keineswegs dadurch schon Genüge geleistet, dass man einfach jene ideale Bedeutung des Typus, wie sie in der vorangegangenen Periode der Naturgeschichte gültig gewesen, in eine reale umzuwandeln sucht, indem man einen hypothetischen Stammvater postulirt, aus dessen im Verlauf der Vererbung entstandenen Abänderungen allmählich die Variationen des Typus hervorgegangen seien. Wo dieser Annahme nicht der irgendwie durch die Beobachtung mindestens indirect zu führende thatsächliche Nachweis zu folgen vermag, da bleibt der Fehler bestehen, dass an die Stelle der Reconstruction eine Construction tritt. Der Typus behält in Wahrheit seine ideale Bedeutung, mit dem einzigen Unterschied, dass ihm nicht in einer vorbildlichen Welt, sondern in irgend einem unzugänglichen Zeitraum der wirklichen Welt objective Realität beigemessen wird. Immerhin ist auf diesem zuerst von der Darwin'schen Theorie mit Erfolg eingeschlagenen Wege der Vortheil erreicht, dass die unhaltbare und mit der genetischen Auffassung im Widerspruch stehende Annahme einer durch leere Zwischenräume getrennten Entwicklungsreihe beseitigt wird. Namentlich aber macht die Uebertragung der Idee des Typus auf ein empirisch erreichbares Gebiet eine Prüfung möglich, durch welche die von Hypothesen überbrückten Lücken des genetischen Systems allmählich ausgefüllt werden.

Auf diese Weise vollzieht sich in den systematischen Erfahrungswissenschaften der Uebergang von der descriptiven zur genetischen Classification in der Regel durch ein Zwischenstadium, in dem an Stelle der allein zulässigen reconstructiven eine constructive Genese benützt wird, deren Anwendung in Wirklichkeit nur ein descriptives System in genetischer Form zu Stande bringt. Dem gegenüber bewahrt sich die Mathematik fortan die constructive Methode und mit ihr den Vortheil, dass sie die nämlichen Objecte nach verschiedenen Principien genetisch zu ordnen vermag. Dieser Vorzug ist aber nur die Folge eines Uebelstandes, den auf diesem Gebiete das genetische Verfahren mit sich führt. Jede genetische Erklärung und Eintheilung beleuchtet nämlich die zu untersuchenden Objecte nur von einer Seite und lässt zahlreiche andere, oft nicht minder wichtige Eigenschaften unbeachtet. Dies ist der Grund, weshalb hier, ebenso wie bei der Definition, eine auf die analytische Begriffsentwicklung gestützte Classification als die vorzüglichere anerkannt werden muss.

### d. Die analytische Classification.

Die analytische Classification, als die vollendetste Form der Gliederung eines Begriffs, gewährt zugleich den vollkommensten Einblick in die logischen Principien der Classification überhaupt. Bezeichnen wir, zurückgehend auf die früher (S. 45) gegebene symbolische Form der analytischen Definition, mit

$$M = F\,(a, b, c, u, v, w)$$

irgend einen Allgemeinbegriff, als dessen logische Variabeln $u$, $v$ und $w$ zu betrachten sind, so geht die Classe $M$ in eine unter ihr enthaltene Gattung $M_1$, diese in eine zugehörige Art $M_2$ über, wenn wir successiv die geeigneten Variabeln durch constante Elemente ersetzen. Wir erhalten so die im Verhältniss successiver Unterordnung stehende Reihe:

| | |
|---|---|
| Classe | $M = F\,(a, b, c, u, v, w)$, |
| Gattung | $M_1 = F\,(a, b, c, \alpha, v, w)$, |
| Art | $M_2 = F\,(a, b, c, \alpha, \beta, w)$, |
| Individuum | $M_3 = F\,(a, b, c, \alpha, \beta, \gamma)$, |

welche Reihe selbstverständlich, je nach dem Bedürfniss der Eintheilung, auch durch eine grössere Zahl von Stufen verlaufen kann, ehe der Individualbegriff erreicht wird. Immer aber ist dieser dann gegeben, wenn die sämmtlichen logischen Variabeln durch Constanten ersetzt sind.

Jede Stufe dieser Reihe enthält nun mit Ausnahme der letzten eine Anzahl coordinirter Glieder, die gewonnen werden, indem man die zum Eintheilungsgrund der betreffenden Stufe genommene logische Variable allmählich alle Werthe annehmen lässt, deren sie überhaupt fähig ist. Die äussersten Grenzwerthe bezeichnen dann den Umfang der Classe, Gattung oder Art, und die coordinirten Glieder werden erhalten, wenn man die den Eintheilungsgrund abgebende Variable successiv zwischen engeren Grenzen veränderlich annimmt oder ihr auch gewisse ausgezeichnete constante Werthe anweist, so aber dass diese Einzelwerthe sämmtlich zusammen wieder den Umfang der Variabeln vollständig erschöpfen. Angenommen also, in der oben symbolisch ausgedrückten Gattung $M_1$ erweise sich der Eintheilungsgrund $u$ als veränderlich zwischen den Grenzen $\alpha_1$ und $\alpha_n$; ausserdem mögen $\alpha_2$, $\alpha_3 \ldots \alpha_{n-1}$ Grenzen bezeichnen, die sich als angemessen für die Trennung der coordinirten Glieder aus

der Constitution des Begriffes ergeben, so wird das ganze Verfahren der analytischen Eintheilung symbolisch ausgedrückt werden durch die Gleichung

$$M_1 = F_{u = \alpha_1}^{u = \alpha_n} (A, U) = F_{u = \alpha_1}^{u = \alpha_2} (A, U) + F_{u = \alpha_2}^{u = \alpha_3} (A, U) \ldots\ldots$$

$$+ F_{u = \alpha_{n-1}}^{u = \alpha_n} (A, U),$$

worin der Kürze halber die constanten Elemente $a$, $b$, $c$ durch $A$ und die Variablen $u$, $v$, $w$ durch $U$ bezeichnet sind.

Das Hauptgebiet der Anwendungen der analytischen Classification ist das der mathematischen Analysis. Die Definition eines Begriffs wird hier in der Form einer Gleichung gegeben, welche den Vortheil bietet, den Begriff nicht nur zureichend abzugrenzen, sondern auch erschöpfend zu bestimmen, so dass aus ihr alle seine Eigenschaften entwickelt werden können. Zu diesen Eigenschaften gehört auch die Gliederung in Unterbegriffe. Sie verwirklicht sich in einer Reihe specieller Gleichungen, die aus der zuvor aufgestellten allgemeinen als deren einzelne Fälle hervorgehen. Zu ihrer Ableitung bedarf es zunächst der Auffindung der logischen Variabeln, welche ihrer Natur nach stets unter den algebraischen Constanten der Gleichung zu wählen sind, da nur diese allgemein solche Werthe bezeichnen, die in dem Begriff auch dann constant bleiben, wenn er sich auf ein individuelles Object bezieht. Die algebraischen Variabeln dagegen haben die Eigenschaft, noch für die Individualbegriffe variabel zu bleiben, in denen logische Variabeln gar nicht mehr vorkommen können. Nachdem nun zum Zweck der analytischen Classification die logischen Variabeln einer allgemeinen Gleichung bestimmt und deren einzelne Specialwerthe in diese eingeführt sind, können sich Transformationen und Vereinfachungen der allgemeinen Gleichung ergeben, durch welche die Specialgleichungen von einander abweichende Formen annehmen. Geben wir z. B. der allgemeinen Gleichung eines Kegelschnitts die Form

$$y^2 = 2ax + vx^2,$$

so lassen sich, wenn wir $v$ als logische Variable wählen, die drei Hauptfälle $v = -b$, $v = 0$ und $v = +b$ unterscheiden, entsprechend den drei Haupformen:

| Kreis und Ellipse | Parabel | Hyperbel |
|---|---|---|
| $y^2 = 2ax - bx^2$ | $y^2 = 2ax$ | $y^2 = 2ax + bx^2$. |

Ein Beispiel mit zwei Eintheilungsgründen sei hier nur andeutend ausgeführt. Der analytische Begriff der homogenen ganzen Function lässt sich durch das logische Symbol ausdrücken

$$F(p, m, n),$$

worin $p$ die Zahl der Constanten, $m$ den Grad der Functionsgleichung und $n$ die Zahl ihrer algebraischen Variabeln bezeichnen. Wählt man nun $m$ und $n$, die nur ganze Zahlen sein können, als Eintheilungsgründe, so gewinnt man für $m = 1, = 2, \ldots$ die Functionen 1ten, 2ten ... Grades, und innerhalb jeder dieser Classen wieder durch Variirung von $n$ die Functionen mit 1, 2, 3 ... Variabeln. Die Grössen $m$ und $n$ besitzen den Charakter erschöpfender Eintheilungsgründe, da durch sie auch $p$ bestimmt wird. Denn zwischen der Zahl $p$ der Constanten und jenen logischen Variabeln $m$ und $n$ besteht die Beziehung:

$$p = \frac{n \,.\, (n + 1) \,.\, (n + 2) \ldots (n + m - 1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots m}.$$

Ausserhalb der Mathematik kann zwar ebenfalls eine analytische Classification erstrebt werden. Sie ist aber hier in Folge der mangelhafteren Form der analytischen Definitionen, an die sie sich in der wissenschaftlichen Anwendung anschliesst, von geringerer Sicherheit, so dass ihr selbst auf den für sie geeigneten Begriffsgebieten (siehe S. 45) nicht selten eine genetische Gliederung vorgezogen wird.

### e. Die Zwei-, Drei- und Viertheilung.

Die Zwei-, Drei- und Viertheilung haben sich, als die einfachsten äusseren Formen, in denen überhaupt ein Begriff eingetheilt werden kann, stets einer besonderen Bevorzugung zu erfreuen gehabt. Sie können in jeder der oben unterschiedenen Classificationsformen vorkommen, sind aber doch weitaus am häufigsten bei der descriptiven in Folge der grösseren Freiheit, mit der sich diese in der Wahl der Eintheilungsgründe bewegt.

Die Zweitheilung gründet sich auf den contradictorischen Gegensatz, insofern er als das logische Princip betrachtet werden kann, welches jeder Unterscheidung eines Begriffs von einem anderen Begriff zu Grunde liegt. (Bd. I, S. 566.) Es zerfällt aber die Zweitheilung wieder in zwei Formen, je nachdem der einem ersten Begriff $A$ gegenübergestellte andere Begriff non-$A$ bloss negativ bestimmt bleibt, der ursprünglichen Bedeutung des contradictorischen Gegensatzes entsprechend, oder ebenfalls positiv als ein gewisser

Begriff $B$ unterschieden wird, wo dann der contradictorische Gegensatz nur insofern noch Anwendung findet, als die Vollständigkeit der Eintheilung verlangt, dass gleichzeitig $B =$ non-$A$ und $A =$ non-$B$ sei. Ein ausgezeichneter Fall dieser positiven Dichotomie ist es, wenn $A$ und $B$ im Verhältniss des conträren Gegensatzes zu einander stehen. Hiernach unterscheiden wir drei Formen der Zweitheilung: 1) Die Dichotomie nach dem contradictorischen Gegensatze, 2) die Dichotomie der einfachen Unterscheidung und 3) die Dichotomie nach dem conträren Gegensatze. Unter ihnen ist die erste die unvollkommenste, obgleich sie sich grosser Beliebtheit deshalb erfreut, weil sie den Vortheil hat immer vollständig zu sein. Dieser Vortheil wird aber durch den Nachtheil erkauft, dass das eine Glied der Eintheilung nur negativ bestimmt ist. Denkt man sich daher eine ganze Classification nach diesem Princip durchgeführt, so gewinnt man schliesslich für die Hälfte der Glieder des Systems bloss negative Definitionen. Auch leistet diese Form insofern der Willkür Vorschub, als es für die logische Vollständigkeit der Gliederung ganz gleichgültig ist, welcher Art das Merkmal $A$ ist, nach dem man irgend ein Gebiet in $A$ und non-$A$ trennt. Ein Beispiel dieser Classificationsform bietet Ehrenbergs zoologisches System. Es scheidet in Wirbelthiere und Wirbellose, die ersteren in Junge nährende und nicht nährende, die letzteren in Thiere mit Herz und ohne Herz, die Wirbellosen mit Herz wieder in gegliederte und nicht gegliederte, die Thiere ohne Herz in solche mit getheiltem Darm und nicht getheiltem Darm*). Ferner eine Classification der Sprachen von Steinthal. Sie unterscheidet Formsprachen und formlose Sprachen; jene zerfallen in solche mit und ohne Scheidung von Nomen und Verbum, diese in solche mit und ohne Kategorien**). Häufiger noch sind die Dichotomien der einfachen Unterscheidung. Sie pflegen namentlich Hauptgliederungen von Systemen zu bilden, weil man bei diesen sich vorzugsweise der Einfachheit befleissigt. Hierher gehören die Eintheilungen der Organismen in Pflanzen und Thiere, der Pflanzen in Thallophyten und Cormophyten, der Urtheile in kategorische und hypothetische, der Seelenvermögen in Vorstellen und Begehren, des Seienden in Stoff und Form u. s. w. Ihnen nahe stehen die Dichotomien nach dem conträren Gegensatz, wie Kälte und Wärme, Tag und Nacht, männ-

*) Carus, Geschichte der Zoologie, S. 671.

**) Steinthal, Die Classification der Sprachen. Berlin 1850.

liches und weibliches Geschlecht. Zur Classification sind diese minder brauchbar, weil der conträre Gegensatz zuweilen Zwischenformen gestattet, so dass hier von vornherein die Eintheilung an dem Fehler der Unvollständigkeit leidet.

Aus diesem Grunde geht denn auch die Dreitheilung nicht selten aus der Dichotomie des conträren Gegensatzes hervor, indem man die zwischen den Endgliedern einer Begriffsreihe gelegenen Uebergänge unter einem gemeinsamen Begriff zusammenfasst. So liegt zwischen dem Guten und Bösen das Indifferente, zwischen dem Erhabenen und Niedrigen das einfach Schöne, oder man verlegt zwischen den Apriorismus und Empirismus den Kriticismus, zwischen den Materialismus und Spiritualismus einen unbestimmten Monismus. Auch aus der Dichotomie nach einfacher Unterscheidung kann auf ähnliche Weise eine Trichotomie werden. So hat man neben den Pflanzen und Thieren die Protisten als Zwischenwesen unterschieden, zwischen die Gesetzesübertretung und das Verbrechen das Vergehen als eine weitere Gradabstufung eingeschaltet. Hegels dialektische Methode endlich besteht in Trichotomien, die auf Zweitheilungen nach contradictorischem Gegensatze gegründet sind. Dabei kann aber selbstverständlich der dritte Begriff nicht ein Mittelbegriff sein, sondern nur auf dem Weg der Synthese erzeugt werden, wie z. B. bei der Vereinigung des Seins und des Nichtseins zum Werden. Uebrigens treten in der weiteren Ausführung nicht selten an die Stelle der contradictorischen auch conträre Gegensätze und sogar einfache Unterscheidungen.

Die Viertheilung pflegt aus der Combination von zwei Dichotomien zu entstehen. So gewann die scholastische Logik eine Viertheilung der Urtheilsformen, indem sie einerseits bejahende und verneinende, anderseits allgemeine und besondere Urtheile unterschied. Ein weiteres Beispiel einer Tetratomie nach conträren Gegensätzen bietet die Aristotelische Ableitung der vier Elemente, nach welcher Wasser das feuchte und kalte, Erde das trockene und kalte, Luft das feuchte und warme, Feuer das trockene und warme Element ist. So unanfechtbar auch in logischer Beziehung derartige Eintheilungen sind, so gründen sie sich doch, wie diese Beispiele zeigen, auf oberflächliche und ungenügende Unterscheidungen; daher die künstlichen Trichotomien und Tetratomien in dem Masse verschwinden, als sich die Untersuchung der Begriffe vertieft und das Streben nach sachgemässer Ordnung über das Wohlgefallen an äusserer Symmetrie den Sieg davonträgt.

## 3. Der Beweis.

### a. Allgemeine Aufgaben des Beweisverfahrens.

Als *Beweisführung* oder *Demonstration* bezeichnen wir die Darlegung der Gründe, durch welche die Wahrheit oder Wahrscheinlichkeit eines gegebenen, einen realen Erkenntnissinhalt aussprechenden Urtheils festgestellt wird. Die Aufgaben eines jeden Beweisverfahrens bestehen daher erstens in der Aufsuchung der Prämissen zu dem zu beweisenden Satze und zweitens in der Herstellung einer Schlussfolge aus jenen Prämissen. Der ersten dieser Aufgaben wird durch die *Herbeischaffung des Beweismaterials* entsprochen, der zweiten durch die *Ordnung der Beweisgründe* und den *Vollzug der Schlussfolgerung*.

Hiernach ist der Beweis diejenige systematische Form, welche unmittelbar den Forschungsmethoden der *Induction* und *Deduction* entspricht. Er hat wie diese den Schluss zu seiner Grundform; er unterscheidet sich aber von ihnen dadurch, dass es sich bei ihm nicht erst um die Auffindung eines Satzes, sondern um die Nachweisung der Richtigkeit eines bereits gefundenen handelt. Es kann sich daher ein Beweis bald auf das engste an eine ihm zu Grunde liegende Induction oder Deduction anschliessen, bald sich mehr oder weniger weit von ihr entfernen, bald auch eine vorangegangene Induction in eine Deduction, oder sogar umgekehrt diese in eine inductive Form umwandeln. Mit Rücksicht auf seine systematische Bedeutung hat zugleich der Beweis im allgemeinen im Vergleich mit jenen Forschungsmethoden einen *enger begrenzten* Zweck. Er bezieht sich auf die Wahrheit eines *einzelnen Urtheils*, während sich Induction und Deduction über eine grosse Zahl von Urtheilen erstrecken können, die aus gewissen mit einander im Zusammenhang stehenden Prämissen abgeleitet werden.

Jede Beweisführung stützt sich schliesslich auf irgend welche Thatsachen der Erfahrung. Diese Thatsachen können entweder durch die Abstraction zu Sätzen verarbeitet sein, die sich auf die allgemeinen Formen der Anschauung beziehen und, weil sie sich fortwährend in der Anschauung bestätigt finden, den Charakter unmittelbarer anschaulicher Gewissheit besitzen; oder sie können den concreten Inhalt der Erfahrung zu ihrem Gegenstande haben. Demnach können wir überhaupt die thatsächlichen Grundlagen des Be-

weises in Thatsachen der reinen Anschauung und in empirische Thatsachen scheiden. Auf jenen beruht das Beweissystem der Mathematik, auf diesen das Beweisverfahren in den empirischen Wissenschaften und im praktischen Leben. Die beiden letzteren trennen sich aber wieder dadurch von einander, dass die Erfahrungswissenschaft die einzelnen Erfahrungen, ehe sie dieselben zur Demonstration verwerthet, durch Abstraction und Induction zu allgemeingültigen Erfahrungssätzen zu erheben sucht, während das praktische Beweisverfahren, wie es z. B. zum Behuf der Rechtsprechung geübt wird, unmittelbar die einzelnen Thatsachen selbst als Prämissen benützt. Im letzteren Fall hat der Beweis stets die Form eines Inductionsbeweises, und es fehlt ihm, dem logischen Charakter der Inductionsschlüsse entsprechend, im allgemeinen die unbedingt zwingende Kraft, so dass dem Endurtheil immer nur eine mehr oder minder grosse Wahrscheinlichkeit zugestanden werden kann, die aber freilich unter Umständen für die Zwecke des praktischen Lebens der Gewissheit gleichzuachten ist. Uebrigens pflegen in derartigen Fällen auch solche Formen der Begründung eines Urtheils als Beweise bezeichnet zu werden, die diesen Namen streng genommen nicht verdienen. So ist in dem richterlichen Verfahren zwar der Indicienbeweis ein echter Inductionsbeweis, dagegen kann der so genannte Zeugenbeweis, sofern es sich bei ihm um die unmittelbare Bezeugung der in Frage stehenden Thatsachen handelt, nicht zu den logischen Beweisverfahren gerechnet werden, da das Urtheil nicht aus anderen Beobachtungen erschlossen wird, sondern ein Ausdruck der Beobachtung selbst ist.

In den theoretischen Erfahrungswissenschaften gehen ausser den Thatsachen der Erfahrung und den durch Abstraction und Induction aus ihnen gewonnenen Sätzen nicht selten noch hypothetische Voraussetzungen in die Prämissen der Beweise ein. Dies ereignet sich in der Physik z. B. bei jenen Beweisführungen, die auf bestimmte Anschauungen über die Constitution der Materie oder auf die Annahme gewisser elementarer Gesetze derselben gegründet sind. Von hier aus hat die Aufstellung hypothetischer, absichtlich den Thatsachen der Anschauung irgendwie widerstreitender Definitionen auch in die Mathematik Aufnahme gefunden. Selbstverständlich haben dann aber die Beweisresultate ebenfalls so lange nur einen hypothetischen Werth, als sich nicht etwa aus den Folgerungen die Zulässigkeit der Hypothesen ergibt.

Die Prämissen des Beweisverfahrens in den theoretischen Wissenschaften, die Definitionen, Axiome und Theoreme, sind bei der Deduction bereits besprochen worden (S. 34). Sie werden bei der Verbindung der Beweise zu einem deductiven System in der durch ihre logische Abhängigkeit bestimmten Ordnung an einander gereiht. Namentlich in der Mathematik ist diese Ordnung strenge ausgebildet. Fundamentale Lehrsätze sind hier solche, die direct aus evidenten Axiomen bewiesen werden. Abgeleitete Lehrsätze bedürfen anderer bereits erwiesener Theoreme zu ihrer Begründung. Ein Corollarsatz endlich ist ein solcher, der aus einem bestimmten schon bewiesenen Lehrsatze durch blosse Transformation desselben gewonnen werden kann. So gehören in dem Beweissystem Euklids die Sätze über die Congruenz der Dreiecke zu den Fundamentalsätzen; dagegen sind die Sätze über den Flächeninhalt der Parallelogramme und die Gleichheit der gegenüberliegenden Winkel in ihnen abgeleitete Lehrsätze. Endlich der Satz, dass Parallelen zwischen Parallelen gleich lang sind, ist ein Corollar zu dem Lehrsatze, dass in jedem Parallelogramm die gegenüberliegenden Seiten von gleicher Grösse sind. In den theoretischen Erfahrungswissenschaften behält das Beweisverfahren im allgemeinen diesen Charakter. Es gestaltet sich aber mannigfaltiger in Folge des verschiedenartigeren Ursprungs seiner Prämissen. Einerseits können, namentlich in der theoretischen Physik, rein mathematische Axiome und Theoreme herbeigezogen werden, da ja die allgemeinen Gesetze der Anschauung auch für jede einzelne Erfahrung gültig sind; anderseits treten dazu, dem specifischen Erfahrungsinhalte entsprechend, Verallgemeinerungen aus der Erfahrung und hypothetische Voraussetzungen, die beide völlig gleichwerthig den Axiomen und Definitionen im mathematischen Beweisverfahren behandelt werden. Weil übrigens die an die Stelle der Axiome getretenen allgemeinen Erfahrungssätze häufig nicht ohne weiteres durch einen blossen Hinweis auf die Wahrnehmung als gewiss gelten können, so tritt zugleich der Inductionsbeweis als ein wichtiges Ergänzungsglied ein. Je mehr in einer Disciplin die concrete Erfahrung über die allgemeinen Voraussetzungen und in Folge dessen die empirische über die mathematische oder speculative Betrachtung überwiegt, einen um so breiteren Raum nimmt der Inductionsbeweis ein, bis dieser endlich in allen den Fällen der concreten wissenschaftlichen Untersuchung oder des praktischen Lebens, wo es sich nicht um die Gewinnung allgemeiner Sätze, sondern um den Nachweis von Thatsachen handelt,

die nicht direct beobachtet sondern bloss erschlossen worden sind, als der allein mögliche zurückbleibt.

Obgleich der Beweis die Induction und Deduction zu seinen Zwecken verwerthet und ausser ihnen keine anderen Hülfsmittel zur Verfügung hat, so unterscheidet er sich doch von diesen Untersuchungsmethoden, wie schon oben bemerkt, durch den Umstand, dass der zu beweisende Satz oder die zu beweisende Thatsache bereits vor dem Antritt des Beweises gegeben ist. Nicht selten befolgt darum auch noch heute diejenige Wissenschaft, in der die Kunst des Beweises zur höchsten Ausbildung gelangt ist, die Mathematik, die Euklidische Regel, den zu demonstrirenden Lehrsatz dem Beweise voranzustellen, damit der Zweck des letzteren von Anfang an im Auge behalten werde. Die Art und der Grad der Kenntniss eines Demonstrandum können übrigens wieder auf das mannigfachste variiren, von der blossen Vermuthung an bis zur sicheren, durch unmittelbare Erfahrung oder die vorangegangene Untersuchung festgestellten Ueberzeugung. Darum kann nun auch der Zweck des Beweises entweder darin bestehen, eine noch unsichere Annahme zur Gewissheit zu erheben, manchmal auch einem erst in beschränkterem Umfange nachgewiesenen Satz die Allgemeingültigkeit zu sichern, oder er kann sich darauf beschränken, die Resultate einer zuvor abgeschlossenen Untersuchung in die Beweisform zu ordnen, und im zweiten Fall wird sich dann selbstverständlich der Beweis mehr oder weniger innig an die Untersuchung anschliessen. Selten aber wird er sich auf eine blosse Reproduction der Untersuchung beschränken dürfen. Denn für allgemeine Wahrheiten wie für einzelne nicht direct beobachtete Thatsachen pflegen sich nur durch einen besonders günstigen Zufall die Beweisgründe schon der Untersuchung in der zweckmässigsten Reihenfolge und Verbindung darzubieten. Erst die Ordnung des Beweismaterials hat ihnen diese für die Schlussfolge angemessenste Verbindung zu geben. Ein augenfälliges Zeugniss für diese selbständige Aufgabe des Beweisverfahrens liegt darin, dass es Beweisformen gibt, denen keine bestimmten Untersuchungsmethoden entsprechen, ebenso wie sich anderseits nicht alle Bestandtheile einer Untersuchung in die Beweisform umprägen lassen. Die Mathematik kennt zahlreiche Sätze von axiomatischem Charakter, die ohne eine eigentliche Untersuchung feststehen, weil sie unmittelbar in der Anschauung gegeben sind. Gleichwohl kann man in solchen Fällen den Versuch machen, durch einen Beweis den nothwendigen logischen Zusammenhang derartiger Sätze mit den allgemeinen Gesetzen unserer

Anschauung darzuthun. Die Beweise pflegen dann die apagogische Form anzunehmen, eine Form der keine specifische Untersuchungsmethode correspondirt. Auf der anderen Seite bleiben alle wissenschaftlichen Aufgaben, die entweder der Gewinnung zu beweisender Lehrsätze vorangehen oder sich an bewiesene Sätze als deren Anwendungen anschliessen, der eigentlichen Untersuchung vorbehalten. Indem solche Aufgaben die Anwendung constructiver und experimenteller Verfahrungsweisen nothwendig machen, setzen sie ein Mass erfinderischer Thätigkeit voraus, welches über die blosse Herbeischaffung von Beweismaterial hinausgeht, da es dieses vielmehr erst hervorbringt. Charakteristisch ist darum die Stellung, die schon in Euklids Beweissystem das Problem gegenüber dem Theorem einnimmt. Theils gehen hier Probleme und ihre Lösungen den Lehrsätzen eines bestimmten Gebietes voran, theils folgen sie ihnen nach. In den Aufgaben der ersten Art sind die Resultate der Untersuchungen fixirt, welche die Gewinnung der zu beweisenden Theoreme vorbereiten; die Aufgaben der zweiten Art zeigen die Anwendungen, welche die Lehrsätze auf die einzelne Untersuchung zulassen. Nun kann zwar, wie es bei Euklid in der That geschieht, der Nachweis, dass die in der Aufgabe liegende Construction richtig ausgeführt wurde, wieder durch eine Demonstration geführt werden. Doch die Lösung des Problems muss vor dieser Demonstration geschehen, und sie ist der eigentliche Gegenstand der Untersuchung. Sie aber liefert für die Beweise der nachfolgenden Lehrsätze das Material, weil bei ihnen die zur Lösung der Aufgaben angewandten Constructionsmethoden wieder zur Anwendung kommen.

Aus diesem Verhältniss zur vorangegangenen Untersuchung ergeben sich zugleich die Gesichtspunkte für die Unterscheidung der Beweisformen. Ist nämlich durch die Untersuchung ein Beweismaterial geschaffen worden, aus welchem der zu beweisende Satz unmittelbar abgeleitet werden kann, so wird das directe Beweisverfahren gewählt, das in der einfachen Anwendung der Schlussnormen auf die durch die Untersuchung gewonnenen Erkenntnissgründe besteht. Vermag dagegen die Untersuchung ein solches Beweismaterial nicht zu schaffen, sondern nur die Ueberzeugung zu erwecken, dass andere Sätze, die an Stelle des zu beweisenden postulirt werden könnten, aus bestimmten Gründen nicht zulässig sind, so wird ein indirectes Beweisverfahren erforderlich, dessen bindende Kraft lediglich auf der Beseitigung der etwa möglichen anderen Annahmen beruht.

b. Die directen Beweisformen.

Da sich das directe Beweisverfahren unmittelbar an eine vorangegangene Untersuchung anschliesst, deren Resultate es als Beweisgründe verwerthet, so richten sich nach den Hauptformen der Untersuchung auch die Hauptformen des directen Beweises. Dieser wird entweder deductiv oder inductiv geführt, wobei hier die deductive Beweisform als die strengere und deshalb in der Regel bevorzugte voranzustellen ist. Sie zerfällt in mehrere Unterformen, die charakteristische logische Unterschiede darbieten.

Unter ihnen schliesst sich der synthetische Deductionsbeweis am nächsten an die Form des Subsumtionsschlusses an. Er ist es daher, der sich überall da, wo aus gegebenen allgemeinen Sätzen ein einzelnes Urtheil oder ein allgemeiner Satz von beschränkterer Bedeutung als specielle Folge abgeleitet werden soll, als die geeignetste Form darbietet. Der überwiegende Werth, den die antike Logik auf den Subsumtionsschluss legte, hat dieser Beweisform lange Zeit ein Uebergewicht über alle anderen gesichert. Das Euklidische Beweissystem stützt sich darum vorzugsweise auf sie. Ihre Anwendung führt hier zu jener regelmässigen Anordnung der einzelnen Sätze, wie sie sich zu erkennen gibt in der vorläufigen Aufzählung der Definitionen und Axiome, in der Voranstellung der fundamentalen vor den abgeleiteten Lehrsätzen, der Constructionsaufgaben vor den sie verwerthenden Theoremen. In der strengen logischen Ordnung der Beweisgründe und der abgeleiteten Sätze besteht der Vorzug dieses Verfahrens, sein Nachtheil in dem Umstande, dass namentlich in verwickelteren Fällen der Zusammenhang eines Theorems mit seinen Beweisgründen zwar nach der Führung des Beweises vollkommen deutlich ist, dass aber der Weg, auf dem man zur Auffindung der Beweisgründe gelangte, durchaus dunkel bleibt, so dass diese Auffindung wie eine zufällige Entdeckung erscheinen kann. Wenn z. B. Euklid durch die Ziehung von Hülfslinien den Pythagoreischen Lehrsatz auf den einfacheren Satz zurückführt, dass ein Parallelogramm, das mit einem Dreieck die nämliche Grundlinie hat und zwischen denselben Parallellinien liegt, den doppelten Flächeninhalt besitzt, so wird dadurch der zu beweisende Satz vollkommen evident; es ist aber nicht im geringsten deutlich, warum man zu den schliesslich durch den Erfolg gerechtfertigten Hülfsconstructionen gelangen musste. Darum contrastirt bei diesem

Beweisverfahren mit der strengen logischen Anwendung der Beweisgründe die scheinbare Zufälligkeit ihrer Gewinnung.

Ohne Zweifel liegt in diesem Nachtheil der Grund, weshalb schon die Alten für gewisse Fälle an die Stelle des synthetischen ein analytisches Beweisverfahren treten liessen, und dieses hat sich, ursprünglich nur ausnahmsweise zugelassen, allmählich auf den meisten Gebieten den Vorrang vor dem synthetischen zu erringen vermocht. Das überall zutreffende Kennzeichen des analytischen Beweises besteht aber darin, dass derselbe den zu beweisenden Satz als feststehend annimmt, um aus ihm Folgerungen zu ziehen, durch deren Richtigkeit dann nachträglich seine Wahrheit verbürgt wird. Dieses Verfahren kann nun wieder in zwei verschiedenen Formen zur Anwendung kommen, die sich durch die Beschaffenheit der analytisch gewonnenen Folgerungen wesentlich unterscheiden. In dem einen Falle nämlich sind diese Folgerungen allgemeinere Sätze, entweder fundamentalere Theoreme oder Grundsätze, in dem anderen sind sie speciellere Sätze oder einzelne Thatsachen der Erfahrung. Wir wollen die erste als die kategorische, die zweite als die hypothetische Form des analytischen Beweises bezeichnen, mit Rücksicht darauf, dass nur bei der ersten der Schlussfolgerung eine bindende Nothwendigkeit zukommt, während dieselbe bei der zweiten bloss als eine mehr oder minder hypothetische betrachtet werden kann.

Die alten Mathematiker haben unter diesen analytischen Beweismethoden allein die kategorische gekannt. So beweist Euklid folgenden Satz sowohl auf analytischem wie auf synthetischem Wege: „Wenn eine Linie $AB$ nach dem goldenen Schnitt getheilt ist ($AB : AC = AC : CB$), und wenn der grössere Theil $AC$ um eine Strecke $AD = AC$ verlängert wird, so ist die zusammengesetzte Linie $BD$ ebenfalls nach dem goldenen Schnitt getheilt ($BD : BA = BA : AD$).“ Der analytische Beweis nimmt die letztere Proposition als zugestanden an. Es ist dann, da $AD = AC$ ist, auch $BD : BA = BA : AC$. Wenn aber die grösseren Stücke zweier Linien den ganzen proportionirt sind, so müssen es auch die kleineren Stücke sein, also $BD : AD = BA : BC$; und da ferner, wenn verbundene Grössen proportional sind, auch die getrennten proportional sein müssen und umgekehrt, so folgt weiter $BA : AD = AC : BC$, und daraus, da $AD = AC$, $BA : AC = AC : BC$, was vorausgesetzt war. Der synthetische Beweis dagegen geht von dieser Voraussetzung aus, folgert zunächst $BA : AD = AC : BC$, hieraus, unter Zuhülfe-

nahme des oben angeführten Satzes von der Proportionalität verbundener und getrennter Grössen, $BD : AD = BA : BC$, hieraus ferner mittelst des Satzes von der Proportionalität der kleineren und grösseren Stücke zu den ganzen Linien, $BD : BA = BA : AC$, und daraus endlich $BD : BA = BA : AD$, was zu beweisen war*). Dieses Beispiel zeigt deutlich, dass hier der analytische die reine Umkehrung des synthetischen Beweisganges ist. Die nämlichen Sätze wie bei diesem kommen auch bei jenem zur Anwendung, nur in umgekehrter Reihenfolge. Demgemäss ist auch der Schluss in beiden Fällen in gleicher Weise bindend. Indem der analytische Beweis zeigt, dass der angenommene Satz auf gewisse andere bereits feststehende Sätze als seine Erkenntnissgründe zurückführt, kommt für ihn ebenso wie für den synthetischen das allgemeingültige logische Gesetz zur Anwendung: „Mit dem Grund ist die Folge gegeben." (Bd. I, S. 371.)

Dies verhält sich anders bei der hypothetischen Form des analytischen Beweises. Hier wird der zu erweisende Satz zunächst hypothetisch angenommen, um aus ihm nicht die ihn bedingenden Erkenntnissgründe, sondern die einzelnen Folgen abzuleiten, die unter Voraussetzung seiner Gültigkeit eintreten müssen. Die Bestätigung dieser Folgen durch die Erfahrung oder auf dem Wege eines anderweitigen Beweisverfahrens liefert dann die Bestätigung der Hypothese. Hier ist nicht der Satz massgebend: „mit dem Grund ist die Folge gegeben", sondern dessen Ergänzung: „mit der Folge ist der Grund aufgehoben." Nach diesem Satze kann aber, wie schon bei Erörterung des allgemeinen logischen Verhältnisses von Grund und Folge erwähnt wurde, aus dem Eintreffen gewisser Folgen zu einem hypothetisch vorausgesetzten Grunde immer nur geschlossen werden, dass die betreffenden Folgen aus diesem Grunde erklärt werden können, nicht aber, dass sie nothwendig aus demselben erklärt werden müssen. (Bd. I, S. 355, 573.) Es kann daher die Wahrscheinlichkeit eines auf solchem Wege erwiesenen Satzes nur dadurch allmählich der Gewissheit genähert werden, dass man erstens möglichst viele thatsächlich zu bestätigende Folgen abzuleiten sucht, die auf einen und denselben Grund hinweisen, und dass man zweitens zeigt, dass andere Gründe, die denkbarer Weise die nämlichen Folgen hervorbringen könnten, nicht statthaft sind. Der erste dieser Wege ist im allgemeinen in den empirischen Wissenschaften, der zweite

*) Euklids Elemente XIII, 5.

in den mathematischen Disciplinen der gebotene. In allen diesen Beziehungen steht aber der hypothetische Deductionsbeweis mit dem nachher zu besprechenden Inductionsbeweis auf gleichem Boden. In der That pflegt er auch am häufigsten durch die einfache Umkehrung des letzteren zu entstehen.

Es ist ganz besonders das Gebiet der physikalischen Erfahrung, das zur Anwendung des hypothetischen Beweisverfahrens Veranlassung bietet. Nachdem durch Induction ein bestimmtes Gesetz gefunden ist, wird der Beweis für dasselbe analytisch geführt, indem man es als gültig voraussetzt und zeigt, dass die aus ihm abgeleiteten Folgerungen mit der Erfahrung übereinstimmen. Nicht selten aber zeigt bereits die Untersuchung dem Beweis diesen analytisch-hypothetischen Weg, indem sie von irgend einer vermutheten gesetzmässigen Beziehung ausgeht, welche durch bestimmte Beobachtungen oder experimentelle Erfahrungen bestätigt werden. Gerade in solchen Fällen pflegen wir darum auf die Untersuchung selbst schon den Namen eines Beweisverfahrens anzuwenden. So bewies Newton, dass die Erscheinungen der Ebbe und Fluth von der Schweranziehung des Mondes und der Sonne bedingt sind, indem er zeigte, dass die Beobachtungen dieser Erscheinungen mit der gemachten Voraussetzung übereinstimmen. So bewies Cavendish, dass schwere Körper einander anziehen, indem er die Ablenkung kleiner an einer Drehwage befestigter Bleikugeln durch eine in die Nähe gebrachte grössere Bleimasse feststellte. In allen diesen Fällen, wo der Gang des Beweises mit dem der Untersuchung zusammenfällt, handelt es sich um Beispiele des analytisch-hypothetischen Beweisgangs.

Im Gebiete der Mathematik und ihrer Anwendungen hat die analytische Beweismethode in ihren beiden Formen ein mächtiges Hülfsmittel an der algebraischen Symbolik gefunden. Dem analytischen Verfahren kommt diese Symbolik deshalb mehr als dem synthetischen zu statten, weil sie es möglich macht, nicht nur irgend ein Gesetz, das entweder hypothetisch angenommen wird oder aus anderweitigen Betrachtungen gewonnen ist, symbolisch auszudrücken, sondern auch durch bestimmte allgemein zulässige Operationen aus demselben andere Sätze abzuleiten, die nun entweder allgemeine Erkenntnissgründe oder specielle Folgerungen zu dem zuerst aufgestellten Gesetze sein können. Aus der Fülle der Beispiele, welche die reine Mathematik und mathematische Physik hier darbieten, mag ein dem letzteren Gebiet angehöriges genügen, welches sich der zuletzt erörterten Form der hypothetischen Beweisführung anschliesst. Die mechanische Wärme-

theorie nimmt an, dass in den gasförmigen Körpern die Molecüle in fortwährenden geradlinigen Bewegungen begriffen seien, und dass jedes Molecül seine Bewegung in gleicher Richtung so lange fortsetze, bis ein Stoss gegen die Gefässwand oder gegen ein anderes Molecül die Richtung der Bewegung ändere. Diese Annahme wird bewiesen, indem man die aus ihr sich ergebenden Folgerungen ableitet. Zu diesem Zweck muss zunächst der vorausgesetzte Bewegungszustand präciser formulirt werden. Man denkt sich demgemäss ein Gas, von dessen Theilchen jedes eine Masse $m$ und eine mittlere Geschwindigkeit $u$ besitzt, in ein würfelförmiges Gefäss von der Seitenlänge $a$ eingeschlossen. Man denkt sich ferner die Bewegungsrichtungen der Molecüle nach drei zu einander rechtwinkligen Componenten zerlegt und gestattet sich die vereinfachende Hypothese, dass die Bewegungen gleichförmig nach diesen Richtungen vertheilt seien, dass also, wenn $n$ die Gesammtzahl der Molecüle, je $\frac{n}{3}$ sich parallel der $x$-, $y$- und $z$-Axe bewegen. Offenbar muss dann jedes Theilchen $\frac{u}{2a}$ mal in der Secunde gegen eine Wand des Würfels stossen, und bei jedem Stoss wird die Masse $m$ eine Geschwindigkeit $u$ verlieren und wiedergewinnen, so dass die der Masse $m$ durch die Wand ertheilte Geschwindigkeit dem Betrag $2u$ gleichkommt. Da aber dies $\frac{u}{2a}$ mal in der Zeiteinheit geschieht, so ist $\frac{mu^2}{a}$ die Kraft, mit welcher die Gefässwand auf das stossende Molecül reagirt. Demnach kommt auf jede einzelne Würfelfläche ein Druck von der Grösse $\frac{n}{3} \cdot \frac{mu^2}{a}$, welche Grösse durch $a^2$ dividirt den auf der Flächeneinheit ruhenden Gasdruck $p = \frac{n}{3} \cdot \frac{mu^2}{a^3}$ oder

$$\frac{3}{2} pv = \frac{nmu^2}{2}$$

ergibt, worin beiderseits mit 2 dividirt und $a^3 = v$ gesetzt ist, indem unter $v$ der Voluminhalt des Würfels verstanden wird. Will man nun dieses Gesetz, welches die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung $\frac{nmu^2}{2}$ aller in einem geschlossenen Raum enthaltenen Gasmolecüle ausdrückt, mit der Erfahrung vergleichen, so bieten sich hierzu die von Boyle und von Gay Lussac gefundenen em-

pirischen Gesetze dar. Nach dem ersteren verhält sich bei gleichbleibender Temperatur das Volum eines Gases umgekehrt wie der Druck, unter dem es steht, nach dem zweiten wächst der Druck bei gleich bleibendem Volum proportional der absoluten Temperatur*). Beide Gesetze lassen sich daher zusammen durch die Gleichung ausdrücken

$$pv = T \,.\, \text{Const.},$$

wenn man mit $T$ die absolute Temperatur bezeichnet. Hieraus folgt durch Vergleichung mit der vorhin theoretisch abgeleiteten Gleichung

$$\frac{nmu^2}{2} = T \,.\, \text{Const.}$$

D. h. die Summe der lebendigen Kräfte der Gasmolecüle ist proportional der absoluten Temperatur, eine Folgerung, die durchaus mit der über den Bewegungszustand der Gasmolecüle gemachten Voraussetzung im Einklang steht. Denn da ein Gas, das auf den Nullpunkt der absoluten Temperatur abgekühlt werden könnte, keinen Druck auf die umschliessenden Wände mehr ausübte, so würde bei dem nämlichen Punkte auch die lebendige Kraft der Gasmolecüle null sein, und dieselbe wird darum von hier an proportional der Grösse der absoluten Temperatur zunehmen**).

Im Unterschiede von den bisher besprochenen deductiven Beweisformen sucht der Inductionsbeweis die Wahrheit eines Satzes durch den Hinweis auf die einzelnen Thatsachen darzuthun, die ihn als ihren Erkenntnissgrund fordern. Hierbei kann das Urtheil, dessen Wahrheit bewiesen werden soll, entweder die Bedeutung eines allgemeinen Theorems besitzen, oder es kann selbst nur eine einzelne Thatsache enthalten. Beide Fälle können als der theoretische und als der praktische Inductionsbeweis unterschieden werden.

Der erstere findet überall da seine Anwendung, wo ein Lehr-

---

*) Nach Gay Lussacs Versuchen wächst nämlich der Druck eines Gases bei dessen Erwärmung für jeden Grad der 100-theiligen Thermometerscala um $\frac{1}{273}$ des Werthes, den er bei 0° beträgt. Ebenso sinkt er selbstverständlich bei der Abkühlung für jeden Grad um $\frac{1}{273}$. Bei $-273°$ C. würde demnach der Druck gleich Null geworden sein; die Entfernung von diesem Nullpunkte gilt daher als die absolute Temperatur.

**) Die genauere mathematische Ausführung des obigen Beweises vgl. bei Clausius, Abhandlungen über die mechanische Wärmetheorie, Bd. II, Braunschweig 1867. S. 247 ff.

satz, der zur Ableitung einer Reihe einzelner Thatsachen dient, selbst nicht direct aus anderen Lehrsätzen oder aus axiomatischen Wahrheiten abgeleitet werden kann. Schon die Mathematik bedient sich daher des Inductionsbeweises vorzugsweise, um die Wahrheit der Axiome selbst oder solcher Sätze, die ihnen sehr nahe stehen, darzuthun. Der Satz z. B., dass die Multiplication zweier Zahlen $a$ und $b$ dasselbe Product ergibt, in welcher Richtung man sie auch vornimmt, dass also $a \cdot b = b \cdot a$ ist, kann nur bewiesen werden, indem man seine Richtigkeit an einzelnen Zahlenbeispielen nachweist. Von hier aus kann der nämliche Satz dann auf eine beliebige Menge von Zahlen ausgedehnt werden, indem man an einzeln herausgegriffenen Beispielen zeigt, dass er für die Producte von je zwei, drei oder mehr Zahlen gültig ist*). Wie hier, so beruht überhaupt in solchen Fällen, in denen sich der Inductionsbeweis nicht bloss auf die Anschauung beruft, sondern auf Axiome oder bereits bewiesene Sätze zurückgreift, die Führung desselben auf der Hervorhebung eines oder mehrerer charakteristischer Beispiele, an denen die Triftigkeit des zu beweisenden Satzes nachgewiesen wird. Es kann dann unter Umständen das Inductionsverfahren nur in der Sammlung dieser Beispiele bestehen, während bei jedem der letzteren ein deductiver Beweis zur Anwendung kommt. So beweist Euklid den Satz, dass der Mittelpunktswinkel im Kreis doppelt so gross ist als der zugehörige Peripheriewinkel, indem er zwei extreme Fälle herausgreift und nachweist, dass er für diese richtig ist**).

Weit ausgedehnter noch ist die Anwendung des Inductionsbeweises auf empirischem Gebiet, entsprechend der starken Betheiligung des Inductionsverfahrens an den Untersuchungsmethoden der Erfahrungswissenschaften. So kann das Gesetz, dass sich die Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Erde in jedem Theil ihrer Bahn um die Sonne bewegt, umgekehrt verhält wie das Quadrat der Entfernung beider Weltkörper, inductiv bewiesen werden aus parallel gehenden Vergleichungen einerseits der Entfernungen und andererseits der täglichen Winkelgeschwindigkeiten zu verschiedenen Jahreszeiten. Die Entfernungen am 1. Januar und 1. Juli verhalten sich z. B. wie 18910 zu 19556, die täglichen Winkelgeschwindigkeiten an den nämlichen Tagen wie 1,0695 zu 1. Dies ist aber das umgekehrte Verhältniss der Quadrate der erstgenannten Zahlen. Den

*) Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, 2. Aufl., S. 2 ff.
**) Euklid III, 20.

Satz, dass der Kohlenstoff ein vierwerthiges Element sei, sucht man zu beweisen, indem man an einer Anzahl einzelner Kohlenstoffverbindungen zeigt, dass seine Affinität dann durch freie Affinitäten anderer Elemente oder ungesättigter Verbindungen gesättigt wird, wenn sie den freien Affinitäten von vier Atomen Wasserstoffs, des zum gemeinsamen Mass der Affinitätsgrösse genommenen Elementes, äquivalent ist. Auch in diesen Fällen wird der Inductionsbeweis durch Beispiele geführt. In der Zahl der herausgegriffenen Beispiele kann man sich aber um so mehr beschränken, von je strengerer Gesetzmässigkeit die Erscheinungen sind, auf die sich jene beziehen. So genügen nöthigenfalls zwei correspondirende Entfernungen und Geschwindigkeiten, um das Newton'sche Gesetz zu beweisen, während für die Vierwerthigkeit des Kohlenstoffs eine sehr grosse Zahl von Beispielen angeführt werden muss, wenn sie auch nur annähernd als festgestellt gelten soll.

Häufiger als der reine Inductionsbeweis kommt auf einer etwas fortgeschrittenen Stufe der Naturerklärung ein gemischtes Verfahren zur Anwendung, indem entweder in den Gang des Inductionsbeweises einzelne deductive Beweismomente eingreifen oder sich an ihn anschliessen. Zahlreiche Beispiele dieser Art enthält das Fundamentalwerk der neueren Physik, Newtons Principien der Naturphilosophie, welches, so strenge es in den geometrischen und abstract mechanischen Abschnitten die deductive, und zwar vorzugsweise die synthetische Beweismethode einhält, dennoch in den eigentlich physikalischen Theilen durchweg ein gemischtes Verfahren wählt. So beweist Newton den Satz, dass die Kräfte, durch welche die Planeten in ihren Bahnen erhalten werden, nach der Sonne gerichtet und den Quadraten ihrer Abstände von ihr umgekehrt proportional sind, einerseits aus dem ersten und dritten der Kepler'schen Gesetze, und anderseits aus den allgemeinen mechanischen Sätzen über die Centripetalkräfte*). Nun sind aber die Kepler'schen Gesetze Inductionen, während die Gesetze der Centripetalkräfte in streng synthetischer Form aus der Definition derselben und den allgemeinen Grundsätzen der Mechanik abgeleitet sind; das ganze Beweisverfahren ist also ein gemischtes. Ebenso beweist Newton den Satz, dass der Mond durch die irdische Schwere von der geradlinigen Bewegung abgezogen und in seiner Bahn erhalten wird, einerseits aus den empirischen Ermittlungen über die Entfernung des Mondes von der

---

*) Principien der mathemat. Naturphilos., Buch III, Abschn. I, Lehrsatz 2.

Erde und über die siderische Umlaufszeit desselben, sowie aus der bekannten Fallgeschwindigkeit der irdischen Körper, anderseits aber aus der Voraussetzung der Gültigkeit des allgemeinen Satzes, dass die Intensität der Schwere mit dem Quadrat der Entfernungen abnimmt*). Der ganze Beweisgang besitzt in diesen Fällen den Charakter einer synthetischen Deduction. In dieser dienen aber einzelne Inductionen theils zur Feststellung des numerischen Werthes der in die Voraussetzungen eingehenden Grössen, theils zur Bestätigung der Schlussfolgerungen.

Der praktische Inductionsbeweis, welcher nicht der Feststellung allgemeiner Gesetze, sondern der Ableitung einzelner Thatsachen aus anderen Thatsachen dient, kann ebenfalls auf theoretischem Gebiete vorkommen. Es findet dies jedesmal im Verlauf einer concreten Untersuchung statt, sobald es sich darum handelt, die Wahrheit eines einzelnen Resultates der Beobachtung oder des Versuchs sicherzustellen. Auf diese Weise dienen praktische Inductionsbeweise überall als Hülfsmittel der theoretischen Induction. Wenn z. B. der Akustiker auf objectivem Wege zeigen will, dass eine gegebene Stimmgabel die bestimmte der geforderten Tonhöhe entsprechende Schwingungsdauer besitze, so lässt er sie etwa ihre Schwingungen auf eine mit bekannter und gleichförmiger Geschwindigkeit rotirende Scheibe aufzeichnen. Oder wenn der Chemiker das Vorhandensein eines Eisensalzes in einer Flüssigkeit nachweisen will, so zeigt er, dass diese die sämmtlichen einzelnen Reactionen des Eisens darbietet.

Durchaus den nämlichen Charakter besitzt der Inductionsbeweis auf praktischem Gebiete. Der Untersuchungsrichter, der den Thatbestand eines nicht direct beobachteten Verbrechens feststellen soll, sucht zunächst die Beschaffenheit der That selbst zu ermitteln, sammelt dann die Indicien und Zeugenaussagen, die auf bestimmte Personen als die muthmasslichen Thäter oder Veranlasser der Handlung hinweisen, sucht den Aufenthalt der Verdächtigen vor, während und nach der That zu erkunden, prüft das sonstige Verhalten derselben, die Wahrscheinlichkeit ihrer Aussagen, die Widersprüche, in die sie sich verwickeln, u. s. w. Das Verfahren ist hier mit Rücksicht auf den logischen Charakter der Methode kein anderes, als es der Naturforscher oder der Historiker einschlägt, wenn beide eine nicht direct beobachtete Thatsache durch die Benützung anderer

*) Ebend. Lehrsatz 4.

der Beobachtung zugänglicher Data beweisen wollen. Die verschiedene Vollständigkeit der zu Grunde liegenden Inductionen und die mehr oder weniger verwickelte Verkettung der Ursachen begründen zwar grosse Unterschiede in der Sicherheit, aber keine in der Art des Beweisverfahrens.

### c. Die indirecten Beweisformen.

Der indirecte oder apagogische Beweis sucht die Wahrheit eines Satzes festzustellen, indem er die Unwahrheit aller derjenigen Annahmen darthut, die an Stelle der zu beweisenden gemacht werden könnten. Der indirecte Beweis folgert also durch Ausschliessung; seine syllogistische Grundform ist der modus tollendo ponens des disjunctiven Schlusses, und er stützt sich mit diesem auf das Axiom des ausgeschlossenen Dritten: *A* ist entweder *B* oder non-*B* (Bd. I, S. 358 u. 566). Da nun das in diesem Axiom nur negativ bezeichnete Glied in dem disjunctiven Urtheil in verschiedener Weise positiv bestimmt sein kann, wobei nur jedesmal die Forderung gestellt ist, dass die Vollständigkeit der Disjunction der in jenem contradictorischen Gegensatze enthaltenen gleichkomme, so sind auch für den indirecten Beweis drei Hauptformen möglich, die den Hauptformen des disjunctiven Urtheils entsprechen, und die wir als die disjunctive, die conträre und die contradictorische Form bezeichnen wollen.

Gegenüber dem directen Beweise und namentlich den deductiven Arten desselben, mit denen er zunächst vergleichbar ist, leidet der indirecte in allen seinen Formen an dem Nachtheil, dass er die Wahrheit eines Urtheils nicht aus dessen eigenen Erkenntnissgründen deutlich macht, da er auf den Inhalt des Begriffs selbst nicht eingeht. Dagegen hat er den Vorzug, dass er den Umfang dieses, den der directe Beweis seinerseits unberücksichtigt lässt, untersucht, indem er alle die Wahrheit des zu beweisenden Satzes aufhebenden oder beschränkenden Gegenaufstellungen beseitigt. Im allgemeinen wird daher zwar der directe Beweis, wo er möglich ist, vor dem indirecten den Vorzug verdienen; unter Umständen aber kann es doch wünschenswerth sein, den directen durch einen indirecten Beweis zu ergänzen, um die Wahrheit des Urtheils auf dem Wege der Ausschliessung zu vollerer Evidenz zu bringen. Namentlich dann pflegt man diese Ergänzung oder selbst den Ersatz des directen durch den indirecten Beweis zu wählen, wenn der erstere ein blosser

Inductionsbeweis ist und daher an sich der wünschenswerthen Bündigkeit ermangelt. Derartige Fälle, in denen zugleich der indirecte zweifellos dem directen Beweis überlegen ist, kommen theils auf mathematischem Gebiete, theils aber und hauptsächlich bei praktischen Inductionsbeweisen vor. So ist z. B. im strafrechtlichen Verfahren der Alibi-Beweis ein indirecter Beweis. Der Umstand, dass der Angeschuldigte im Augenblick der That an einem entfernten Orte gewesen ist, beweist sicherer als alle directen Vertheidigungsgründe, dass er nicht gleichzeitig am Ort des Verbrechens selbst gewesen sein kann. Ein anderes Gebiet, für welches die indirecte Beweismethode bevorzugt zu werden pflegt, ist das der principiellen, den axiomatischen Wahrheiten nahestehenden oder unmittelbar aus bestimmten Definitionen abzuleitenden Lehrsätze. In diesen Fällen ist häufig ein directer Beweis überhaupt nicht möglich, und auch der indirecte hat mehr den Werth einer Verdeutlichung des in der unmittelbaren Anschauung oder in den Voraussetzungen bereits Gegebenen als den einer eigentlichen Argumentation. Endlich hat man noch die hauptsächlichste, manchmal sogar die allein berechtigte Function des indirecten Beweises darin gesehen, dass er die Wahrheit negativer Sätze feststelle*). Hieran ist aber nur dies richtig, dass negative Urtheile auf anderem als auf indirectem Wege nicht bewiesen werden können, da ihre Beweisführung allein darin bestehen kann, dass das entgegenstehende positive Urtheil als unzulässig dargethan wird. Es ist aber nur die dritte, eben wegen dieser Eigenschaft verhältnissmässig werthloseste Form des indirecten Beweises, die contradictorische, für die jene Behauptung zutrifft, wogegen die beiden ersten Formen sogar ausschliesslich zum Zweck positiver Beweisführungen Anwendung finden.

Die disjunctive Form des indirecten Beweises unterscheidet zunächst die verschiedenen Annahmen $A, B, C \ldots N$, die in Bezug auf eine gegebene Frage gemacht werden können; sie zeigt dann, dass unter diesen Annahmen $B, C, D \ldots N$ nicht statthaft sind, und schliesst hieraus, dass die allein übrig bleibende $A$ die richtige sei. Die wesentliche Bedingung der Gültigkeit eines solchen Beweises ist hiernach die Vollständigkeit der aufgestellten Disjunction. Da aber in dieser Beziehung, namentlich auf empirischem Gebiete, leicht ein unbeabsichtigtes Uebersehen stattfinden kann, so ist man bestrebt, wo immer möglich den indirecten durch einen directen

---

*) Trendelenburg, Logische Untersuchungen, 2. Aufl., II, S. 396.

Beweis zu ergänzen. Am ehesten kommen noch in der Mathematik disjunctive Beweise für sich allein vor wegen der grösseren Sicherheit, mit der hier vollständige Disjunctionen gebildet werden können. So in vielen Fällen bei Euklid. Den Satz z. B., dass, wenn zwei gerade Linien einander parallel sind, eine dritte, die sie schneidet, mit ihnen gleiche Wechselwinkel bildet, beweist Euklid, indem er von der Disjunction ausgeht: entweder sind die Wechselwinkel $\alpha$ und $\beta$ gleich, oder $\alpha$ ist grösser als $\beta$, oder $\beta$ grösser als $\alpha$. Er weist dann die Unmöglichkeit der zwei letzteren Annahmen nach, wobei er sich hier wegen der genauen Analogie der beiden Fälle auf den Nachweis der Unmöglichkeit des einen, z. B. von $\alpha > \beta$, beschränken kann*). Astronomisch suchte man die Eigenbewegung unseres Sonnensystems im Weltraum zu beweisen, indem man schloss: Es gibt scheinbare Bewegungen der Fixsterne, welche nicht herrühren können 1) von der Bewegung der Erde (der Parallaxe), weil sie keine jährliche Periode zeigen, 2) von der Bewegung des Lichtes (der Aberration), aus demselben Grunde, 3) von der secularen Bewegung der Erdaxe, weil sie mit der entsprechenden secularen Periode nicht übereinstimmen, 4) von der eigenen Bewegung der Fixsterne, weil von dieser wegen der sehr grossen Zahl der Fixsterne vorausgesetzt werden kann, dass sie nach den verschiedenen Richtungen des Raumes annähernd gleichförmig vertheilt sei. Es bleibt daher nur übrig, die eigene Bewegung unseres Sonnensystems als die Ursache eines Theils der scheinbaren Bewegungen anzunehmen.

Die conträre Form des indirecten Beweises stützt sich auf ein alternatives Urtheil von der Form: $A$ ist entweder $B$ oder $C$. (Bd. I, S. 203.) Da nun überall wo ein Begriff in nur zwei positiv bestimmbare Theile zerlegt wird, diese zugleich in das Verhältniss des conträren Gegensatzes zu einander treten, so besteht das Wesen eines aus einem alternativen Urtheil mit positiv bestimmten Begriffen hervorgehenden Beweises immer darin, dass die Wahrheit einer Behauptung erwiesen wird, indem man die Unmöglichkeit ihres conträren Gegensatzes nachweist. Während die disjunctive Form des indirecten Beweises bereits mehrfach als eine selbständige gegenüber der contradictorischen anerkannt wurde**), pflegt man die conträre mit

*) Euklid I, 29. Als weitere Beispiele der disjunctiven Beweisform vgl. Euklid I, 6 und 19.

**) Trendelenburg, Logische Untersuchungen, 2. Aufl., II, S. 431. Vgl. a. Sigwart, Logik, II, 2. Aufl., S. 285 ff. Völlig unbrauchbar ist die von Lotze ge-

dieser zusammenzuwerfen, eine Verwechslung, die wohl darin ihren Grund hat, dass auch im sprachlichen Ausdruck der conträre mit dem contradictorischen Gegensatz häufig vermengt wird. In der That aber werden wir überall, wo für das negativ bestimmte Glied einer Alternative eine zutreffende positive Definition möglich ist, das Vorhandensein eines conträren, nicht eines contradictorischen Gegensatzes anerkennen müssen. So sind z. B. Endlichkeit und Unendlichkeit des Raumes dem ersteren zuzurechnen; denn die Unendlichkeit lässt sich als diejenige Eigenschaft definiren, vermöge deren in jeder Richtung über jeden noch so entfernten Punkt hinaus ein weiterer Fortschritt möglich ist, und ebenso die Endlichkeit als diejenige Eigenschaft, vermöge deren es in jeder Richtung zwei Punkte gibt, die weiter als alle anderen Punkte der nämlichen Richtung und doch zugleich um eine messbare Grösse von einander entfernt sind. Aehnlich verhalten sich Primzahlen und Nicht-Primzahlen, denn die letzteren lassen sich positiv definiren als diejenigen Zahlen, die ausser durch die Einheit und durch sich selbst noch durch eine andere ganze Zahl theilbar sind, u. s. w. Dagegen sind Substanzen, die nicht existiren, Kreise, die keinen gemeinsamen Mittelpunkt haben, Functionen, die sich in keine Potenzreihe entwickeln lassen, und andere ähnliche Begriffe nur negativ definirbar, so dass, wo sie zu Gegenständen indirecter Beweise werden, diese die contradictorische Form annehmen. Da nun solche nur negativ bestimmte Begriffe regelmässig dann auftreten, wenn der zu beweisende Satz selbst verneinender Art ist, so scheidet sich demnach der contradictorische von dem disjunctiven sowie dem conträren Beweis durch das Kennzeichen, dass jener nur für Sätze von negativem Inhalt gebraucht wird, während die letzteren stets für positive Sätze eintreten oder doch für solche, die trotz der etwa gebrauchten Form der Verneinung eine positive Bedeutung haben und sich daher leicht in die positive Form umwandeln lassen.

Folgt man dem zuletzt erwähnten Kriterium, so zeigt sich sofort, dass die wichtigsten unter den sogenannten apagogischen Beweisen der conträren Form angehören. Während aber die disjunctive Form auch auf empirischem Gebiete sehr verbreitet vorkommt, ist die conträre vorzugsweise auf speculativem, in der Mathematik

gebene Eintheilung der indirecten Beweise (Logik, S. 222 f.), welche, lediglich nach Analogie der directen Beweise ausgeführt, die wichtigsten Unterschiede ignorirt und dagegen Formen unterscheidet, die nirgends vorkommen und zum Theil sogar dem Wesen des indirecten Beweisverfahrens widerstreiten.

und Philosophie, zu Hause. Hierher gehören die zahlreichen apagogischen Beweise, deren sich Spinoza bedient*), die Beweise der Kantischen Antinomien, ferner die Begründungen der Thesen und Antithesen, die in Bezug auf die allgemeinsten mechanischen und physikalischen Grundsätze im Verlaufe der Entwicklung der Physik aufgetreten sind**). Es ist ein für die Anwendung dieser Demonstrationsart bedenkliches Symptom, dass sie sich, wie die letzterwähnten Beispiele zeigen, als Werkzeug zur Unterstützung entgegengesetzter Behauptungen gebrauchen lässt. Immerhin kann hierfür nicht der Beweisform als solcher die Schuld aufgebürdet werden, sondern entweder beruhen die Widersprüche, in die sie verwickelt, auf der Zweideutigkeit der sprachlichen Bezeichnungen, wie grossentheils bei den Dilemmen der Alten, oder auf widerstreitenden Motiven des speculativen Denkens, wie bei den ontologischen Antinomien der Kosmologie und Physik, und im letzteren Fall sind die antithetischen Beweisführungen zwar nicht für den Zweck, für den sie angeblich eintreten, wohl aber für die Untersuchung jener Motive und ihrer etwaigen Berechtigung von grossem Werthe.

Völlig anders verhält es sich mit den mathematischen Beweisen dieser Art. Bei ihnen handelt es sich wirklich um die indirecte Begründung eines positiven Satzes durch den Nachweis der Unrichtigkeit seines conträren Gegentheils. Dabei pflegt aber dieses nicht strenge begrenzt zu sein, sondern aus einer unbestimmten Anzahl von Fällen zu bestehen, von denen immer nur einzelne herausgegriffen werden können, um an ihnen die Annahme des Gegentheils ad absurdum zu führen. Dadurch tritt diese Art mathematischer Beweisführungen in Analogie einerseits mit dem directen Beweis durch Beispiele, anderseits mit der disjunctiven Form des indirecten Beweises. Von der letzteren scheidet sie sich aber wesentlich durch die unbestimmte Zahl der Fälle, ein Umstand, der zugleich sehr geeignet ist, die Verwechslung mit der contradictorischen Form des apagogischen Beweises zu begünstigen. Immerhin bleibt der Gesammtbegriff, welchem das herausgegriffene Beispiel angehört, positiv definirbar, und es kann daher auch sein Gegensatz zu dem Demonstrandum stets positiv bestimmt werden, eine Eigenschaft deren Mangel gerade das Wesen des contradictorischen Gegensatzes ausmacht. Schon bei Euklid findet sich die conträre Beweisform

*) Vgl. z. B. Ethik, I, prop. 5, 8, 11, 12, 13.

**) Vgl. meine Schrift: Die physikalischen Axiome. Erlangen 1866. S. 79 ff.

mehrfach angewandt*). Es mag hier an einigen Beispielen aus neuerer Zeit genügen. Dirichlet beweist den Satz „wenn die Summe $1.2.3\ldots(p-1)+1$ durch $p$ theilbar ist, so muss $p$ eine Primzahl sein“ auf folgende Weise: Wäre $p$ keine Primzahl, so müsste es ausser durch 1 und durch sich selbst noch durch eine andere Zahl $a$, die der Reihe der Zahlen $2, 3, 4\ldots(p-1)$ angehörte, theilbar sein. Dann würde aber einerseits die Summe $1.2.3\ldots(p-1)+1$, anderseits der erste Summand $1.2.3\ldots(p-1)$ durch $a$ theilbar sein, was nur stattfinden könnte, wenn auch 1 durch $a$ theilbar wäre**). Der Satz „eine eindeutige Function $f(x)$ kann nur auf eine einzige Art durch eine nach den Potenzen von $x$ geordnete Reihe dargestellt werden“ wird folgendermassen indirect bewiesen: Angenommen es gebe mehrere Arten der Entwicklung, z. B.

$$f(x) = a + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n,$$
$$f(x) = b + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots b_n x^n,$$

so würde durch Subtraction folgen:

$$0 = (a - b) + (a_1 - b_1) x + (a_2 - b_2) x^2 + \ldots (a_n - b_n) x^n.$$

Daraus ergibt sich aber, da sämmtliche durch successives Differenziren erhaltene Ableitungen ebenfalls null sind:

$$a - b = 0,\ a_1 - b_1 = 0,\ a_2 - b_2 = 0, \ldots a_n - . b_n = 0.$$

D. h. die hypothetisch angenommene zweite Entwicklung ist mit der ersten identisch***). Beweise der letzteren Form sind in der neueren Analysis sehr beliebt, und sind auch deshalb von Interesse, weil hier einerseits durch die positive Schlusswendung, die er nimmt, der indirecte dem directen Beweis an bindender Kraft vollkommen gleichkommt, und weil anderseits wegen der Allgemeinheit der algebraischen Zeichen der Beweis durch ein Beispiel eine allgemeingültige Bedeutung gewinnt.

Der contradictorischen Form des indirecten Beweises liegt der Satz des ausgeschlossenen Dritten „$A$ ist entweder $B$ oder non-$B$“ in seiner ursprünglichen Unbestimmtheit zu Grunde. Zweck desselben ist regelmässig der Nachweis der Richtigkeit eines negativen Satzes. Dass $A$ nicht $B$ sei, wird bewiesen, indem man zeigt,

---

*) Vgl. Euklid III, 7 (2. Theil), 8 (3. Theil), 9 (2. Beweis), 19; X, 80 bis 85.

**) Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, 2. Aufl., S. 61.

***) Harnack, Die Elemente der Differential- und Integralgleichung. Leipzig 1881. S. 157.

dass die entgegengesetzte Annahme, *A* ist *B*, auf Widersprüche führt. Sollte diese Beweisart für die Demonstration positiver Sätze Verwendung finden, so müssten umgekehrt aus der Annahme „*A* ist non-*B*" ihre Folgen entwickelt und die Unstatthaftigkeit derselben aufgezeigt werden. Da sich aber aus einem negativen Satze nichts folgern lässt, so erhellt ohne weiteres die Unmöglichkeit einer solchen Beweisart. Wo sie scheinbar stattfindet, da handelt es sich eben in Wirklichkeit um einen Beweis mittelst eines conträren Gegensatzes.

Auch der contradictorische Beweis ist ausschliesslich in den speculativen Wissenschaften, in Metaphysik und Mathematik, im Gebrauch; immerhin ist er auch hier vermöge des geringen Werthes rein negirender Urtheile von weit beschränkterem Vorkommen, als man angenommen hat. Er dient hauptsächlich zum Beweis von Sätzen, die Corollarsätze anderer positiver und bereits bewiesener Sätze sind, und wo darum statt des indirecten Beweises manchmal auch der unmittelbare Hinweis auf jene begründenden Sätze genügen kann. Letzteres ist der Grund der auffallenden Erscheinung, dass Spinoza, der sonst so sehr den apagogischen Beweis, namentlich in seiner conträren Form liebt, gerade für negative Sätze directe Beweise bevorzugt. Bei näherer Prüfung zeigt sich freilich, dass solche negative Lehrsätze nichts enthalten, was nicht in vorangegangenen positiven bereits in anderer Form gesagt wäre. Am correctesten hat Euklid die contradictorische Beweismethode angewandt, obgleich auch bei ihm viele der so bewiesenen Sätze entweder bereits in bestimmten Definitionen stillschweigend enthalten sind oder ebenso gut als Corollarsätze anderer direct bewiesener Theoreme auftreten könnten. Den Satz z. B.: „Wenn in einem Kreise zwei gerade Linien, die nicht durch den Mittelpunkt gehen, einander schneiden, so halbiren sie einander nicht" beweist Euklid, indem er darauf hinweist, dass die Annahme, es halbirten sich zwei solche Linien, zu der Folgerung führen würde, dass auch eine vom Kreismittelpunkt nach ihrem Durchschnittspunkt gezogene Gerade sie beide halbire. Nun lehrt aber ein unmittelbar vorhergehender Satz: „Wenn im Kreise eine durch den Mittelpunkt gehende Gerade eine andere nicht durch den Mittelpunkt gehende halbirt, so schneidet sie dieselbe senkrecht." Es würde also die Gerade mit beiden Linien einen rechten Winkel bilden, was damit unvereinbar ist, dass der Annahme nach die Linien selbst mit einander einen Winkel bilden*).

*) Euklid III, 7. Weitere Beispiele sind: III, 5 und 23; VIII, 17; XI, 1.

Es ist klar, dass dieser apagogische Beweis ohne Nachtheil durch den unmittelbaren Hinweis auf den Satz, auf den er sich stützt, und auf den Beweis desselben ersetzt werden könnte. Diese auch bei den anderen Beweisen ähnlicher Art wiederkehrende Eigenschaft hat wohl neben dem relativ geringen Werth negativer Sätze dazu beigetragen, dass in neuerer Zeit die contradictorische Beweisform immer mehr aus dem wissenschaftlichen Gebrauch verschwunden ist.

## Zweiter Abschnitt.

# Von der Logik der Mathematik.

## Erstes Capitel.

## Die allgemeinen logischen Methoden der Mathematik.

### 1. Die Aufgaben der mathematischen Untersuchung.

Wie die meisten andern Wissenschaften, so hat auch die Mathematik aus praktischen Bedürfnissen ihren Ursprung genommen. Die Zählung von Werthobjecten, die Messung von Flächen und Körpern bildeten ihre ersten und lange Zeit ihre einzigen Aufgaben. Zählung und Messung fallen jedoch immer erst dann in den Bereich mathematischer Erwägungen, wenn sie nicht direct sich erledigen lassen, sondern wenn zwischen die Aufgabe und ihre Lösung logische Hülfsoperationen eintreten müssen; und letzteres geschieht, sobald nicht die in Frage stehenden Werthe und Grössen selbst, sondern statt ihrer irgend welche andere, die zu den gesuchten in bekannten Beziehungen stehen, gezählt und gemessen werden. Zu einer solchen indirecten, erst mit Hülfe der Rechnung zu vollziehenden Grössenmessung greifen wir entweder, weil die directe Messung zu weitläuftig, oder weil sie überhaupt unmöglich ist. Während wir bei der directen Grössenmessung auf die Anwendung des ursprünglichsten arithmetischen Verfahrens, der Addition, uns beschränken, ist schon die Entwicklung der übrigen einfachen arithmetischen Operationen durchaus an die Aufgaben der indirecten Grössenmessung gebunden. So sucht man z. B. bei der Subtraction zum Mass einer Grösse dadurch zu gelangen, dass man sie als die Differenz zweier anderer

direct gemessener Grössen bestimmt. In diesem Sinne kann man sagen: Die Mathematik hat begonnen, sobald der menschliche Geist über die Stufe der Addition sich erhoben hatte. Die drei einfachen Operationen, die sich zunächst an sie anschliessen, bilden, als die einfachsten Fälle indirecter Grössenmessung, zugleich die Quellen, aus denen alle anderen mathematischen Methoden hervorgegangen sind.

Aber wenn sich auch ohne das Problem der indirecten Grössenmessung niemals das mathematische Denken entwickelt hätte, so wird doch keineswegs durch jenes Problem die wissenschaftliche Aufgabe der Mathematik erschöpfend bezeichnet. Schon Plato hat der Arithmetik und Geometrie andere Ziele gesteckt, als sie von der praktischen Rechen- und Messkunst verfolgt werden, und lange vor ihm spricht sich in dem Cultus der Zahlgesetze, wie ihn die Pythagoreische Schule geübt, ein dunkles Bewusstsein der Wahrheit aus, dass die Objecte der Mathematik um ihrer selbst willen ein wissenschaftliches Interesse besitzen. Die Geschichte hat diese Voraussicht bestätigt; denn heute beschäftigen sich ganze Zweige der mathematischen Untersuchung mit Fragen, bei denen es auf eine Grössenmessung keineswegs abgesehen wird. Bei den Betrachtungen der Zahlentheorie, des Functionencalcüls, der projectivischen Geometrie u. s. w. handelt es sich überall um die Feststellung der Eigenschaften der Begriffe und ihrer Beziehungen, während eine wirkliche Messung von Grössen höchstens in nebensächlicher Weise beabsichtigt wird. Nicht sie ist demnach der eigentliche Zweck der Mathematik, sondern diese stellt sich die weit allgemeinere Aufgabe: die denkbaren Gebilde der reinen Anschauung sowie die auf Grund der reinen Anschauung vollziehbaren formalen Begriffsconstructionen in Bezug auf alle ihre Eigenschaften und wechselseitigen Relationen einer erschöpfenden Untersuchung zu unterwerfen.

Auf die Gliederung der Mathematik ist die allmählich eintretende bewusstere Erkenntniss dieser Aufgabe nicht ohne Einfluss gewesen. So lange der Ursprung aus der praktischen Rechen- und Messkunst noch nachwirkte, blieben Arithmetik und Geometrie ihre Hauptzweige. Die vielfachen Beziehungen zwischen beiden, die bald in der geometrischen Darstellung arithmetischer Sätze, bald in der arithmetischen Verwerthung geometrischer Resultate ihren Ausdruck fanden, führten endlich zu dem Gedanken der Grössenlehre als einer allgemeineren Disciplin, deren Voraussetzungen ebensowohl

Zahlen- wie Raumgrössen umfassen sollten. Sie hat in der algebraischen Behandlung der Gleichungen eine zunächst noch vorwiegend durch arithmetische Gesichtspunkte bestimmte Form gewonnen, bis ihr durch Descartes' Erfindung der analytischen Geometrie ihre allgemeinere Bedeutung gesichert wurde. Diese Erfindung hat aber zugleich, in Folge der mit verstärkter Gewalt hervortretenden Nothwendigkeit der numerischen Ausmessung stetiger Raumgrössen, zu Erweiterungen des Zahlbegriffs geführt, durch welche dieser allmählich vollständig mit dem Grössenbegriff selber sich deckte, so dass Newton bereits das Gebiet der seitherigen Algebra mit dem Namen der „Arithmetica universalis" belegen konnte. Der moderne Ausdruck Analysis (bei dem man zunächst an die analytische Methode der Logik nicht denken darf) umfasst diese aus der Algebra der arabischen Mathematiker allmählich emporgewachsene allgemeinste Disciplin der Mathematik in ihrem ganzen Umfange. Vermöge jener Erweiterungen des Zahlbegriffs bildet die Arithmetik nur noch einen Zweig der Analysis. Im selben Masse wie die alte Arithmetik ihre Selbständigkeit aufgab, machte sich aber das Erforderniss fühlbar, die Umwandlungen des Zahlbegriffs selbst sowie überhaupt dessen allgemeine Eigenschaften der Untersuchung zu unterwerfen. So entstand die heutige Zahlentheorie, dasjenige Gebiet der reinen Mathematik, welches praktischen Anwendungen und wirklichen Grössenmessungen beinahe am fernsten liegt, obgleich es sich gerade mit jenen Elementen beschäftigt, auf die schliesslich jede Messung zurückführt. Diesen Umgestaltungen der alten Arithmetik gegenüber hat die Geometrie in Bezug auf das Object ihrer Untersuchungen im Ganzen mehr ihren ursprünglichen Charakter bewahrt, so weit sie nicht der Analysis oder diese ihr dienstbar geworden ist. Immerhin sind auch hier Versuche einer analogen, aber die wesentlichen Eigenschaften des Geometrischen bewahrenden Behandlung hervorgetreten, indem man von allen sonstigen Eigenschaften des Raumes ausser der stetigen Ausdehnung abstrahirte und so der concreten Raumlehre eine allgemeinere Ausdehnungslehre überordnete*). Von hier ausgehend lag es dann nahe, auch das Stetige aus dem obersten Begriff zu entfernen, um Ausdehnungs- und Zahlenlehre als Gebiete zu behandeln, die nebst anderen denkbaren Begriffsconstructionen wieder in einer abstracten Mannigfaltigkeitslehre oder Formen-

---

*) H. Grassmann, Die Ausdehnungslehre von 1844 oder die lineale Ausdehnungslehre ein neuer Zweig der Mathematik, 2. Aufl., Leipzig 1878.

lehre enthalten seien*). Diese letzte Begriffserweiterung führt zur Aufstellung einer allgemeinsten mathematischen Disciplin, als deren specielle Zweige alle einzelnen mathematischen Wissenschaften betrachtet werden können, und durch deren Inhalt daher auch die Aufgabe der Mathematik in der allgemeinsten Form bezeichnet sein muss. Die beiden oben gebrauchten Ausdrücke deuten diesen Inhalt in verschiedener Weise an, indem sie zugleich auf zwei Erfordernisse hinweisen, die bei den Gegenständen mathematischer Untersuchung erfüllt sein müssen. Das erste dieser Erfordernisse ist das Gegebensein einer Mannigfaltigkeit zusammengehöriger Denkobjecte, das zweite die rein formale, d. h. ausschliesslich die wechselseitigen Relationen der Denkobjecte, nicht ihre eigene concrete Beschaffenheit in Betracht ziehende Behandlungsweise. In diesem weitesten Umfange umfasst die Mathematik auch den formalen Theil der Logik, welcher eben darum vollständig einem mathematischen Algorithmus sich unterwerfen lässt. Da ferner alles in der Erfahrung Gegebene auf Relationen mannigfaltiger Denkobjecte zurückgeführt werden kann, so ist jede Erfahrungswissenschaft an und für sich einer formalen oder mathematischen Behandlungsweise zugänglich, wobei es jedoch selbstverständlich von äusseren Bedingungen abhängt, ob und in welchem Umfange diese mathematische Behandlung anwendbar ist. Dagegen ist die Mathematik selbst durchaus nicht auf die Untersuchung derjenigen formalen Relationen beschränkt, die sie an den Objecten der Erfahrung verwirklicht findet, sondern es steht ihr frei, die in der Erfahrung gegebenen Bedingungen beliebig zu erweitern oder zu verengern. Da sie eine rein logische Wissenschaft ist, so findet sie ihre Schranken immer nur an der formalen Ausführbarkeit der durch bestimmte Voraussetzungen geforderten Denkoperationen. Naturgemäss aber müssen diese Voraussetzungen anknüpfen an die in der Erfahrung gegebenen Relationen wirklicher Objecte; sie können nicht als völlige Neuschöpfungen auftreten, sondern nur als willkürliche Verände-

*) Den Ausdruck „Mannigfaltigkeitslehre“ hat Riemann, den Ausdruck „Formenlehre“ Grassmann zuerst eingeführt. B. Riemann, Gesammelte mathematische Werke. Leipzig 1876. S. 255. Grassmann, Ausdehnungslehre, S. 1 f. Uebrigens hat Grassmann auch die Betrachtung der Zahlen in seine Ausdehnungslehre hineingezogen, indem er dieselben als „Ausdehnungsgrössen nullter Stufe“ (d. h. als Punkte) behandelte (a. a. O. S. 107). Vgl. hierzu mein System der Philosophie, S. 26, 247 ff. und den Aufsatz über die Eintheilung der Wissenschaften, Philos. Stud. V, S. 34 ff.

rungen gegebener Beziehungen. Deshalb hat auch die Ausbildung der mathematischen Methoden fast nur von denjenigen Aufgaben, welche dem Denken aus den mannigfaltigen Beziehungen der Erfahrungsobjecte erwuchsen, ihre Antriebe empfangen. Insbesondere lässt sich zeigen, dass jede der fundamentaleren mathematischen Methoden aus bestimmten Rechnungs- oder Messungsaufgaben hervorgegangen ist, die bald die Bedürfnisse des praktischen Lebens, bald die Probleme der Naturwissenschaft nahe legten.

So verdanken zunächst die zwei Hauptzweige der älteren Mathematik, Arithmetik und Geometrie, ihre Trennung und selbständige Ausbildung den verschiedenartigen Anforderungen, die der Handelsverkehr und die Aufgaben der Feldmessung an die Rechenkunst stellten. Auf diese Weise fügte es ein glücklicher Zufall, dass die äusseren Bedürfnisse, die der Mathematik ihre ersten Impulse gaben, mit jener naturgemässen Scheidung der Probleme zusammentrafen, welche in der Verschiedenheit der mathematischen Grundbegriffe selbst ihre Wurzel hat. Die discrete Zahl und die stetige Ausdehnung sind bis auf den heutigen Tag die heterogensten Begriffe der Mathematik geblieben, an deren Vermittlung die letztere in einer mehr als zweitausendjährigen Entwicklung gearbeitet hat. Jede Messung muss, wenn sie praktisch brauchbar sein soll, ein numerisches Resultat ergeben; aber die stetige Grösse fügt sich einer genauen Ausmessung nach ganzen Zahlen nur in glücklichen Ausnahmefällen. Diese Schwierigkeit würde vielleicht früher schon in empfindlicherer Weise fühlbar geworden sein, hätte nicht die nämliche Verschiedenheit der Begriffe, welche die erste Scheidung der mathematischen Gebiete bewirkte, auch zu einer Verschiedenheit der mathematischen Begabung geführt, die einer tieferen Auffassung der Beziehungen im Wege stand. Während der Grieche die Zahlverhältnisse räumlich darzustellen liebte und daher ohne Bedenken überall wo die Zahl nicht ausreichte zur geometrischen Anschauung griff, half sich der indische Rechner, wenn die gewohnten arithmetischen Operationen auf geometrische Objecte nicht ohne weiteres anwendbar waren, gelegentlich mit unzureichenden Näherungsmethoden*). Erst das aus den Anregungen indischer Arithmetik und griechischer Geometrie hervorgegangene Streben arabischer Algebristen, ebensowohl arithmetische Beziehungen geometrisch zu

*) Vgl. M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I, S. 546 f.

gestalten, wie geometrische Sätze in arithmetische Formen zu bringen, hat allmählich zu jener allgemeingültigen Form mathematischer Untersuchungen übergeführt, wie sie in der modernen Analysis Geometrie und Arithmetik gleichzeitig beherrscht und durch das Mittelglied der Geometrie selbst die physischen Vorgänge in das nämliche Gewand abstracter mathematischer Formeln kleidet. Bei den grossen Vortheilen, welche diese alle Gebiete der Mathematik und ihrer Anwendungen umfassende Methode darbietet, ist es begreiflich, dass sie auf längere Zeit beinahe die Alleinherrschaft behauptete, indem insbesondere die constructiven Methoden der Geometrie Jahrhunderte lang auf der nämlichen Stufe stehen blieben, auf welche sie schon die Alten erhoben hatten. Da die Analysis die schwierigsten geometrischen und mechanischen Probleme zu lösen vermochte, so gab man sich mit den Resultaten zufrieden, gleichgültig ob die Anschauung dem Gang der analytischen Entwicklung zu folgen im Stande war oder nicht. Erst die synthetischen Methoden der neueren Geometrie haben in dieser Beziehung einen bedeutsamen Umschwung herbeigeführt. Indem sie zeigten, dass die Resultate mühseliger Rechnungen durch constructive Verfahrungsweisen oft leichter und anschaulicher zu erreichen, und dass analytische Entwicklungen Schritt für Schritt in räumliche Anschauungen übertragbar seien, haben sie die mit Descartes begonnene Verbindung abstracter Untersuchung und concreter Anwendung ihrer Vollendung entgegengeführt und der bis dahin vorherrschenden analytischen Behandlung die geometrische Anschauung als gleich berechtigtes und ihrerseits der Analysis neue Ideen zuführendes Hülfsmittel an die Seite gestellt. Unter dem Uebergewicht abstracter algebraischer Formeln hatte sich die geometrische Construction in einem steifen, die freie Bewegung hemmenden Gewande bewegt. Jetzt begann man überall nach den der Natur der Objecte angemessensten Constructionen zu suchen, in Folge deren dann auch wieder zweckmässigere arithmetische Methoden gefunden wurden. Die neu geübte geometrische Gestaltungskraft gestattete es, bisher todt liegende analytische Formen durch die Anschauung zu beleben, und Begriffen, deren Werth fast nur auf zufälligen Entdeckungen beruhte, wie den complexen Zahlen, eine reale anschauliche Bedeutung zu sichern. So ist auch die Arithmetik wieder, in ähnlicher Weise wie dereinst in der Blüthezeit hellenischer Mathematik, nur verändert durch die seitdem weit fortgeschrittene Entwicklung, überall von geometrischen Vorstellungen durchdrungen worden.

Die hier in flüchtigen Umrissen angedeutete Entwicklung des mathematischen Denkens macht es begreiflich, dass die logischen Methoden desselben in ihrer Entstehung einer bestimmten Gesetzmässigkeit gefolgt sind. Dabei ist zwar nicht selten eine ältere Methode vor einer neu auftauchenden in den Schatten getreten; im allgemeinen aber wird das Neue dem Schatz des bereits Erworbenen zugefügt und lässt diesen selbst an Werth und Verwendbarkeit zunehmen. In dieser Sicherheit ihrer Entwicklung, ebenso wie in ihrem ganzen Aufbau, ist die Mathematik die logisch vollendetste Wissenschaft; sie steht ausserdem noch deshalb der Logik am nächsten, weil sie nichts anderes als die logische Untersuchung der allgemeinen Anschauungsformen und der mit ihrer Hülfe vollziehbaren Begriffsconstructionen zu ihrem Gegenstande hat. Um so mehr ist es erforderlich, hier die Grenze scharf zu bezeichnen, welche die Logik der Mathematik von der Mathematik selber trennt. Insofern die mathematischen Grundbegriffe und Methoden zum Zweck der Lösung der oben bezeichneten Probleme entwickelt und angewandt werden, sind sie ganz und gar Gegenstand der mathematischen Untersuchung. Insofern man aber nach dem logischen Ursprung jener Begriffe und Methoden und nach ihrem Verhältniss zu den allgemeinen Gesetzen des Denkens frägt, werden sie Objecte der Logik. Darin liegt zugleich eingeschlossen, dass sich die Logik auf die Untersuchung der allgemeinen Principien der mathematischen Methodik beschränken muss. Auch wird diese Arbeitstheilung von Seiten der Mathematik thatsächlich eingehalten, da diese den principiellen logischen Fragen meist aus dem Wege geht oder höchstens gelegentlich sie berührt, wenn etwa zufällig einmal der Mathematiker zugleich zum Logiker wird.

Die Logik der Mathematik kann nun aber ihrerseits wieder von zwei Gesichtspunkten ausgehen. Erstens kann sie fragen, welche Formen die allgemeinen Methoden der wissenschaftlichen Forschung in ihrer Anwendung auf das mathematische Untersuchungsgebiet annehmen. Die aus dieser Frage entspringenden Betrachtungen, welche die Untersuchung der mathematischen Analyse und Synthese, Abstraction, Induction und Deduction zu ihrem Gegenstande haben, weisen wir der im gegenwärtigen Capitel zu behandelnden allgemeinen mathematischen Methodenlehre zu. Sodann kann zweitens der logische Charakter der in den einzelnen Hauptgebieten der Mathematik herrschenden Methoden untersucht werden. Dies ist die Aufgabe einer speciellen mathe-

matischen Methodenlehre, mit der sich die folgenden Capitel beschäftigen sollen.

## 2. Die mathematische Analyse und Synthese.

Die Unterscheidung der analytischen und synthetischen Methode ist von Euklid, zum Theil nach Platonischem Vorbilde, in die Mathematik eingeführt worden. Analysis und Synthesis sind bei ihm die beiden Unterformen der syllogistischen Beweismethode. Bei der Analysis nimmt man das zu beweisende als zugestanden an und zeigt, dass die daraus gezogenen Folgerungen mit allgemein als wahr anerkannten Sätzen übereinstimmen. Bei der Synthesis geht man von als wahr anerkannten Sätzen aus und zeigt, dass die Folgerungen den zu beweisenden Satz enthalten*). Beide Methoden fügen sich bei Euklid in das nämliche vielgliederige Schema von Definitionen, Axiomen, Theoremen und Problemen, und es ist klar, dass in beiden Fällen der zu beweisende Satz existiren muss, ehe der Beweis angetreten wird, dass sie also Demonstrations-, nicht Untersuchungsmethoden sind. Zugleich hat die synthetische Methode einen unverkennbaren Vorzug dadurch, dass sie stets zu einem bindenden Beweise führt, während das analytische Verfahren nur dann unbedingt richtige Folgerungen gestattet, wenn der Beweis ein indirecter oder apagogischer ist. Der directe analytische Beweisgang dagegen wird nur in dem Falle zwingend, wenn das Verhältniss von Grund und Folge zugleich ein Verhältniss der Wechselbestimmung ist, so dass die Folge als Grund den Grund als Folge hervorbringen würde. Gerade deshalb aber kann der directe analytische Beweis bei Euklid stets durch einen synthetischen ersetzt werden.

Eine wesentlich andere Bedeutung gewinnt die Unterscheidung der analytischen und synthetischen Methode erst bei Descartes. Analysis nennt er dasjenige Verfahren, durch welches das Wesen eines Gegenstandes unmittelbar erforscht werde, und welches daher auch beim Unterricht der Mathematik zu bevorzugen sei, weil es den Schüler selbst den Weg der Erfindung führe. In seiner Geometrie hat er ein mustergültiges Beispiel dieser Methode aufgestellt. Ueberall besteht hier die Analyse in einer zweckmässigen Zerlegung des Ganzen, dessen Untersuchung in Frage steht, in Elemente und

*) Euklids Elemente, XIII, 1, und oben Abschn. I, S. 71 f.

eventuell in der constructiven Hinzufügung anderer Elemente, die zusammen mit den gegebenen eine vollständige Bestimmung der Eigenschaften des untersuchten Gebildes möglich machen. Zugleich aber hält es Descartes für wesentlich, dass diese analytische Untersuchung in der allgemeinsten Form geführt werde, damit die Beschaffenheit der Verstandesoperationen und die allgemeine Bedeutung der Resultate deutlich hervortrete. In diesem Sinne macht er der Analysis der Alten den Vorwurf, dass sie den Geist an die Betrachtung der Figuren gebunden und darum die Einbildungskraft ermüdet, die Uebung des Verstandes aber verabsäumt habe; und seine eigene Methode bezeichnet er als ein Verfahren, welches, die Analysis der Alten mit der Algebra der Neueren und der syllogistischen Kunst verbindend, die Vortheile dieser aller wahrnehme und ihre Fehler vermeide*). So äusserlich diese Definition auch erscheinen mag, so deutet sie doch treffend den Charakter der neueren Analysis an, zu der Descartes' Geometrie den Grund gelegt hat. Das Princip der analytischen Methode Platos und Euklids, dass das Gesuchte als bereits gegeben vorausgesetzt werde, ist eines der mächtigsten Werkzeuge auch dieser Analysis. Aber die eigentliche Quelle seiner Anwendungen liegt hier wie in anderen Fällen schon in der Einführung der algebraischen Symbolik. Indem das Buchstabensymbol jede beliebige unbekannte oder veränderliche Grösse bezeichnen kann, ist es ein überall brauchbares Hülfsmittel, um das Gesuchte in der Rechnung so zu verwenden, als wenn es gefunden wäre. Schon vor Descartes hatte sich daher das analytische Verfahren in den algebraischen Methoden zur Lösung der Gleichungen praktische Geltung verschafft. Doch bewegen sich diese Anwendungen ausschliesslich auf arithmetischem Gebiete, und es bleibt so Descartes das Verdienst, dass er zuerst mit durchschlagendem Erfolg die allgemeinere Anwendbarkeit der algebraischen Symbolik kennen lehrte. Erst die Einführung dieser Symbolik machte aber die Analysis zu einem der Synthesis logisch gleichwerthigen Verfahren. Die Analysis der Alten war, als ein Schluss von der Folge auf den Grund, wegen der Mehrdeutigkeit dieser Schlussform im allgemeinen unsicherer und eben darum von beschränkterer Anwendung gewesen als die Synthesis. Dieser Unterschied besteht für die neuere Analysis nicht mehr: hier ist ein analytisch gewonnener Satz von ebenso zwingender Gewissheit wie

*) Discours de la méthode. Oeuvr. publ. par Cousin, I, p. 140.

das Resultat einer synthetischen Demonstration. Die Analysis der Alten hatte sich in geometrischen Constructionen bewegt, deren Ergebnisse in einer Reihe von Bedingungsurtheilen niedergelegt waren. Sollte hier ein directer Beweis in bindender Weise geführt werden, so war zu prüfen, ob jedes Bedingungsurtheil zugleich ein Verhältniss der Wechselbestimmung enthalte, also umkehrbar sei. Diese Prüfung wurde hinfällig, sobald für jede Art mathematischer Untersuchungen der abstracte arithmetische Ausdruck in Anwendung kam. Denn nun trat an die Stelle des Bedingungsurtheils die algebraische Gleichung, welche, da sie stets umkehrbar sein muss, bei ihrer Aufstellung bereits jene Prüfung bestanden hat. War aber die Analysis erst in Bezug auf Strenge der Beweise der synthetischen Methode ebenbürtig geworden, so konnte es nicht fehlen, dass sie bei ihren sonstigen Vorzügen bald den Vorrang behauptete. Nur als Beweisverfahren hat die synthetische Methode Euklids noch lange Zeit die Herrschaft behalten, und nicht selten mussten sich, wie das Beispiel Newtons zeigt, Untersuchungen, die auf analytischem Wege geführt waren, die mühselige Umprägung in Euklidische Demonstrationen gefallen lassen.

Im Gefolge dieser allmählichen Erweiterung ihrer Anwendungen erweiterte sich zugleich der Begriff der Methode selbst. Die bei dem Gebrauch der algebraischen Symbolik vorausgesetzte Maxime, die gesuchten Grössen ebenso wie die bereits gegebenen in die Rechnung einzuführen, wurde, weil als ein selbstverständliches, zugleich als nebensächliches Element angesehen. Indem sich die Demonstrations- in eine Untersuchungsmethode umwandelte, konnte nicht mehr die Stellung des Beweisobjectes, sondern nur noch das wechselseitige logische Verhältniss der auf einander folgenden Sätze entscheiden. Hier aber erwies sich überall der Fortschritt vom Zusammengesetzten zum Einfachen, vom Besonderen zum Allgemeinen als das charakteristische Merkmal der Analyse, der umgekehrte Weg als das der Synthese. In dieser allgemeineren, jedoch dem logischen Sinn der Ausdrücke vollkommen entsprechenden Weise fassten daher namentlich Newton und Leibniz den Unterschied beider Methoden auf*).

Wie nun in der Regel die fertigen Begriffe mannigfache Spuren ihrer Vergangenheit an sich tragen, so gilt dies vielleicht von wenig

*) Newton, Optice. Lib. III, Quaestio XXXI. Ed. Lausanne 1740, p. 329. Leibniz, Math. Werke. Ausgabe von Gerhardt. III, S. 206.

Begriffen in so hohem Masse wie von dem der Analysis in der Mathematik. Die ganze Geschichte desselben scheint sich in seiner heutigen Bedeutung verdichtet zu haben. Eine weitere Erschwerung ist noch durch den Umstand eingetreten, dass der nämliche Ausdruck, der ursprünglich nur auf eine Methode bezogen wurde, nunmehr zur Bezeichnung der ganzen Disciplin dient, in der jene Methode vorzugsweise zur Anwendung kommt, in der aber selbstverständlich auch solche Verfahrungsweisen, die ihrem logischen Charakter nach synthetische genannt werden müssen, keineswegs fehlen. Bleiben wir hier bei der methodologischen Bedeutung des Begriffes stehen, so werden sich nach dem Obigen hauptsächlich drei Kriterien der analytischen Methode unterscheiden lassen. Das erste besteht in der allgemeinen logischen Eigenschaft, dass sie den Weg von dem Zusammengesetzten zu dem Einfachen einschlägt; das zweite in der Wahl einer gleichförmigen, für die formale Ausführung der arithmetischen Operationen geeigneten Symbolik, welche alle Bedingungsurtheile in Gleichungen umwandelt und dadurch den Schlussfolgerungen eine eindeutige Form gibt; endlich das dritte in dem Euklidischen Princip, dass das Gesuchte gefunden wird, indem man es als gegeben voraussetzt. Diese drei Kennzeichen der analytischen Methode stehen in innigem Zusammenhange mit einander. Sobald eines gegeben war, mussten daher die anderen allmählich von selbst entdeckt werden. Aber es ist bemerkenswerth, dass sie nicht in der soeben angegebenen Reihenfolge ihrer logischen Wichtigkeit, sondern in der umgekehrten, die specielleren voran, das allgemeinste zuletzt, zur Entwicklung gelangt sind.

Im Verhältniss zu der Ausbildung der Analysis ist nun die Synthesis, als mathematische Methode betrachtet, verhältnissmässig lange zurückgeblieben. Augenscheinlich war es hier der Einfluss Euklids, der einer freieren Auffassung im Wege stand. Während man längst in dem analytischen Verfahren eine Forschungsmethode erkannt hatte, die sich nur gelegentlich zugleich in eine Darstellungsmethode verwandeln könne, hatte man bei dem synthetischen Verfahren die geometrische Demonstration im Auge. Nur hieraus erklärt es sich, dass noch Newton der Analyse ausdrücklich den zeitlichen Vorrang vor der Synthese einräumt. Nichts desto weniger findet diese Auffassung im Grunde schon in den einfachsten arithmetischen Operationen ihre Widerlegung. Die Addition, Multiplication und Potenzirung sind synthetische Verfahrungsweisen, und sie sind zweifellos früher als die zu ihnen inversen Operationen der



BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

Subtraction, Division und Radicirung, die als analytische bezeichnet werden können. Aber diese einfachen Operationen setzte man als gegeben voraus, man betrachtete sie als Hülfsmittel, deren sich jede Methode bedienen müsse, die aber nicht selbst den Rang von Methoden beanspruchen könnten. Obgleich daher in Wahrheit in Arithmetik und Zahlentheorie synthetische Methoden eine nicht geringe Rolle spielen, so ist doch wiederum die Geometrie es gewesen, in der die Erkenntniss reifte, dass auch die Synthese den Werth einer Forschungsmethode besitzen könne. Fasst man bei Euklid nicht die äussere Form der Demonstration, sondern die Untersuchungsmethoden ins Auge, wie sie vor allem in seinen geometrischen Constructionen zu Tage treten, so kann kein Zweifel bleiben, dass hier das herrschende Verfahren das analytische ist. (Vgl. unten Cap. III.) Im Gegensatze hierzu ist nun diejenige Richtung der neueren Geometrie, die sich selbst die synthetische nennt, bestrebt gewesen, ihre einzelnen Constructionen in einen systematischen Zusammenhang zu bringen, in welchem aus den einfachsten Raumgebilden allmählich die zusammengesetzteren hervorgehen. Hier ist aber zugleich die synthetische Methode zur Forschungsmethode geworden, und als Darstellungsmethode empfiehlt sie sich nur unter dem nämlichen Gesichtspunkte, unter dem Descartes auch die analytische empfohlen hat, und unter dem das Demonstrationsverfahren Euklids bestreitbar ist, insofern nämlich als im allgemeinen der zweckmässigste Weg zur Nachweisung einer Wahrheit in der Reproduction ihrer Auffindung besteht.

Unzweifelhaft ist die synthetische Methode in diesem neuen Sinne nicht auf die Geometrie beschränkt, sondern sie erstreckt sich über alle Gebiete der Mathematik. Zu einer folgerichtigen Anwendung derselben scheint aber allerdings eine anschauliche Beschaffenheit der Untersuchungsobjecte erforderlich zu sein. Dafür spricht schon der Umstand, dass sie bei den complicirteren Aufgaben der höheren Geometrie wachsenden Schwierigkeiten begegnet, so dass sie hier hinter der analytischen Behandlung zurückstehen muss. Diese Bedingung der Anschaulichkeit resultirt aus dem der synthetischen Methode eigenthümlichen Constructionsverfahren, welches stets voraussetzt, dass irgend ein zusammengesetztes Ganzes in leicht zu übersehender Weise aus der Synthese seiner Elemente gewonnen werde. Neben der Geometrie ist es daher die Mechanik, deren elementare Probleme eine synthetische Behandlung gestatten, wie denn auch in die nach ihrem vorherrschenden Charakter so ge-

nannte analytische Mechanik und nicht minder in die analytische Geometrie Constructionen von synthetischem Charakter eingehen. Von den aus der Arithmetik hervorgegangenen Gebieten ist es hauptsächlich die Zahlentheorie, die bei ihrer Beschäftigung mit den einzelnen Zahlbegriffen und Zahlgesetzen synthetischen Untersuchungen zugänglich oder sogar auf sie angewiesen ist.

Hiernach kann, wenn wir die beiden Methoden unter übereinstimmenden Bedingungen ihrer Anwendung vergleichen, von einer zeitlichen Priorität der Analysis im Sinne Newtons nicht mehr die Rede sein. Vielmehr zeigen sich zahlreiche Probleme ebensowohl der synthetischen wie der analytischen Behandlung zugänglich. Nur bei den fundamentalsten Aufgaben gewinnt die synthetische Methode einen Vorrang und wird bei der Ableitung der einfachsten arithmetischen und geometrischen Sätze ausschliesslich verwendbar, während umgekehrt bei der Untersuchung sehr zusammengesetzter Objecte die Analyse die näher liegende und manchmal selbst die allein mögliche Methode ist.

Mit diesem Verhältniss, das nahezu eine Umkehrung der früheren Auffassung in sich schliesst, hängt ein weiterer Unterschied der modernen Begriffe von den älteren zusammen. Nach den letzteren stehen Analysis und Synthesis beide im Dienste der Deduction. Jede dieser Methoden setzt die Principien, aus denen Folgesätze abgeleitet oder Beweise geführt werden sollen, als gegeben voraus. Nicht nur die Definitionen und Axiome der Arithmetik und Geometrie, sondern auch alle möglichen einzelnen Zahlformeln und mit Lineal und Cirkel im Raume ausführbaren Constructionen, diese von Euklid zum Theil als Postulate bezeichnet, gelten als ein ursprüngliches Inventar, über welches die mathematische Deduction beliebig verfügen könne. Wesentlich anders gestaltet sich die Sache, wenn man, wie es in der neueren Mathematik geschieht, auf beiden Gebieten den genetischen Standpunkt zur Geltung bringt. Es erhebt sich dann nothwendig die Frage, wie jenes ursprüngliche Inventar selber entstanden sei, und wie seine einzelnen Bestandtheile mit einander zusammenhängen oder aus einander hervorgehen. Hier ist es nun gerade auf der einen Seite die Zahlentheorie, auf der andern die synthetische Geometrie, die in ihren grundlegenden Theilen jene Frage zu beantworten suchen. Dadurch gelangt in beiden das logische Verfahren der Induction zu umfassender Geltung. Auch die inductiven Operationen der Mathematik sind aber theils synthetischer theils analytischer Art, wie dies schon an den vier arithmetischen Funda-

mentaloperationen zu sehen ist, deren einzelne Sätze nicht bloss durch Induction gefunden sind, sondern auch allein auf inductivem Wege bewiesen werden können.

## 3. Die mathematische Induction und Abstraction.

### a. Der mathematische Realismus und Nominalismus.

Bis in die neueste Zeit sind Mathematiker und Philosophen darin einig gewesen, in der Mathematik das Vorbild einer deductiven Wissenschaft zu sehen, die nur in einigen seltenen Fällen die so genannte vollständige Induction zu Hülfe nehme. Um so weiter haben sich die Anschauungen über die Natur der Voraussetzungen, von denen die mathematische Deduction auszugehen habe, von einander entfernt. Bald gilt die Mathematik deshalb als das Ideal einer Wissenschaft, weil ihre Fundamentalsätze durch ihre Evidenz und Allgemeingültigkeit auf eine dem Zufall wechselnder Erfahrungen entrückte Quelle der Erkenntniss in dem menschlichen Geiste selbst hinzuweisen scheinen. Bald behandelt man die Principien der mathematischen Deduction als empirisch entstandene, aber durch willkürliche Annahmen von den Erfahrungsobjecten abweichende Vorstellungen. Damit ist die metaphysische Verwerthung der Mathematik beseitigt, und gleichwohl behält diese den Erfahrungswissenschaften gegenüber eine Ausnahmestellung, wie sie für die apodiktische Geltung ihrer Sätze unerlässlich scheint. Beide Auffassungen begegnen sich daher in der Ueberzeugung, dass die Gewissheit der Mathematik auf der Unveränderlichkeit ihrer Voraussetzungen beruhe. Aber diese Voraussetzungen erscheinen dort als eingeborene Gesetze des Geistes, die dieser vielleicht aus einem überempirischen Dasein mitbringe, und in denen man darum geneigt ist gleichzeitig ursprüngliche Weltgesetze zu erblicken; hier verdanken sie ihre allgemeinere Geltung der Uebereinkunft der Menschen und höchstens noch der praktischen Anwendbarkeit auf empirische Objecte. Darum besitzt in diesem Fall das mathematische Wissen einen subjectiven und hypothetischen, gerade deshalb aber zugleich einen exacten Charakter: denn nur unsere subjective Willkür kann den Begriffen jene Constanz sichern, die zu einer exacten Beweisführung erfordert wird. Für beide Anschauungen erscheinen in diesen ihren Anwendungen auf das Gebiet der mathematischen Vorstellungen noch heute die

alten Bezeichnungen des Realismus und Nominalismus als die passendsten*). Denn nach der einen Ansicht beruht die Bedeutung der mathematischen Ideen wesentlich auf ihrer realen Existenz im Geiste; die andere leugnet diese reale Existenz, jene Ideen gelten ihr als willkürliche Schöpfungen, welche durch die für sie eingeführten Namen oder sonstigen Symbole die erforderliche Constanz erst empfangen. Dieser mathematische Realismus und Nominalismus sind aber beide nicht unverändert geblieben, sondern sie haben Wandlungen erfahren, durch die sie sich im Laufe der Zeit einander genähert haben.

Der Realismus Descartes' trägt in mancher Beziehung noch die Züge der Platonischen Ideenlehre. Die sinnlichen Objecte können nur darum mathematische Ideen in uns hervorrufen, weil diese vorher in unserem Geiste gelegen waren. Die Art, wie sie durch die äusseren Eindrücke erweckt werden, schildert er deutlich als eine Art Wiedererinnerung**). Ueber das Verhältniss der angeborenen Ideen zu den sinnlichen Bildern, die ihnen entsprechen, spricht er sich nirgends in unzweideutiger Weise aus. Im allgemeinen scheint er sich jene ebenfalls in der Form von Anschauungen gedacht zu haben. Zuweilen aber weisen seine Aeusserungen mehr auf eine bloss begriffliche Existenz hin. Von dem Tausendeck z. B. sollen wir eine vollkommen klare Idee besitzen, obgleich es unmöglich sei, dasselbe mit der Einbildungskraft vorzustellen. Aehnlich unbestimmt bleibt überhaupt, was er eine „klare Idee" nennt. So sehr er es betont, dass die Klarheit der mathematischen Vorstellungen ihren auszeichnenden Charakter bilde, der zugleich auf ihren überempirischen Ursprung hinweise, so wenig hat er sich bemüht, diesen Be-

*) In seiner „allgemeinen Functionentheorie" (Tübingen 1882, Th. I, S. 58 ff.) hat Paul du Bois Reymond für die nämlichen Gegensätze, insofern sie bei den Grundbegriffen der Infinitesimalmethode zur Geltung kommen, die Ausdrücke Idealismus und Empirismus gewählt. Ich habe es vorgezogen, die Namen des mathematischen Realismus und Nominalismus, die ich in einem vor dem Erscheinen des soeben genannten Werkes veröffentlichten Aufsatze (Philosophische Studien, I, S. 105) schon gebraucht hatte, beizubehalten, da die philosophischen Richtungen des Idealismus und Empirismus zwar häufig, aber keineswegs immer mit den hier gemeinten Gegensätzen zusammentreffen, wie sie denn auch selbst keine Gegensätze bilden. Berkeley z. B. ist als Philosoph bekanntlich Idealist und Empirist zugleich, daneben huldigt er in mathematischer Beziehung einem entschiedenen Nominalismus.

**) Rép. aux. cinq. obj. (Desc. à Gassendi). Oeuvr. publ. par Cousin, II, p. 290.

griff der Klarheit sicher zu definiren. Nur dies kann als eine bemerkenswerthe Bestimmung angesehen werden, dass die klare Idee für uns immer die nämliche überzeugende Kraft besitze, so oft wir uns auch ihr zuwenden. Offenbar ist also die Unveränderlichkeit ein sie auszeichnendes Merkmal.

Entschiedener nun als Descartes betont es Leibniz, dass die mathematischen Ideen, um in unserem Geiste lebendig zu werden, der sie auslösenden Einwirkung der Erfahrungsobjecte bedürfen. Deutlicher aber zugleich scheidet er die ursprüngliche Natur jener Ideen von den sinnlichen Bildern, in denen sie sich in der Erfahrung verwirklichen. Die ursprüngliche Existenz der Ideen ist ihm eine rein begriffliche. Hierfür liegt ihm der unumstössliche Beleg darin, dass Bild und Begriff vollkommen von einander verschieden seien*). Der Begriff des Dreiecks fällt ebenso wenig mit dem einzelnen Dreieck zusammen wie die Zahl mit den gezählten Objecten. Demnach denkt sich Leibniz die Entwicklung der mathematischen Ideen keineswegs mehr in der Form einer Wiedererinnerung, bei der eine Gleichheit zwischen dem Eindruck und der zurückgerufenen Idee vorauszusetzen wäre; sondern die sinnlichen Bilder sind ihm vielmehr Gelegenheitsursachen, bei denen wir uns ursprünglich in uns liegender Begriffe bewusst werden. Darum ist ihm die mathematische Untersuchung um so vollkommener, je abstracter sie geführt wird; denn in gleichem Masse nähert sie sich einer adäquaten Vorstellung der in uns liegenden Begriffe. In diesem Sinne stellt Leibniz gelegentlich der wissenschaftlichen eine empirische Geometrie gegenüber, die nicht wie jene durch den logischen Beweis, sondern durch die unmittelbare Anschauung zu überzeugen suche**). Aus dem gleichen Grunde schätzt er die Euklidische Demonstrationsmethode; nur scheint es ihm, dass einzelne der Euklidischen Axiome eine Deduction aus abstracteren Axiomen und Definitionen gestatten, und er macht in dieser Beziehung verschiedene Versuche, das Euklidische System zu verbessern***). Die Thatsache, dass schliesslich auch die Euklidischen Demonstrationen auf die Ueberzeugung durch unmittelbare Anschauung zurückführen, gesteht er ebenso wenig zu

*) Nouv. ess. I, 1. IV, 17. Vgl. ausserdem namentlich die unter den Titeln „Initia mathematica“ und „Mathesis universalis“ mitgetheilten Schriften. Math. Werke, Ausg. von Gerhardt, VII, S. 17 ff.

**) Opera philos., ed. Erdmann, p. 382.

***) Opera philos., ed. Erdmann, p. 81 Nota. Math. Werke. Ausg. von Gerhardt, VII, S. 260 f.: Specimen Geometriae luciferae.

wie den inductiven Ursprung der einfachsten arithmetischen und geometrischen Sätze. Solche Sätze sind nach ihm intuitiv gewiss; man muss sie anerkennen, sobald man nur die Aufmerksamkeit auf sie wendet.

Durch die entschiedene Hervorkehrung der begrifflichen Natur der mathematischen Ideen scheidet sich demnach Leibniz von Descartes. Freilich hatte auch dieser schon die algebraische Behandlung der Geometrie in der Absicht eingeführt, dadurch die geometrischen Gesetze auf eine abstracte und rein begriffliche Form zurückzuführen. Aber er tadelt ebenso die Unfähigkeit der früheren Algebristen, ihren Formeln eine anschauliche Anwendung zu geben, und seine Geometrie verfolgt daher den doppelten Zweck einer analytischen Untersuchung geometrischer Objecte und einer geometrischen Darstellung algebraischer Gleichungen. Bei Leibniz gilt die analytische Behandlung in jeder Beziehung als die vorzüglichere. Aus diesem Grunde zieht er schon die Arithmetik als die abstractere Disciplin der Geometrie vor, und unter den Euklidischen Axiomen bevorzugt er diejenigen, die den Charakter abstracter Grössenaxiome besitzen. So eröffnet Leibniz in der Entwicklung der neueren Mathematik jene Periode unbedingter Herrschaft der Analysis, die später in Euler und Lagrange culminirte, und in der man es sich zu besonderem Ruhme anrechnete, in der Mechanik und wo möglich sogar in der Geometrie der Figuren entrathen zu können.

Gerade die Schroffheit, mit der Leibniz die nach ihm an sich der Anschaulichkeit völlig entbehrenden Grundbegriffe von ihren anschaulichen Anwendungen scheidet, verwickelt nun aber den mathematischen Realismus in neue Schwierigkeiten. Sind die ursprünglichen Ideen selbst anschaulicher Natur, so liefert der psychologische Mechanismus der Reproduction ein immerhin verständliches Schema für die Rückbeziehung des unmittelbar Angeschauten auf eine idealere Form. Der abstracte Begriff mit realer Existenz gedacht ist aber gegenüber dem sinnlichen Object ein völlig Incommensurables. Diese Anschauung ist mystisch, denn sie setzt hinter die Welt der Vorstellungen noch einmal eine Welt völlig unvorstellbarer Ideen, und es bleibt unbegreiflich, wie das vorgestellte Object die unvorstellbare Idee im Bewusstsein soll erwecken können. So erschien es denn dringend geboten, die Incongruenz zwischen Idee und Bild wieder zu beseitigen, der Idee ihre anschauliche Natur wiederzugeben, um ihre Beziehung zu den sinnlichen Objecten erklärlich zu machen.

Diesen letzten Schritt in der Entwicklung des mathematischen Realismus hat Kant gethan mit seiner Lehre von der reinen Anschauung und den Anschauungsformen.

Es ist ohne Zweifel einer der glücklichsten Griffe Kants gewesen, dass er von der vielgestaltigen Menge der einzelnen mathematischen Ideen zurückging auf die Grundlagen, auf die sie sich alle beziehen müssen, auf die Raum- und Zeitanschauung. Schon die Zahl, die der Mathematiker in den Vordergrund zu stellen pflegt, gibt nach Kant durch die Zusammenfassung der auf einander folgenden Zeitpunkte dem Begriff der Quantität eine anschauliche Form, und sie ist daher ein secundäres Erzeugniss jenes Begriffsschematismus, der überall erst die allgemeinen Begriffe durch ihre Darstellung in Formen des Zeitverlaufs anwendbar machen soll auf die sinnliche Erfahrung. Die Bewegung vollends setzt nicht nur Zeit und Raum, sondern auch die Wahrnehmung eines beweglichen Etwas voraus, und er behauptet daher, dass sie im Unterschied von Zeit und Raum, die aller Erfahrung vorausgehen, ein empirischer Begriff sei*). Endlich die einzelnen arithmetischen Operationen, die einzelnen geometrischen Gebilde sind nach Kant durchaus nur Constructionen innerhalb der reinen Zeit- und Raumanschauung, zu denen wir durch den Eindruck empirischer Objecte veranlasst werden, und bei deren Ausführung wir uns daher ebensolcher Objecte bedienen müssen**). Die unendliche Menge mathematischer Ideen, die der vorangegangene Realismus als ein angeborenes Besitzthum des Geistes angesehen hatte, beschränkt sich also bei Kant auf die reine Raum- und Zeitanschauung. Diese allein sind a priori gegeben, und die Zeitanschauung vermittelt überdies noch durch ihre Verbindung mit der Kategorie der Quantität den reinen Begriff der Zahl. Alles weitere dagegen besteht in Vorstellungen, die durch „Einschränkungen“ jener allgemeinen Anschauungen entstehen, zu welchen Einschränkungen wir durch einzelne sinnliche Wahrnehmungen veranlasst werden. Indem wir an dem sinnlichen Object dasjenige auffassen, was an ihm reine Anschauung ist, entsteht der Gegenstand des mathematischen Begriffs, der in dem äusseren Object nur seine Gelegenheitsursache hat, sonst aber ganz und gar der reinen Anschauung angehört. Auf diese Weise wird z. B. das sinnliche Dreieck Anlass zur Bildung der Idee des geometrischen Dreiecks.

*) Kritik der reinen Vern., 2. Aufl., S. 58.

**) Prolegomena zu jeder künftigen Metaphysik. Ausg. von Rosenkranz, S. 19.

Die mathematischen Definitionen und Axiome sind Sätze, die sich auf die Verbindung der Bestandtheile der reinen Anschauung beziehen, und sie sind daher nach Kants prägnantem Ausdruck „synthetische Urtheile a priori“.

Diese fundamentale Reform der realistischen Lehre unterscheidet sich von ihrer vorangegangenen Gestaltung bei Leibniz hauptsächlich dadurch, dass der ursprüngliche Besitzstand des Geistes an mathematischen Ideen nicht mehr als ein begrifflicher, sondern als ein anschaulicher angesehen wird. Kants Bemühen ist daher überall darauf gerichtet, die anschauliche Natur der mathematischen Operationen und Demonstrationen darzuthun, und er weist in sichtlichem Gegensatze zu Leibniz darauf hin, wie gerade auch bei Euklid der Beweis schliesslich an die unmittelbare Anschauung appellire*). Alle weiteren Unterschiede haben hierin ihre Quelle. Besteht der ursprüngliche Besitz des Geistes, aus dem die Mathematik schöpft, in Anschauungen und nicht in Begriffen, so genügt es, die allgemeinen Anschauungsformen als ursprüngliche zu betrachten, aus denen sich die einzelnen mathematischen Vorstellungen entwickeln können. Damit wird auch der Einfluss der Erfahrungsobjecte ein anderer; diese wirken nicht mehr nach Analogie der psychologischen Reproduction, sondern sie erwecken jene Thätigkeit der reinen Einbildungskraft, welche die äusseren Objecte gewissermassen in die reine Anschauung überträgt, indem sie lediglich dasjenige nacherzeugt, was an ihnen der Raum- und Zeitform angehört. Ist auf diese Weise jede Thätigkeit, welche mathematische Gebilde schafft, constructiver Natur, so besitzen aber auch nothwendig die mathematischen Fundamentalsätze den Charakter synthetischer Urtheile. Jene einschränkende Thätigkeit, welche die Einbildungskraft an den Anschauungsformen ausübt, um die einzelnen Objecte der mathematischen Betrachtung hervorzubringen, muss zugleich ein Zusammenfügen der einzelnen Elemente sein, aus denen die Objecte bestehen. So entsteht jede Zahl aus der Verbindung ihrer Einheiten, jede geometrische Figur aus der Verbindung der einfacheren Raumgebilde, die zu ihrer Construction verwendet werden. In dieser starken Betonung der synthetischen Grundlagen der Mathematik kündet sich in der Lehre Kants schon das Ende jener Alleinherrschaft der Analysis an, die mit Leibniz begonnen hatte.

Von so unbestreitbarer Wahrheit nun aber auch die Behaup-

*) Kritik der reinen Vern., 2. Aufl., S. 39.

tung der synthetischen Natur der mathematischen Fundamentalsätze ist, so ist doch die Grundlage, auf der das ganze Gebäude von Kants Philosophie der Mathematik ruht, die Apriorität der Anschauungsformen, von ihm nicht bewiesen worden. Seine beiden Argumente, dass die Vorstellungen räumlicher und zeitlicher Objecte die allgemeinen Vorstellungen von Raum und Zeit als Bedingungen voraussetzen, und dass alle mathematischen Sätze einen apodiktischen, also über die Zufälligkeit der Erfahrung hinausweisenden Charakter besitzen, sind hinfällig. Denn allerdings kann das Einzelne in Raum und Zeit nicht vorgestellt werden, ohne dass die Raum- und Zeitanschauung vorhanden wären; aber dadurch wird nicht ausgeschlossen, dass sich diese an und mit den einzelnen Vorstellungen gleichzeitig entwickeln, und insofern es keine Anschauungsformen gibt ohne einen Empfindungsinhalt, ist diese Annahme die zunächst gebotene. Apodiktisch aber ist das ausnahmslos Gültige; der apodiktische Charakter mathematischer Sätze wird daher vollkommen zureichend durch die Thatsache erklärt, dass sie sich auf die constanten Bestandtheile aller Erfahrung beziehen. (Vgl. Bd. I, S. 574 ff.) Hat also auch Kant den anschaulichen und darum synthetischen Charakter der mathematischen Fundamentalsätze vollkommen richtig erkannt, so hat er doch keineswegs den Beweis geliefert, dass sie synthetische Urtheile a priori sind. Nun bildet aber dies gerade den auszeichnenden Bestandtheil der Kantischen Lehre. Nimmt man die Apriorität der mathematischen Principien hinweg, so mündet Kants transscendentale Aesthetik in den Strom jener empiristischen Anschauungen, welche sich aus der entgegengesetzten Denkweise des Nominalismus entwickelt haben.

Die Veränderungen, die diese Richtung des mathematischen Nominalismus erfahren hat, sind weit mehr an der Oberfläche geblieben als die Wandlungen des Realismus. Ein weiter Raum trennt schon die Anschauungen von Descartes und Leibniz, und die Lehre Kants hat sich fast in allen Stücken im directen Gegensatze zu Leibniz entwickelt. Zwischen Thomas Hobbes und John Stuart Mill dagegen besteht fast nur der Unterschied ungleicher Betonung der verschiedenen Bestandtheile einer im Ganzen übereinstimmenden Ansicht. In seiner Ueberzeugung von dem Werth der mathematischen Methode lässt sich Hobbes nur mit Leibniz vergleichen*). Diese Hochschätzung tritt bei ihm um so augen-

*) Vgl. J. J. Baumann, Die Lehren von Raum, Zeit und Mathematik in der neueren Philosphie, Berlin 1868, Bd. I, S. 237 ff.

fälliger hervor, je mehr sie gegen seine Auffassung der Grundbegriffe contrastirt. Die Definitionen der Mathematik verdanken ihre Unveränderlichkeit nur der Constanz der Namen, mit denen wir die willkürlich gebildeten Begriffe festhalten; die Axiome aber sind aus den Definitionen abgeleitet, sie besitzen daher weder den Werth von Denkgesetzen noch von objectiven Naturgesetzen, sondern sie sind willkürliche Festsetzungen wie die ihnen entsprechenden Definitionen selbst. Der Zweck dieser willkürlichen Festsetzungen pflegt endlich in der isolirten Inbetrachtnahme gewisser Bestandtheile der sinnlichen Objecte zu bestehen. Darum verbessert Hobbes die geometrischen Definitionen Euklids: Punkt ist nicht dasjenige was keine Theile hat, sondern dasjenige, wovon beim Beweis keine Theile in Betracht zu ziehen sind; eine Linie ist nicht selbst ohne Breite, sondern sie soll beim Beweis so betrachtet werden. Auf diese Weise erscheinen die mathematischen Begriffe durchgängig als Erzeugnisse einer Abstraction; diese aber ist nicht eine nothwendige Thätigkeit des Geistes, sondern sie beruht auf willkürlicher Uebereinkunft. Nur hierdurch wird es begreiflich, dass für Hobbes der auszeichnende Charakter der Mathematik nicht in ihrem begrifflichen Inhalt, sondern nur in ihrer Methode besteht. Wie er daher einerseits z. B. der Politik die Fähigkeit zuschreibt, sich zum Rang einer mathematischen Disciplin zu erheben, so sieht er anderseits in jedem streng logischen Denken eine Folge mathematischer Operationen.

Sehen wir so in Hobbes den nominalistischen Gesichtspunkt, die Annahme der willkürlichen Feststellung der Begriffe, durchaus vorwalten und die Anerkennung der empirischen Motive derselben verhältnissmässig zurücktreten, so gewinnen dagegen bei Locke diese das Uebergewicht. Das Element der Willkür hat sich bei ihm zu der Anerkennung ermässigt, dass die mathematischen Ideen den Objecten der Wahrnehmung nicht unmittelbar gleich seien, sondern durch freie Variation der durch die äusseren Eindrücke entstandenen allgemeinen Ideen des Raumes, der Zahl u. s. w. gebildet würden. Trotz dieses von ihm zugestandenen idealen Charakters der mathematischen Ideen weist ihnen aber Locke zugleich eine reale Bedeutung an, da er hervorhebt, die mathematischen Sätze besässen eben insofern objective Wahrheit, als die Dinge mit ihren mathematischen Vorbildern in unserem Geiste immer in einem gewissen Grade übereinstimmten*). Sicherlich ist er zu diesem Zugeständniss

*) Essays, B. II, ch. 13; B. IV, ch. 4.

wesentlich durch seine empiristische Neigung geführt worden, die der Annahme von Principien widerstrebte, deren Anwendbarkeit auf die Erfahrung irgendwie bezweifelt werden konnte. Dennoch kommt gerade dadurch in seine Auffassung der Mathematik ein stark realistischer Zug. Erinnert doch die Annahme von Vorbildern im Geiste, abgesehen von der Behauptung ihrer empirischen Entstehung, unmittelbar an Cartesianische Vorstellungen. Fast noch näher kommt aber Locke, durch die Betonung der anschaulichen Natur der mathematischen Ideen und die Rückbeziehung aller mathematischen Beweise auf die Anschauung, bereits Kant. Denn was ist die allgemeine Idee des Raumes anderes als eine reine Anschauung, nur dass sie a posteriori entstanden gedacht wird? Vollends die Einschränkungen und Variationen dieser Idee sind ein Construiren innerhalb der reinen Anschauung, welches sogar in die logische Form synthetischer Urtheile a priori gebracht werden könnte. So leidet die Lehre Lockes an einem unheilbaren Widerspruch zwischen der empiristischen Grundanschauung und den zum Theil völlig rationalistischen Ausführungen im einzelnen. Ist die Erfahrung die einzige Quelle des Wissens, so bleibt es in der That unbegreiflich, wie Ideen entstehen können, denen kein adäquates Object in der Erfahrung entspricht.

Ein solcher Widerspruch liess sich vermeiden, sobald man die Identität der mathematischen Ideen und der sinnlichen Einzelvorstellungen behauptete. Diesen Weg schlug Berkeley ein. Wie er die abstracten Begriffe leugnet, so selbstverständlich auch die Existenz einer reinen Raum- und Zeitanschauung. Die vollkommen zu Recht bestehende psychologische Unmöglichkeit, das Allgemeine als solches vorzustellen, veranlasst ihn, ihm auch die logische und erkenntnisstheoretische Berechtigung abzusprechen, und er versetzt sich dadurch in einen schneidenden Widerspruch vor allem mit den Postulaten der mathematischen Wissenschaft. Das Dreieck im Geiste und das wirkliche Dreieck sind ihm eins und dasselbe. Alle zufälligen Eigenschaften des letzteren finden sich in jenem wieder. Auch die geometrische Demonstration hat daher nur dieses sinnliche Dreieck im Auge, und die an ihm bewiesenen Sätze haben für andere Dreiecke nur insofern Gültigkeit, als sie ihm gleichen. Die bindende Kraft der mathematischen Folgerungen hat darum nach Berkeley schliesslich ihren Grund in der Constanz der geometrischen Figuren und der sonstigen Objecte, auf die sich die Demonstration bezieht*).

*) Treatise on the principles of hum. knowledge. Introd. und CXI f.

Die Schwäche dieser Begründung liegt offen zu Tage. Als sinnliche Einzelvorstellungen entbehren die mathematischen Objecte durchaus der Unveränderlichkeit, die ihnen Berkeley zuschreibt. Sie gewinnen dieselbe gerade erst durch jene Denkacte, durch die unter ihnen abstracte Begriffe gedacht werden, welche Berkeley leugnet.

Auf dem Boden der Erfahrungsphilosophie gibt es nur einen Ausweg aus diesen Schwierigkeiten: die Rückkehr zu der nominalistischen Anschauung von Hobbes. Sie beginnt mit Hume. Freilich glaubt auch Hume die mathematischen Ideen nicht als blosse Erzeugnisse der Abstraction ansehen zu können, sondern er gibt ihnen mit Berkeley ein sinnliches Substrat. Aber er hält es nicht für erforderlich, dass jede einzelne Zahl, jede beliebige geometrische Figur aus der Anschauung eines sinnlichen Objects entspringe, sondern er meint, nur die Elemente, mit denen wir unsere Constructionen ausführen, müssten als reale Objecte der Erfahrung gegeben sein*). So gewinnen wir eine gegebene Zahl durch die wiederholte Setzung eines Punktes, so eine geometrische Curve durch die Aneinanderreihung von Punkten u. s. w. Auf diese Weise ist es der in der Wahrnehmung untheilbare Punkt, auf den alle arithmetischen und geometrischen Constructionen als letztes gegebenes Element zurückführen. Aus diesem Element erzeugen wir aber nach Willkür alle mathematischen Vorstellungen, und auf dieser unserer willkürlichen Erzeugung beruht schliesslich die Evidenz der mathematischen Folgerungen.

So spielt bei Hume der sicht- und fühlbare Punkt die Rolle eines psychischen Atoms. Dieses ist ihm eine unmittelbare Thatsache der sinnlichen Erfahrung. Durch Wiederholung und Aneinanderfügung desselben sollen wir aber in freier Construction alle möglichen mathematischen Gebilde hervorbringen können, wobei wir freilich auch hier durch die Beispiele geleitet werden, die uns in der äusseren Erfahrung gegeben sind. Doch die Schwierigkeiten, denen Berkeleys Anschauung begegnet war, sind durch diese Beschränkung der sinnlichen Objecte der Mathematik auf ein letztes Element nicht beseitigt. Denn wie sollen wir voraussetzen, dass dieses Element in allen mathematischen Vorstellungen derselben Art ein constantes bleibe, wie es doch im mathematischen Denken vorausgesetzt wird, während die Eigenschaften unserer Empfindung fortwährend wechseln? Wie verträgt sich ferner die Annahme, dass der mathe-

*) Treat. on hum. nat., B. I, 2.

matische Punkt reale Ausdehnung und sonstige qualitative Eigenschaften wie Farbe und Festigkeit hat, mit der mathematischen Voraussetzung, dass ihm alles dies nicht zukomme? Wenn die sinnliche Wahrnehmung die einzige Quelle unserer Ideen ist, so dürfen wir auch erwarten, alle Bestandtheile jener in diesen wiederum anzutreffen.

Hier gibt es keine andere Rettung als den Rückgang auf Hobbes ganz zu vollziehen, einzugestehen, dass die Voraussetzungen der Mathematik abweichen von den sinnlichen Vorstellungen, durch die sie angeregt werden, eben darum aber auch schon den Grundlagen dieser Wissenschaft nur einen hypothetischen Werth beizulegen. Es ist hauptsächlich das Verdienst John Stuart Mills, die Nothwendigkeit dieser Consequenz erkannt zu haben. Seine Anschauungen fallen in allen wesentlichen Punkten mit denen von Hobbes zusammen; aber die erkenntnisstheoretische Arbeit eines Locke, Berkeley und Hume ist für ihn nicht umsonst gethan. Das sinnliche Dreieck und das Dreieck in unserem Geiste, erklärt auch Mill, sind eins und dasselbe; einen Punkt ohne Ausdehnung und eine Linie von absolut gerader Richtung gibt es nicht in unserer Anschauung*). Gerade darum aber beziehen sich die Definitionen und Axiome der Geometrie weder auf die sinnlichen Objecte noch auf unsere Vorstellungen von ihnen, sondern auf rein hypothetische Gebilde, denen sich die sinnlichen Objecte immer nur mehr oder weniger annähern können. Jene Definitionen und Axiome haben daher nur insoweit reale Gültigkeit, als sich die Objecte ihnen wirklich annähern. Nur in einem Punkte entfernt sich Mill von Hobbes: die Voraussetzungen der Mathematik sind ihm nicht willkürliche Fictionen, sondern Hypothesen, zu denen wir durch die Erfahrung genöthigt werden. Doch ist auch dieser Unterschied fast nur ein scheinbarer, denn weder hat Hobbes den Einfluss der Erfahrung geleugnet, noch kann sich Mill der Anerkennung widersetzen, dass die Aufstellung mathematischer Hypothesen schliesslich eine Handlung unseres Willens sei.

Es ist bemerkenswerth, dass neuere Mathematiker nicht selten aus eigenem Antrieb zu der nämlichen Auffassung gedrängt, dabei aber meistens durch Motive bestimmt worden sind, die von dem Empirismus Mills weit abliegen. Da zahlreiche Objecte mathe-

---

*) Mill, System der deductiven und inductiven Logik, übers. von Schiel, 2. Aufl., I, S. 270 f.

matischer Speculation ganz und gar imaginärer Art sind, also auf Voraussetzungen beruhen, die nicht unmittelbar aus der Erfahrung entspringen können, so betrachtet man alle diese Voraussetzungen als willkürliche Hypothesen. Da übrigens von den Vertretern der speculativen Mathematik zugestanden wird, dass irgend welche imaginäre Begriffe stets in Operationen ihre Quelle haben, die von den einer realen Veranschaulichung fähigen arithmetischen oder geometrischen Begriffen ausgehen, so bleibt auch hier in Bezug auf die fundamentalsten Principien die Ansicht Mills bestehen, dass dieselben hypothetischer Art, aber aus Anlass bestimmter Erfahrungsobjecte gebildet seien.

Das logische Verfahren nun, das aus einzelnen Erfahrungen allgemeine mathematische Sätze, Definitionen oder Axiome, ableitet, bezeichnet Mill als eine Induction, und er fasst dasselbe als vollkommen übereinstimmend mit der Gewinnung physikalischer oder anderer Naturgesetze durch Induction auf. Wie sich auf physikalischem Gebiet die empirischen Erscheinungen den von uns formulirten Gesetzen immer nur mehr oder weniger annähern, so sollen die Gesetze der Arithmetik und Geometrie nur eine schematische Bedeutung besitzen, dadurch aber gerade auf alle möglichen Objecte anwendbar sein. Auch in diesen Ausführungen treten die Schwächen der nominalistischen Auffassung deutlich zu Tage. Dass die mathematischen Wahrheiten in irgend einer Art von Erfahrung ihre Quelle haben, wird Niemand mehr leugnen. In diesem Sinne wird auch von vornherein zugestanden werden, dass die mathematische Erkenntniss schliesslich auf Inductionen zurückführt. Aber dass nun diese Inductionen in ihrem Wesen völlig mit denjenigen übereinstimmen sollen, aus denen wir allgemeine Naturgesetze gewinnen, dies ist eine Annahme, die in der thatsächlichen Verschiedenheit physikalischer und mathematischer Sätze ihre Widerlegung findet. Wohl stellt auch der Physiker abstracte Gesetze auf, die in der Erfahrung immer nur annähernd verwirklicht sind. Aber alle Abweichungen beobachtet er auf das genaueste und sucht sie auf ihre Ursachen zurückzuführen. Den Geometer dagegen stören die Ungenauigkeiten seiner Figuren ebenso wenig wie die Erkenntniss, dass es keine Objecte gibt, die seinen Begriffen vollkommen adäquat sind. Hierin liegt eben der Beweis, dass sich seine Inductionen nicht auf äussere Objecte beziehen, sondern nur auf seine eigenen Vorstellungen, und dass hier die Objecte bloss die Rolle von Hülfsmitteln spielen, welche die Vorstellungen erwecken sollen. Doch in einer Beziehung

existirt allerdings eine bemerkenswerthe Analogie zwischen der Generalisation der Naturgesetze und der Aufstellung mathematischer Sätze. Bei den fundamentalen Naturgesetzen gehen wir im allgemeinen von der Voraussetzung aus, dass sie von einfacher Art sind, dass sie also insbesondere eine einfache mathematische Formulirung zulassen. Nicht minder herrscht in der Mathematik diese Lex simplicitatis. In der Geometrie z. B. gelten der Punkt, die Gerade, die Ebene offenbar deshalb als die Elemente aller Construction, weil sie die einfachsten Gebilde unserer geometrischen Abstraction sind. Aber auch hier besteht ein wesentlicher Unterschied. In der Mathematik ist die Einfachheit der Principien eine selbstverständliche Voraussetzung. Wo es sich zeigen sollte, dass ein Princip dieser Voraussetzung nicht genügt, da muss es zerlegt werden, bis sie erfüllt ist. In der Naturwissenschaft ist die Einfachheit ein Postulat, dem immer nur insoweit nachzugehen erlaubt ist, als es die Erfahrung gestattet. Daraus geht schon hervor, dass dieses Postulat gar nicht in der Naturwissenschaft selbst entsprungen ist, sondern von aussen in sie hereingetragen wird. In der That ist leicht zu erkennen, dass es nirgend anders als in der Mathematik oder in den formalen Gesetzen unserer Zeit- und Raumanschauung, die das Object der Mathematik sind, seine Wurzel hat, wie solches auch die Thatsache andeutet, dass wir für jedes Naturgesetz einen möglichst einfachen mathematischen Ausdruck zu finden suchen.

Die Auffassung der mathematischen Sätze als Generalisationen, die den Generalisationen der Naturgesetze entsprechen sollen, kreuzt sich nun aber ausserdem mit einer fast noch unzulässigeren Anwendung des Begriffs der Abstraction. Da es keine Objecte oder Vorstellungen gibt, die den Begriffen der Einheit, des Punktes, der Geraden u. s. w. vollkommen adäquat sind, so liegt es nahe, alle mathematischen Grundbegriffe aus einem Abstractionsprocess hervorgehen zu lassen. So wenig nun zu leugnen ist, dass die Mathematik auf Inductionen aufgebaut sei, ebenso wenig lässt sich die Bedeutung der Abstraction bei der Aufstellung ihrer Begriffe in Abrede stellen. Aber auch hier begeht wieder der Nominalismus den Fehler, dass er diese Abstraction als einen uniformen Process ansieht, der sich in seiner Bethätigung auf mathematischem Gebiete durchaus nicht unterscheide von der Abstraction sonstiger Erfahrungsbegriffe. Nach ihm sollen wir den Begriff der Geraden in der nämlichen Weise bilden, in der in uns etwa der Begriff eines vierfüssigen Thieres entsteht. Wie wir bei diesem von allen Merkmalen eines Thieres nur

dasjenige der vier Füsse festhalten, so sollen wir bei dem Begriff der Geraden nicht nur von der verschiedenen Dicke und Länge der einzelnen in der Erfahrung gegebenen geraden Linien, sondern auch von ihrer mehr oder minder grossen Abweichung von der geraden Richtung absehen und so die Gerade in abstracto übrig behalten. Als wenn diese Eigenschaft gerade zu sein nicht eben allen einzelnen Linien, die von der geraden Richtung abweichen, fehlte, so dass sie unmöglich aus ihnen abstrahirt werden kann, sondern offenbar schon vorhanden sein muss, wenn jene Richtungen als annähernd gerade erkannt werden sollen. Ja Mill stellt gelegentlich die Eigenschaft der Dinge zählbar zu sein auf eine Linie mit ihrer Eigenschaft blau oder hart oder süss zu sein, mit dem einzigen Unterschied, dass dieses Merkmal der Zählbarkeit allen Dingen ohne Ausnahme zukomme*).

Gibt der Nominalismus in seinen Anfängen von der Entstehung der Voraussetzungen, von welchen die mathematische Demonstration ausgeht, gar keine Rechenschaft, so ist die Antwort dieser seiner letzten Entwicklungen ungenügend; denn indem hier hauptsächlich auf die äusseren Gelegenheitsursachen der mathematischen Begriffe Werth gelegt wird, bleiben die wesentlichen logischen Eigenthümlichkeiten, die bei der Entstehung dieser Begriffe obwalten, unbeachtet. Wirft so der Nominalismus die mathematischen Begriffe trotz ihrer bedeutsamen Unterschiede mit den gewöhnlichen Erfahrungsbegriffen zusammen, so reisst aber der Realismus beide dergestalt aus einander, dass den mathematischen Principien abermals das logische Fundament abhanden kommt. Sie erscheinen entweder, wie in den älteren Ansichten, als ein ursprüngliches Besitzthum des Geistes oder, wie bei Kant, als Erzeugnisse einer in ursprünglichen Anschauungsformen frei thätigen Einbildungskraft. So werthvoll hier der Hinweis auf die Betheiligung des Denkens und der allgemeinen Formen unserer Anschauung ist, so wird doch dabei nicht nur der Einfluss der äusseren und inneren Erfahrung unterschätzt, sondern es fehlt auch jeder Versuch, jener constructiven Thätigkeit, welche die mathematischen Objecte erzeugt, im Einzelnen nachzugehen und die logischen Verfahrungsweisen festzustellen, aus denen die mathematischen Begriffe entspringen. Ein Versuch dieser Art darf aber nicht die Principien für sich ins Auge fassen, isolirt von dem Unterbau zahlreicher einzelner Anschauungen und Sätze, den

*) Mill, Logik, I, S. 266.

sie voraussetzen. Denn die Geschichte der Mathematik lehrt, dass auch in ihr fast überall einzelne Erkenntnisse den allgemeinen vorangegangen sind.

### b. Die historische Bedeutung der mathematischen Induction.

Wo immer wir im Stande sind, die grundlegenden mathematischen Erkenntnisse auf ihren ersten Ursprung zurückzuverfolgen, da ergibt sich als deren Quelle die Induction aus der Erfahrung. So wird Niemand daran zweifeln, dass die vier arithmetischen Fundamentaloperationen aus Anlass der Wahrnehmungen getrennter Objecte und ihrer verschiedenartigen Gruppirungen entstanden seien, da ausser unserem eigenen Ziffernsystem die sämmtlichen Zählmethoden der Naturvölker auf einen solchen Ursprung hinweisen*). Aber es ist bemerkenswerth, dass wir in den Anfängen der mathematischen Wissenschaft deutlichen Spuren der Induction auch bei zusammengesetzten arithmetischen Problemen begegnen. Eine der frühesten Aufgaben dieser Art, die sich an die Division anschliesst, ist wohl die Umwandlung der durch die Theilung eines Ganzen gewonnenen Bruchzahlen in eine Summe einfacherer Brüche, die ihnen äquivalent ist, eine Aufgabe, die schon von den altägyptischen Rechnern mit grosser Fertigkeit gelöst wurde**). Der einfachste Bruch ist der, dessen Zähler die Eins ist, weil er unmittelbar das Verhältniss des Theils zu dem Ganzen angibt. Die Ueberführung in solche Stammbrüche gewährte eine leichtere Vergleichung verschiedener Theilungen mit einander, und sie spielte daher, wie es scheint, in den frühesten Zeiten der Mathematik eine ähnliche Rolle, wie sie heut zu Tage dem entgegengesetzten Verfahren der Umwandlung in Brüche mit gleichem Nenner zukommt. Aber während wir uns zu dem letzteren Zweck einer einfachen auf die arithmetischen Axiome gegründeten Regel bedienen, fand der ägyptische Rechner offenbar rein empirisch durch versuchsweise Theilungen, dass beispielsweise $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ oder $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ sei, u. s. w. Wie sehr die so gewonnene Tafel der Induction entsprungen ist, geht am sichersten daraus hervor, dass keinerlei übereinstimmende

*) Vgl. A. v. Humboldt, Crelle's Journal f. Mathematik, Bd. 4, S. 205. Pott, Die quinäre und vigesimale Zählmethode, Halle 1847.

**) A. Eisenlohr, Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des British Museum), Leipzig 1877.

Regel die verschiedenen Theilungen beherrscht, so dass offenbar jede einzelne Zerlegung eine besondere Induction erforderte.

Dass die frühesten geometrischen Sätze in ähnlicher Weise entstanden sind, wird nicht minder durch die Umstände, die ihr erstes Auftreten begleiten, über allen Zweifel erhoben. Eine der ersten Aufgaben der praktischen Geometrie war wohl die Berechnung des Flächeninhalts eines Quadrats aus seiner Seite. Indem man ein beliebiges Quadrat in kleine Quadrate von der Seitenlänge 1 zerlegte, ergab sich durch einfache Addition der Satz, dass der Flächeninhalt $= a \,.\, a$ sei, wenn die Länge einer Seite $= a$ ist. Es lag nahe, diesen Satz sofort auf das Rechteck zu übertragen und festzustellen, dass hier den Seiten $a$ und $b$ ein Flächeninhalt $a \,.\, b$ entspricht. Nur wenn in solcher Weise der erste Schritt durch Induction gethan war, konnte es geschehen, dass eine ähnliche Uebertragung weiterhin auch da stattfand, wo sie zu falschen Ergebnissen führte, dass man also beispielsweise den Inhalt des gleichschenkeligen Dreiecks von den Seitenlängen $a$ und $b$ zu $\frac{a \,.\, b}{2}$ bestimmte*). Auch die Ausmessung der Kreisfläche konnte in der frühesten Zeit nur empirisch, etwa durch Theilung in kleine Quadrate und Vergleichung mit dem über dem Durchmesser errichteten Quadrate geschehen sein, da sonst kaum begreiflich wäre, dass dieses Problem von Anfang an gerade in der Form der Quadratur des Kreises aufgetreten ist.

Von noch grösserem Interesse sind die Spuren, welche darauf hinweisen, dass Sätze, deren verwickelte Beschaffenheit ihre allgemeingültige Erkenntniss durch Induction ausschliesst, in gewissen einfacheren Fällen dennoch auf diesem Wege gefunden wurden, und der nachfolgenden Deduction nur die Aufgabe blieb, einen Beweis zu ersinnen, der das in einzelnen anschaulichen Beispielen Erkannte zu einer allgemeinen Wahrheit erhob. Auch hier mögen nicht selten empirische Proben, ob das in einem bestimmten Fall Beobachtete auch in einem andern davon abweichenden zutreffe, dem verallgemeinernden Beweise vorangegangen sein; war aber dieser erst gefunden, so gerieth jene inductive Vorbereitung leicht in Vergessenheit. Wenn uns übrigens berichtet wird, dass die Alten den Satz von der Winkelsumme im Dreieck für jede besondere Form des Dreiecks auch besonders bewiesen, zuerst für das gleichseitige, dann für das gleichschenkelige und zuletzt für das ungleichseitige Dreieck,

*) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I, S. 49.

so werden wir hierin die Spuren einer Induction um so weniger verkennen, als für das gleichseitige und gleichschenkelige Dreieck der unmittelbare Augenschein zu einer Messung der Winkel führen konnte. Denkt man sich das gleichseitige Dreieck *A B C* (Fig. 1)

Fig. 1.

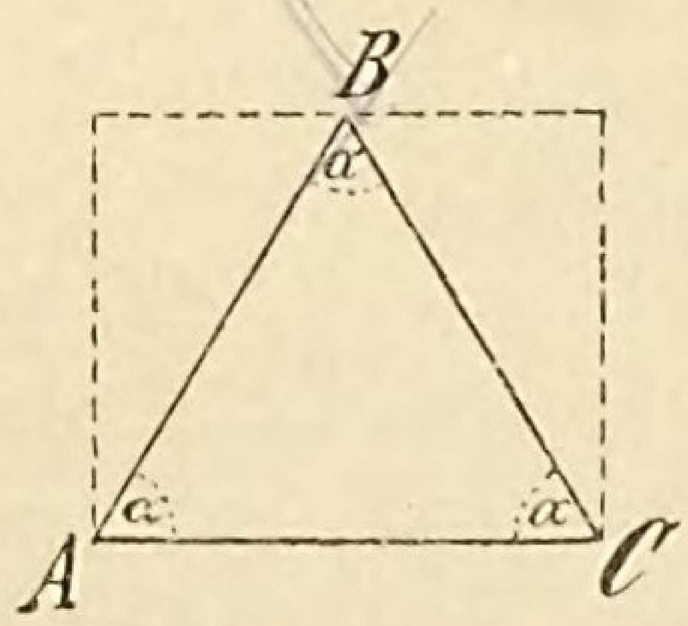
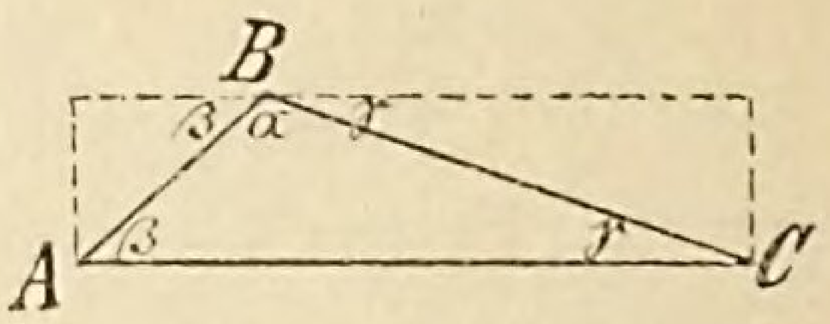



Fig. 2.



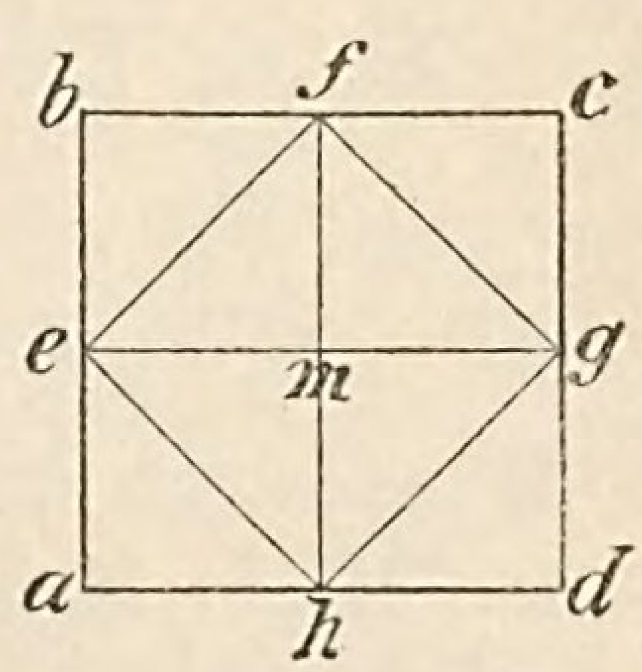

in ein Rechteck eingezeichnet, so lehrt leicht die Beobachtung, dass die drei Winkel bei *B*, die zusammen zwei Rechten gleich sind, den drei einander gleichen Winkeln des Dreiecks *A B C* entsprechen. War erst der Satz für diesen einfachsten Fall gefunden, so lag es nahe, ihn nun auch für das gleichschenkelige und sodann für jedes beliebige Dreieck durch eine ähnliche Einzeichnung in ein Rechteck zu constatiren. Indem jedoch, sobald alle drei Winkel bei *B* verschieden wurden (Fig. 2), zugleich sich die entsprechende Verschiedenheit der Dreieckswinkel der Beobachtung aufdrängte, mochte aus dieser Erweiterung ausserdem der allgemeinere Satz von der Gleichheit der Wechselwinkel entspringen, worauf dann später umgekehrt aus diesem erst der Satz von der Winkelsumme im Dreieck abgeleitet wurde*). Aehnlich ist der Pythagoreische Lehrsatz sicherlich zuerst aus einzelnen, der Anschauung leicht zugänglichen Fällen abstrahirt worden, mag man nun etwa an dem Dreieck von den Seitenlängen 3, 4, 5, dessen man sich seit alter Zeit zur Construction des rechten Winkels bediente, die Eigenschaft, dass das Quadrat der dritten Seite der Summe aus den Quadraten der beiden ersten gleich sei, herausgefunden**), oder mag man, was noch wahrscheinlicher sein dürfte, an einer Construction wie der in Fig. 3 dargestellten jenen Satz entdeckt haben. Eine regelmässige Figur dieser Art, die nicht einmal in geometrischer Absicht ausgeführt zu sein brauchte,

*) Eine ähnliche, aber in Bezug auf die Reihenfolge der Sätze entgegengesetzte Reconstruction vgl. bei H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter, Leipzig 1874, S. 96.

**) Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I, S. 153.

lässt sofort die Massbeziehung $efgh = \frac{1}{2} abcd = 2aemh$ erkennen*). Dieser einfachste Fall des Pythagoreischen Satzes, der sich auf das gleichschenkelige rechtwinkelige Dreieck bezieht, musste zugleich zu einer Wahrnehmung Anlass bieten, die für die Weiterentwicklung der Mathematik von folgenschwerer Bedeutung wurde. So anschaulich sich das Massverhältniss der Linien geometrisch erkennen liess, so widersetzte es sich doch einer genauen arithmetischen Bestimmung. Die Diagonale $eh$ irgend eines Quadrates $aemh$ lässt sich nicht in einer ganzen Zahl angeben, wenn $ae$, die Länge der Seite, durch eine ganze Zahl messbar ist. So haben wir allen Grund anzunehmen, dass die Entdeckung des Irrationalen, welche die Ueberlieferung dem Pythagoras zuschreibt, auf dem nämlichen Weg inductiver Ermittelungen geschehen sei. Nur in einer Beziehung überschreiten diese geometrischen Versuche bereits den Kreis der reinen Induction. Sie bedienen sich, namentlich da wo sie Sätze, die in speciellen Fällen gefunden sind, in Bezug auf ihre Allgemeingültigkeit prüfen wollen, der Ziehung von Hülfslinien. Die geometrische Hülfsconstruction aber bezeichnet, wenn sie auch durch die probeweise Art ihrer Anwendung hier noch ganz als inductives Hülfsmittel verwendet wird, doch schon deutlich den Uebergang zur Deduction, da der Gedanke nahe liegt, die nämlichen Hülfsmittel, die zur inductiven Auffindung eines Satzes gedient haben, nun auch sofort zu dessen Demonstration zu benützen. So ist es denn begreiflich, dass im einzelnen Fall häufig nicht mehr entschieden werden kann, ob eine bestimmte Hülfsconstruction sogleich in deductiver oder ursprünglich in inductiver Absicht gebraucht wurde. Gibt man sich aber Rechenschaft über den Weg, den heute noch Jeder bei der Lösung einer geometrischen Aufgabe einschlägt, so kann nicht zweifelhaft sein, dass die Construction überall zunächst in einem experimentellen Verfahren bestand, das manchmal erst nach vielen vergeblichen Versuchen zum Ziel führte. Nachdem durch

Fig. 3.




*) Aehnliche hypothetische Constructionen vgl. bei Hankel, a. a. O. S. 98, ebenso die in Bd. I, S. 571 mitgetheilte Figur, die jedoch weniger als die obige dem Geiste frühester Geometrie entsprechen dürfte.

dasselbe die Gültigkeit gewisser Sätze inductiv gefunden war, konnte man zur Aufsuchung der zweckmässigsten Constructionen übergehen und auf diese Weise auch der Deduction die nämliche Methode dienstbar machen. Die scheinbare Zufälligkeit, die so vielfach bei den Constructionen Euklids auffällt, trägt noch deutliche Spuren jenes tastenden Verfahrens an sich, das man bei den ersten geometrischen Inductionen befolgen musste. Ja selbst darin zeigen sich bei diesem Geometer die Nachwirkungen der inductiven Periode, dass er nicht ganz selten ein allgemeines Theorem in mehrere Fälle zerlegt, für die er einzeln den Beweis führt*).

### c. Die bleibenden Formen der mathematischen Induction.

Nehmen wir alle Ueberlieferungen zusammen, die uns aus der frühesten Entwicklungszeit des mathematischen Denkens geblieben sind, so lässt sich aus ihnen mit der grössten Wahrscheinlichkeit schliessen, dass die Mathematik ursprünglich eine inductive Wissenschaft gewesen ist. So bedeutsam dies aber auch für die Entwicklung der Erkenntniss überhaupt sein mag, so erscheint doch für den wissenschaftlichen Charakter der Mathematik von noch grösserer Wichtigkeit die weitere Thatsache, dass es in ihr gewisse bleibende Formen der Induction gibt, und dass gerade die fundamentalsten Sätze auf diese zurückführen.

Zunächst erweisen sich nämlich alle axiomatischen Sätze als solche, die nicht nur durch Induction entstanden sind, sondern für die auch fortan keine andere Begründung gegeben werden kann. Der Umstand, dass die mathematischen Axiome im allgemeinen nur Umformungen der Definitionen sind, die sich von Zahl, Grösse, Raum u. s. w. aufstellen lassen, ändert an dieser Sachlage nichts. Denn auch für die Definitionen lässt sich kein anderer Ursprung nachweisen als die Abstraction aus der Erfahrung. Selbst für die Definitionen rein imaginärer Gebilde hat dies Geltung, da dieselben von den durch Abstraction gewonnenen Fundamentalbegriffen ausgehen, die dann willkürlich in Bezug auf irgend welche Eigenschaften verändert gedacht werden. Insofern die mathematischen Definitionen ausschliesslich auf die Abstraction, die Axiome ausserdem noch auf die Induction zurückführen, offenbart sich jedoch der

*) Vgl. z. B. Euklids Elemente, Buch I Satz 26, Buch III Satz 33, 35, 36, Buch IV Satz 5, Buch V Satz 6, 8, 20, 21 u. s. w.

früher (Bd. I, S. 575 f.) hervorgehobene Unterschied beider Sätze von einer neuen Seite. Die Axiome werden regelmässig zuerst festgestellt. So ist die Wissenschaft lange Zeit im Besitz gewisser Axiome über Raum, Zahl und Grösse gewesen, ehe es gelang, befriedigende Definitionen dieser Begriffe zu gewinnen. In dem Abstractionsprocess, welcher zu denselben führte, spielen Axiome eine wichtige Rolle. Ohne die Sätze z. B., dass die Lage eines Punktes in Bezug auf einen andern immer durch drei Gerade bestimmt werden kann, und dass jedes Raumgebilde bei beliebiger Lageänderung sich selbst congruent bleibt, würde eine allgemeine Definition des Raumes gar nicht möglich gewesen sein. Kann man nun aber auch, nachdem diese Definition aufgestellt ist, aus ihr durch eine bloss formale Umwandlung die Axiome gewinnen, so führt doch jeder Versuch, die Richtigkeit dieser nachzuweisen, wiederum auf die ursprünglichen Inductionen zurück.

Nächst den Axiomen verdanken sodann solche Sätze einer Induction ihren Ursprung, die als *unmittelbare Specialisirungen der Axiome* betrachtet werden können. Hierher gehören alle Zahlformeln, wie $7 + 5 = 12$, $5 . 6 = 30$ u. dergl., alle auf die einfachsten Raumconstructionen sich beziehenden Sätze der synthetischen Geometrie, z. B. dass zwei Gerade in einem Punkt, zwei Ebenen in einer Geraden sich schneiden, dass alle Strahlen, die durch einen Punkt und eine Gerade gelegt werden, in einer einzigen Ebene liegen, u. s. w. Von den eigentlichen Lehrsätzen unterscheiden sich diese Fundamentalsätze dadurch, dass sie, hierin den Axiomen gleichend, keinen Beweis zulassen, sondern nur in dem unmittelbaren Hinweis auf die Anschauung ihre Begründung finden. Von den Axiomen dagegen sind sie insofern verschieden, als diese die allgemeinsten Abstractionen aus jenen sämmtlichen in der unmittelbaren Anschauung gegebenen Sätzen darstellen. Diese lassen sich daher auf die Axiome zurückführen, aber sie gestatten keinen eigentlichen Beweis aus denselben, da in ihnen stets besondere Elemente der Anschauung auftreten, die in den allgemeinen Axiomen nicht enthalten sind. Der Begriff der letzteren ist darum ungenügend bestimmt, wenn man sie bloss negativ als diejenigen Sätze bezeichnet, die einen Beweis aus andern Sätzen nicht zulassen. Vielmehr werden durch sie die *allgemeinsten* Gesetze festgestellt, von denen die verschiedenen mathematischen Begriffsgebiete beherrscht sind, und mit denen alle einzelnen Sätze in Uebereinstimmung stehen müssen. Sie sind daher Verallgemeinerungen aus den

durch Induction gefundenen und nur durch Induction erweisbaren einzelnen Thatsachen der mathematischen Anschauung. Die Axiome selbst lassen sich, eben weil sie völlig abstracte Sätze sind, nur in diesen ihren einzelnen Anwendungen in der Anschauung nachweisen. Das Additionsgesetz z. B. hat für uns eine anschauliche Wirklichkeit nur insofern, als wir es uns an einzelnen Additionsformeln deutlich machen. Den Satz von der Congruenz des Raumes mit sich selbst müssen wir auf concrete Raumgebilde anwenden, die wir uns im Raume bewegt oder zur Deckung gebracht denken, und alle einzelnen Congruenzsätze sind solche Anwendungen.

Ein drittes Gebiet der Induction bilden endlich diejenigen allgemeinen Sätze, die aus Einzelinductionen der soeben beschriebenen Art durch Generalisation entstanden sind. Bei der Feststellung des Gesetzes, nach welchem die Primfactoren einer Zahl sich bestimmen lassen, oder der Anzahl der Combinationen, die eine bestimmte Zahl von Elementen gestattet, oder der Form, nach der eine durch empirische Entwicklung gefundene Reihe fortschreitet, ist das inductive Verfahren so augenfällig, dass es längst Anerkennung gefunden hat. Es ist aber klar, dass es sich hierbei nur um eine Weiterführung der vorhin besprochenen einfachen Inductionen handelt. Durch eine einfache Induction erhält man z. B. die Zahlformel $1 + 3 = 4$, durch eine mehrmalige Wiederholung solcher Inductionen die Glieder einer arithmetischen Reihe 1, 4, 7, 10, 13 . . ., und aus der Betrachtung dieser und ähnlicher Reihen gewinnt man durch Generalisation den Satz, dass das $n$te Glied einer arithmetischen Reihe $= a + (n - 1)\,d$ ist, wenn mit $a$ das erste Glied und mit $d$ die constante Differenz bezeichnet wird. So bilden jene Specialisirungen der mathematischen Axiome, wie sie uns in den Zahlformeln und in den auf die einfachsten Constructionen zurückgehenden geometrischen Sätzen entgegentreten, den Anfang aller mathematischen Induction. Auf der einen Seite gehen aus ihnen durch Abstraction die Axiome, auf der andern Seite durch die an eine Anzahl verwandter Inductionen sich anschliessende Generalisation die verwickelteren Inductionen hervor.

Besonders bei jenen einfachen Sätzen, die entweder selbst unter die Axiome gehören oder als nächste Specialisirungen derselben betrachtet werden können, ist es nun ein altes Bestreben der Mathematiker, die Spuren der Induction zu verwischen. Dies geschieht entweder, indem man an die Stelle der Induction die Intuition

setzt, wobei man hervorhebt, dass eine einmalige Beobachtung zu ihrer Feststellung zureichend sei, oder indem man die Induction durch einen angeblich deductiven Beweis zu ersetzen sucht. Der erste dieser Einwände übersieht jedoch den Umstand, dass die Erfahrungen, aus denen wir die Ueberzeugung von der Richtigkeit der einfachsten arithmetischen und geometrischen Sätze geschöpft haben, zum grossen Theil von uns in einer Zeit gemacht wurden, die der wissenschaftlichen Induction lange vorausging. Den Charakter der Allgemeinheit wird man solchen Sätzen wie der Additionsformel $7 + 5 = 12$ oder dem geometrischen Satz, dass zwei Gerade nie mehr als einen Punkt gemein haben, nicht absprechen dürfen, denn der erste ist für alle möglichen Gruppirungen von 7 und 5 Einheiten, der zweite für alle möglichen Geraden im Raum gültig. Eben deshalb aber ist es nicht denkbar, dass man zur Feststellung dieser Sätze anders als durch ein mehrfaches Experimentiren gelangt sei. Nur eine Mehrheit von Anschauungen konnte lehren, dass, wie man auch die einzelnen Einheiten der Zahlen 7 und 5 aneinanderfüge, die resultirende Anschauung immer die nämliche Summe von Einheiten enthalte, oder dass, wie man auch die Richtungen der Geraden sich ändern lasse, niemals ein Bild mit zwei Durchschnittspunkten entstehen könne. Nicht besser steht es mit den Beweismethoden, durch die man den experimentellen Ursprung gewisser Erkenntnisse zu verhüllen sucht. Diese setzen entweder, indem sie apagogischer Art sind, in Wirklichkeit das zu Beweisende voraus, oder sie enthalten selbst nichts anderes als die Schilderung eines Inductionsverfahrens. In beide Gattungen gehören die Euklidischen Congruenzbeweise. Der versuchte Beweis für die Congruenz zweier Dreiecke besteht hier darin, dass man angehalten wird, die gleichen Stücke zur Deckung zu bringen, worauf, wenn die drei Seiten gleich sind, die unmittelbare Anschauung lehren soll, dass auch die ganzen Dreiecke zusammenfallen (I, Satz 8); oder, falls zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, eine Seite und zwei Winkel gleich sind, so wird gezeigt, dass die Voraussetzung der Nichtcongruenz dem Axiom, nach welchem zwei Gerade keinen Raum einschliessen, widersprechen würde (Satz 4 und 26). Es ist klar, dass auch dieser apagogische Beweis der Berufung an die unmittelbare Erfahrung nur eine andere Wendung gibt; denn ich weiss ja nur aus der Anschauung, dass das Dreieck eine geschlossene Figur ist, der Beweis sagt also bloss, dass die Nichtcongruenz meiner Anschauung widersprechen würde. Aehnlich verhält es sich mit den für gewisse mathematische Funda-

mentalsätze versuchten Beweisführungen. Das so genannte Associationsgesetz der Addition und Multiplication, wonach $(a + b) + c = a + (b + c)$ und $(a\,b)\,.\,c = a\,.\,(b\,c)$ ist, beweist man für beliebig viele Zahlen, indem man zeigt, dass es, wenn für eine gegebene Anzahl von Elementen richtig, auch für die nächst grössere Anzahl richtig sein müsse*). Dieses in der Mathematik als vollständige Induction bezeichnete Verfahren ist in der That insoweit eine Induction, als die Voraussetzung, das Gesetz sei für eine gegebene Anzahl zutreffend, nur aus experimentellen Ermittelungen hervorgegangen sein kann. Nur ist es nicht zulässig, diese Voraussetzung wie eine vorläufige Hypothese einzuführen, die durch die nachträgliche Ausdehnung auf eine beliebige Anzahl von Gliedern, welche in Wahrheit keine Induction mehr ist, ihre Bestätigung erst empfange. Diese Bestätigung würde nichts beweisen, wenn der Satz nicht durch Erfahrungen, die sich auf eine beschränkte Anzahl von Gliedern beziehen, vollkommen feststünde. Aber es ist eine bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit der neueren Mathematik, dass sie es liebt, die Erfahrung zu verleugnen, indem sie, um ihren deductiven Charakter zu wahren, Sätze als Hypothesen behandelt, die in Wirklichkeit durch Induction entstanden sind. Sehr augenfällig tritt dies an einer apagogischen Beweisführung hervor, die man für den mit dem Associationsgesetz nahe zusammenhängenden Satz versucht hat, dass, wenn zwei Zahlen $A$ und $B$ aus der nämlichen Anzahl von Einheiten bestehen, keine eindeutige Verknüpfung zwischen ihnen möglich ist, bei welcher ein Rest bleibt. Man nimmt an, das Gegentheil wäre möglich: es soll neben der Verbindung, die keinen Rest lässt, noch eine andere stattfinden können, bei der etwa von $B$ eine Einheit $b$ übrig bleibe. Nun nehme man dieses Element $b$ aus der Zahl $B$ und entsprechend das Element $a$, mit dem es bei der restlosen Verknüpfung verbunden war, aus $A$ weg: es wird dann vorausgesetzt, dass zwischen den gebliebenen Zahlen $A'$ und $B'$ wieder zwei Verknüpfungen, die eine mit einem Rest, die andere ohne einen solchen, möglich seien, und es sollen nun die einander entsprechenden Elemente $b'$ und $a'$ weggenommen und so fortgefahren werden, bis von jeder der beiden Zahlen nur noch eine Einheit übrig bleibt. Dass nun zwischen zwei Einheiten mehr als eine Art der Verbindung nicht stattfinden kann, ist unmittelbar einleuchtend, und es wird daher gefolgert, dass auch zwischen Zahlen aus beliebig vielen

*) Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, 2. Aufl., S. 3.

Einheiten nicht zwei Verbindungen möglich sind*). Der Schluss dieses Beweises ist offenbar eine demonstratio ad oculos, die allerdings am einleuchtendsten bei bloss zwei Einheiten wird, aber im allgemeinen auch schon bei Gruppen von je 2, 3 oder überhaupt einer kleineren Zahl von Einheiten deutlich genug sein dürfte. Es handelt sich, wie bei den Congruenzbeweisen Euklids, um eine Berufung an die Anschauung, die in das Gewand der apagogischen Beweisführung gekleidet ist. Das wirkliche Inductionsverfahren wird hierbei umgedreht. Während dieses von den einfachsten Fällen ausgeht, wird hier der zusammengesetzte Fall bis zum einfachsten zurückverfolgt. Es bedarf hiernach nicht mehr der näheren Ausführung, dass auch die übrigen allgemeinen Gesetze der Zahlenverknüpfung, das Commutations- und das Distributionsgesetz, $a + b = b + a$, $a\,b = b\,a$, $(a + b)\,c = a\,b + b\,c$ u. s. w., andere als inductive Begründungen nicht zulassen.

Nur auf einen Specialfall der Multiplication mag hier deshalb noch hingewiesen werden, weil bei ihm die Verkennung des inductiven Charakters eines Satzes zu sehr merkwürdigen Beweisversuchen den Anlass geboten hat, nämlich auf die Multiplicationsregel, wonach das Vorzeichen eines Productes aus zwei Factoren positiv ist, wenn beide Factoren ein gleiches, negativ, wenn sie ein verschiedenes Vorzeichen besitzen. Wenn man es auch für selbstverständlich hielt, dass $+ a \,.\, + b = + a\,b$ und allenfalls $+ a \,.\, - b = - a\,b$ sei, so wurde doch lange Zeit das Product $- a \,.\, - b = + a\,b$ für eine Art von Paradoxie gehalten, und noch in der neueren Analysis kann man Ausführungen begegnen, die sich mit der Bemerkung begnügen, dass $- a \,.\, - b$ nothwendig das entgegengesetzte Vorzeichen zu $+ a \,.\, - b$ empfangen müsse. Auch, wie es zuweilen geschieht, als bloss willkürliche Voraussetzungen, deren Berechtigung erst durch den Erfolg bewiesen werde, können jene Gleichungen nicht gelten, da ihre erfolgreiche Anwendung auf eine Berechtigung hinweist, die sie an und für sich schon besitzen müssen. Willkürlich ist nur der Gebrauch der Vorzeichen plus und minus für gewisse reale Gegensätze der durch Zahlen messbaren Objecte, wie der Werthgrössen, der Richtungen im Raume u. dergl. Gleichwohl ist gerade dieser Gebrauch lediglich aus der Beobachtung der zählbaren Objecte hervorgegangen. Die Verknüpfung zwischen den Grössen $a$ und $b$ ist in den drei Fällen die nämliche, darum erscheint auch immer

*) Ernst Schröder, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, I, S. 19 f.

das nämliche Product $a \,.\, b$. Aber die Gleichung $+ a \,.\, - b = - a b$ bedeutet, dass die Richtung der Grösse $b$, welche $a$-mal genommen werden soll, entgegengesetzt sei einer andern Richtung des nämlichen Grössencontinuums, die mit $+ b$ bezeichnet wurde, wo dann nothwendig auch die aus der Vervielfältigung hervorgehende Grösse einen negativen Werth haben muss. Das nämliche Resultat gewinnt man, wenn umgekehrt, entsprechend der Gleichung $- a \,.\, + b = - a b$, eine positive Grösse $b$ $a$-mal aufgehoben gedacht wird, wenn z. B. eine Summe von $b$ Wertheinheiten $a$-mal hinweggenommen wird: die Gesammtsumme der hinweggenommenen Wertheinheiten ist hier abermals $= - a b$, weil von vornherein die Aufhebung der ursprünglich gesetzten Grössen negativ bezeichnet wurde. Die Gleichung $- a \,.\, - b = + a b$ endlich sagt aus, dass eine negative Grösse $b$ $a$-mal aufgehoben gedacht wird, dass also z. B. ein Verlust vom Werthe $b$ $a$-mal wiederersetzt oder ein in rückläufiger Richtung gemessener Weg $b$ in rechtläufiger Richtung $a$-mal zurückgelegt sei. Hier muss mit derselben Sicherheit ein positives Product $a \,.\, b$ erscheinen, als eine doppelte Negation verschwindet, eine allgemein logische Regel, von welcher der mathematische Fall eine Anwendung ist. (Bd. I, S. 565.) Dieser Zusammenhang mit dem Satz des Widerspruchs beweist nichts gegen den inductiven Ursprung der Multiplicationsgesetze, da ja die logischen Axiome selber nicht nur gleichzeitig Gesetze des Denkens und der Objecte des Denkens, sondern auch unter dem Einfluss dieser Objecte entstanden sind. Auch wird durch den inductiven Ursprung der Multiplicationsregeln keineswegs ausgeschlossen, dass einzelne unter ihnen deducirt werden können, wenn die andern gegeben sind. Vielmehr wird, sobald nur die gegebenen Regeln eine vollständige Definition der positiven und der negativen Einheiten enthalten, eine solche Deduction möglich sein. In der That lassen sich aus den beiden Gleichungen $+ a \,.\, + b = + a b$ und $+ a - a = 0$ die zweite und dritte Multiplicationsregel ableiten*). Die Möglichkeit dieser Deduction beweist aber natürlich nur, dass, nachdem die erste Regel und der Begriff der entgegengesetzten Zahlen durch Induction und Abstraction gefunden sind, man sich die besondere inductive Auffindung der übrigen ersparen kann.

Mehr anerkannt ist das Stattfinden einer Induction in jenen Fällen zusammengesetzter Induction, bei denen gleichzeitig eine

---

*) Eine solche von Weierstrass herrührende Ableitung vgl. bei Kossak, Die Elemente der Arithmetik, Berlin 1872, S. 22 ff.

Generalisation aus einfacheren Inductionen stattfindet. Hierher gehören vor allem die Schlüsse von der Potenz $n$ auf die Potenz $n+1$, bei denen nur die Bezeichnung „vollständige Induction" eine unrichtige ist*). Aehnlich verhält es sich mit andern Reihenentwicklungen. So gewinnt man z. B. die Anfangsglieder der Reihe

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \frac{x^3}{1-x}$$

durch wirkliche Ausführung der Division von 1 durch $1 - x$. Nur weil durch experimentelle Verfahrungsweisen dieser Art thatsächlich solche Reihen gebildet werden, lässt sich die Voraussetzung rechtfertigen, dass überhaupt jede Grössenfunction eine Reihenentwicklung gestatte. Diese Voraussetzung für jeden einzelnen Fall besonders zu beweisen, ist dann allerdings nicht mehr nöthig, sondern es genügt, dass der Erfolg ihre Richtigkeit ohne Ausnahme bestätigt. Auch in diesen zusammengesetzteren Fällen kann jedoch die Induction, in einer übrigens vollkommen zulässigen Weise, verhüllt werden. Dies geschieht theils durch die Verbindung mit deductiven Operationen, theils aber auch dadurch, dass die Induction in indirecter Weise Anwendung findet. So benützt man z. B. die inductive Ermittlung der Primfactoren einer Zahl $m$, um daraus deductiv diejenigen Zahlen zu finden, die relativ prim zu $m$ sind**). Man würde die letzteren ebenso gut auf dem Wege einer directen, aber weit langwierigeren Induction durch Divisionsversuche bestimmen können.

### d. Die mathematische Abstraction.

Der Grund, weshalb die mathematische Induction besonders in ihren einfachsten Fällen übersehen zu werden pflegt, liegt vornehmlich darin, dass sie sich von Anfang an mit einem sehr vollständigen und durch eigenthümliche Merkmale ausgezeichneten Abstractionsverfahren verbindet. Niemand würde daran zweifeln, dass die Additionsformel $7 + 5 = 12$ der Induction ihren Ursprung verdanke, wenn die Zahlsymbole eine concrete Bedeutung besässen, wenn also die Formel etwa lautete: sieben Aepfel und fünf Aepfel sind zwölf Aepfel. Aber da jene Symbole alle möglichen Objecte bezeichnen können, so ist man geneigt, die Zahlvorstellungen und ihre Verbindungen sowie die grundlegenden geometrischen Construc-

---

*) Vgl. hierüber Bd. I, S. 351 f.

**) Lejeune-Dirichlet, a. a. O. S. 19 f.

tionen als die Schöpfungen einer reinen Gedankenthätigkeit anzusehen, auf welche der nur auf empirischem Gebiet zulässige Begriff der Induction keine Anwendung finde. In diesem Sinne meinte der ältere Realismus, alle mathematischen Sätze liessen sich aus den abstracten Begriffen der Zahl, der Grösse, des Raumes ohne jede weitere Beihülfe analytisch entwickeln. Sobald man dagegen die anschauliche Grundlage der mathematischen Sätze anerkannte, wurde man entweder durch den abstracten Charakter derselben veranlasst, sie mit Kant auf synthetische Constructionen innerhalb einer reinen Anschauung zurückzuführen, oder man suchte in einer Weise, die mehr auf die psychologische Natur der Vorgänge als auf ihre logische Bedeutung Rücksicht nahm, die Unterschiede zwischen der mathematischen und der naturwissenschaftlichen Induction zu verwischen. So besteht der Mangel beider Auffassungen darin, dass in ihnen jener Abstractionsprocess, der den mathematischen Inductionen hauptsächlich erst ihre Allgemeinheit sichert, nicht in zureichender Weise zur Geltung kommt. Bei Kant erscheint die reine Anschauung als ein ursprüngliches Gebiet innerer Erfahrung, in welchem jede Erkenntniss des Einzelnen mit der Construction anhebt, während in Wahrheit die reine Anschauung die höchste der Abstractionen ist, auf welche die einzelnen Abstractionen mathematischer Denkobjecte zurückführen. Mill dagegen vermengt die mathematischen Begriffsgebilde mit den Objecten der wirklichen Erfahrung, die Geometrie insbesondere bezeichnet er mit Comte als diejenige Naturwissenschaft, die sich mit den räumlichen Eigenschaften der Körper beschäftige*). So verwandeln sich ihm die Grundsätze der Mathematik in Inductionen, die sogar nur eine annähernde Gültigkeit besitzen, da es gerade Linien, Ebenen, regelmässige Figuren, wie sie die Geometrie voraussetzt, in der Wirklichkeit nicht gibt. Er nimmt die mathematischen Sätze für unmittelbare Inductionen aus der Erfahrung, während sie Inductionen aus Abstractionen von der Erfahrung sind.

Als Abstraction überhaupt haben wir das Verfahren bezeichnet, durch welches aus einer Anzahl einzelner Vorstellungen gewisse Elemente eliminirt und die zurückbleibenden als Gegenstand eines Begriffes festgehalten werden. (Abschnitt I, Cap. I, S. 11.) Vermöge des negativen Theils dieser Definition können wir nun offenbar die Entstehung mathematischer Begriffe ohne weiteres dem Verfahren der Abstraction unterordnen. Aber der positive Theil begegnet hier

---

*) A. a. O. II, S. 164.

eigenthümlichen Schwierigkeiten. Wenn jene Elimination vollständig ausgeführt wird, so scheint kein Rest übrig zu bleiben, der dem mathematischen Begriff entspricht. Die Zahl ist ebenso wenig eine für sich denkbare objective Eigenschaft der zählbaren Objecte, wie gerade Richtung und ausdehnungslose Beschaffenheit Merkmale sind, in denen gewisse Linien übereinstimmen. Trotzdem beweist diese Thatsache nicht, dass hier überhaupt keine Abstraction stattfindet, sondern sie beweist nur, dass man die mathematische Abstraction falsch interpretirt, wenn man sie vollständig nach Analogie derjenigen Abstractionen beurtheilt, zu denen die physikalische Beobachtung Anlass gibt. Aus der Vergleichung der mathematischen mit den physikalischen Begriffen erhellt ohne weiteres, dass jenes Eliminationsverfahren, in welchem das Wesen der Abstraction besteht, bei den ersteren ein *vollständigeres* gewesen sein muss. Die nächste Frage lautet also: welche Bedingungen müssen zu der gewöhnlichen Abstraction, die wir die physische nennen wollen, hinzutreten, wenn mathematische Begriffe entstehen sollen?

Die Antwort auf diese Frage ist leicht zu geben, sobald man sich die Schwierigkeiten vergegenwärtigt, in die sich die gewöhnliche Lehre von der empirischen Entstehung der mathematischen Begriffe verwickelt. Diese Lehre bleibt siegreich, so lange sie sich auf die Schilderung der negativen Seite der Abstraction beschränkt; sie scheitert aber in dem Augenblick, wo sie sich auf die positiven Begriffselemente besinnt, die ihr zurückbleiben. Die gewöhnliche Ausflucht, dass man sich auf die Vorstellungen beruft, die in unserm Bewusstsein die Begriffe repräsentiren, deckt nur nothdürftig dieses Scheitern; denn sie verwechselt die Zeichen der Begriffe mit den Begriffen selber. Der ganze Misserfolg hat aber seine Quelle darin, dass man von Anfang an diejenigen Vorstellungselemente, die den zur Einleitung des Abstractionsprocesses dienenden Objecten angehören, als die allein existirenden behandelt, die subjectiven, unserer eigenen Gedankenthätigkeit angehörenden ganz ignorirt. Führt nun jener Misserfolg zu dem Ergebniss, dass das Eliminationsverfahren der Abstraction scheinbar keinen Rest zurücklässt, so werden wir demnach sogleich schliessen dürfen, dass der in Wahrheit bleibende Rest nichts anderes als unsere bei der Bildung der mathematischen Vorstellungen wirksame Gedankenthätigkeit selbst ist, oder mit andern Worten, *dass mathematische Begriffe zu Stande kommen, indem wir von allen denjenigen Elementen der Vorstellung abstrahiren, die in dem Object ihre Quelle haben.*

Am deutlichsten kommt dieses Verfahren bei dem Begriff der Zahl zum Vorschein, weil die abstracte Natur dieses Begriffs sofort die Schwäche der physischen Abstractionstheorie blosslegt. Wenn wir uns fragen, was zurückbleibt, wenn wir von allen wechselnden Bestandtheilen jener Vorstellungen abstrahiren, an denen sich die Function des Zählens bethätigt, so ist dieses Zurückbleibende nichts anderes als die Function des Zählens selber, eine Aufeinanderfolge und Verbindung von Apperceptionsacten, deren jeder einzelne den abstracten Begriff der Einheit darstellt. Wir können freilich nicht zählen ohne Objecte, die uns in innerer oder äusserer Erfahrung gegeben sein müssen, und jede Darstellung von Zahlen sieht sich daher genöthigt, zu objectiven Versinnlichungen zu greifen, welche den einfachsten Gelegenheitsursachen, aus denen Zahlen entstehen, nachgebildet sind. Aber der Begriff der Zahl ist, was nach Elimination aller dieser wechselnden Elemente als das Constante zurückbleibt, die Verbindung der einzelnen Denkacte als solcher, abgesehen von jedem Inhalt. (Vgl. Bd. I, S. 521.)

Von hier aus wird es nicht schwer werden, auch den geometrischen Begriffen gerecht zu werden. Der geometrische Punkt unterscheidet sich darin vom physischen, dass es sich bei diesem immer um ein Etwas handelt, was objectiv, mit bestimmten physischen Eigenschaften begabt, gegeben sein soll. Der geometrische Punkt dagegen bedeutet den einzelnen Ort im Raume, insofern derselbe bloss durch unsere ortsbestimmende Gedankenthätigkeit gegeben ist. Von den Eigenschaften der physischen Gegenstände, die uns zur äusseren Bezeichnung so gut wie zur inneren Vorstellung eines Ortes dienen, wird abstrahirt; es bleibt nur die fixirende Thätigkeit zurück, ohne die sich keine Ortsbestimmung vollzieht. Die ausdehnungslose Beschaffenheit des Punktes ist eine selbstverständliche Folge dieser Abstraction, da die Ausdehnung immer nur den objectiven Bestimmungsmitteln der Oerter im Raum eigen ist. Etwas zusammengesetzter ist der Abstractionsprocess, der zum Begriff der geraden Linie führt. Hier wird nicht einfach, wie bei der arithmetischen Einheit und dem geometrischen Punkt, von dem zählbaren oder raumerfüllenden Object abstrahirt, sondern der sinnlichen Vorstellung eines annähernd geradlinigen Stabes folgt zunächst die Wahrnehmung, dass ein solcher Stab, wie er auch um sich selbst gedreht werden mag, stets in constanter Weise zwei von einander entfernte Orte im Raum, durch die man ihn gelegt denkt, verbindet. Dieser Erfahrung bemächtigt sich nun die mathematische Abstraction: indem

sie aus der Vorstellung des Stabes alle objectiven Bestandtheile eliminirt, bleibt der Denkact übrig, welcher die relative Lage der zwei Punkte in Bezug auf einander bestimmt. Da die Gerade, die zum Behuf der Lagebestimmung gezogen werden muss, nur in Bezug auf ihre Richtung und Länge bei jener Lagebestimmung in Betracht kommt, so bleiben als einzige Elemente des Begriffs einer gegebenen Geraden Richtung und Länge übrig. Der Umstand, dass es in der Natur keine absolut geradlinige Grenze gibt, steht diesem Begriff nicht im Wege, da der Gedanke der lagebestimmenden Verbindung zweier Punkte ein Postulat unseres Denkens ist, keine wirkliche Vorstellung.

In ähnlicher Weise ist nun die Verarbeitung der übrigen geometrischen Vorstellungen aufzufassen. Die einfacheren unter ihnen werden ebenfalls durch unmittelbare Erfahrungen nahe gelegt; andere entstehen durch objective oder subjective, von unserer Einbildungskraft geleitete Experimente, also auf dem Wege der Construction. Das auf solche Weise entstandene Bild wird aber erst zum geometrischen Object im eigentlichen Sinne, wenn wir alle diejenigen Elemente der Vorstellung eliminiren, die nur nebensächliche Begleiter des Resultates sind, das unser Denken beabsichtigt. Wollen wir eine gegebene Figur als Kreis auffassen oder einen Kreis construiren, so besteht die Forderung unseres Denkens in einer continuirlichen Folge geometrischer Punkte, die in einer Ebene liegen und mit einem einzigen festen Punkte durch gerade Linien von constanter Grösse verbunden werden können. Bei der geometrischen Untersuchung des Kreises beschäftigt uns nur diese Forderung, nicht die einzelne Vorstellung, die den Begriff in unserem Bewusstsein vertreten muss. Man hat vielfach den Hauptwerth darauf gelegt, dass die den Begriffen entsprechenden Vorstellungen von uns construirt werden müssten. In Folge dessen schwinde, wie man meint, die Schwierigkeit, dass die geometrischen Begriffe keinen realen Objecten entsprechen, und es sei darum möglich, die construirten Vorstellungen selbst als geometrische Gebilde zu betrachten, ohne dass ein hinzukommender Abstractionsprocess erforderlich wäre. Aber diese construirten Vorstellungen leiden an den nämlichen Ungenauigkeiten wie die äusseren Objecte; das wesentliche Moment der Begriffsbildung bleibt daher immer die Elimination aller empirischen Bestandtheile der Vorstellung und die Zurückführung auf diejenigen Elemente, die den Charakter von Postulaten des Denkens besitzen.

Die allgemeinen Bedingungen der mathematischen Begriffsbildung, die Anschauungsformen des Raumes und der Zeit, beruhen durchaus auf einer Abstraction der nämlichen Art, indem wir uns bei ihnen jeden gegebenen Raum- und Zeitinhalt eliminirt denken und so nur die subjectiven Apperceptionsformen zurückbehalten, die dem räumlichen und zeitlichen Vorstellen entsprechen. Eben wegen des auch hier vorhandenen Abstractionsprocesses ist die „reine Anschauung" ein Begriff und keine Vorstellung.

Von der Kantischen Auffassung unterscheidet sich die hier entwickelte hauptsächlich darin, dass Kant die subjectiven Elemente der mathematischen Begriffsbildung den objectiven vorangehen lässt und sie in diesem Sinne als transcendentale Bedingungen der empirischen Vorstellung selbst bezeichnet. Denn indem Kant die begriffliche Natur der reinen Anschauung leugnet, wird er genöthigt, eine constructive Thätigkeit der reinen Einbildungskraft anzunehmen. Nichts aber berechtigt uns, in dieser Weise das letzte Resultat des mathematischen Erkennens an dessen Anfang zu stellen, statt dem wirklichen Erkennen Schritt für Schritt nachzufolgen. Nun besteht in der Reduction auf die formalen Bedingungen unserer Auffassung das Wesen des mathematischen Apriori. Darum können wir den Grund desselben nicht in einer jede Induction und Abstraction entbehrlich machenden Construction, am wenigsten aber in einem aller Erfahrung vorausgehenden Wissen erblicken, da vielmehr die mathematischen Begriffe, von der Erfahrung ausgehend, den längsten Weg zurücklegen müssen.

Das ganze zur Feststellung der mathematischen Begriffe dienende Abstractionsverfahren gehört der Form der isolirenden Abstraction an. Auch in den weiteren Verlauf des mathematischen Denkens greift aber die Abstraction unter fortwährender Verbindung mit der Induction ein. Als generalisirende macht sie es möglich, die an einzelnen Gebilden der Anschauung gewonnenen Sätze sofort auf ganze Classen solcher Gebilde zu übertragen und so denselben die ihnen zukommende Allgemeinheit zu sichern. Sodann bemächtigt sich die nämliche Abstraction der durch einzelne Inductionen entstandenen Sätze, um mit ihrer Hülfe die nachher in der Form von Definitionen fixirten Grundbegriffe zu gewinnen, die als die allgemeinen Bedingungen jener einzelnen Sätze angesehen werden können. Ist auf diese Weise erst die allgemeinste Definition gefunden, die ein bestimmtes mathematisches Begriffsgebiet beherrscht, so liegt darin der Anlass, nun wiederum solche Sätze zu prüfen,

denen ein axiomatischer Charakter zugeschrieben werden kann, und aus ihnen diejenigen zum Rang definitiver Axiome zu erheben, die zureichend sind die Definition zu erschöpfen und daher alle andern unmittelbar anschaulichen, keines Beweises bedürftigen Sätze als specielle Fälle unter sich enthalten. Euklids Axiome erscheinen uns nur darum fast zufällig zusammengetragen, weil ihre Aufstellung nicht von bestimmten Definitionen der Grundbegriffe von Zahl, Grösse und Raum geleitet wird, weshalb theils Axiome verschiedenartiger Gebiete mit einander, theils Sätze von untergeordnetem Charakter mit den Axiomen vermengt sind. Dieser Mangel des Euklidischen Systems ist also wesentlich die Folge unzureichender Generalisation.

## 4. Die mathematische Deduction.

Bei der grossen Bedeutung, welche die Mathematik für die Ausbildung der deductiven Methoden besitzt, hat sich bereits die allgemeine Methodenlehre vielfach auf das Vorbild der mathematischen Wissenschaft beziehen müssen. Namentlich sind die Hauptformen mathematischer Deduction in der Lehre von der Deduction und vom deductiven Beweis besprochen worden; mit der Betrachtung der einzelnen, an bestimmte Grundbegriffe sich anlehnenden logischen Methoden aber werden sich die folgenden Capitel beschäftigen. Nur eine allgemeine Deductionsform, die specifisch mathematischer Natur und für alle Gebiete der Mathematik von eminenter Wichtigkeit ist, bedarf hier noch der genaueren Untersuchung: es ist dies die Deduction nach exacter Analogie, die auf den früher betrachteten exacten Analogieschluss als ihre logische Grundform zurückführt. (Vgl. Bd. I, S. 349 f.) In dem systematischen Zusammenhang des mathematischen Denkens pflegt die exacte Analogie eine gewöhnliche unvollständige Induction deductiv abzuschliessen, indem sie dem Resultat derselben Allgemeingültigkeit sichert.

Am deutlichsten ist dies bei dem schon früher erwähnten Schlusse von einem Gliede $n$ auf ein weiteres Glied $n + 1$, der fälschlich so genannten „vollständigen Induction“ der Mathematiker. So findet man z. B. durch Induction, dass das Commutationsgesetz für zwei und für drei Zahlen gilt, und zeigt dann, dass es in ähnlicher Weise von $n$ auf $n + 1$ Zahlen ausgedehnt werden kann, wodurch es, da für $n$ jede beliebige Zahl gesetzt werden darf, allgemein

bewiesen ist*). Der gemeinsame Grund für diese unbedingte Verallgemeinerung arithmetischer Inductionen ist die Gleichförmigkeit der Zahlgesetze. Diese gründet sich aber nicht bloss auf die thatsächliche Bestätigung in aller Erfahrung, sondern in erster Linie auf jene Constanz der Begriffe, welche die Bedingung unseres eigenen logischen Denkens ist. Wollte ich voraussetzen, dass für den Fortschritt von $n$ zu $n+1$ ein anderes Gesetz der Zunahme Platz greife als von 1 zu $1+1$, so müsste ich annehmen, dass der Begriff der Eins oder der Vorgang der additiven Verbindung eine Veränderung erfahren habe, d. h. dass identische Denkoperationen nicht mit einander identisch seien. Eine solche Annahme widerstreitet freilich auch aller Erfahrung. Dennoch heisst es Heterogenes vermengen, wenn man nun deshalb mit Mill mathematische Verallgemeinerungen dieser Art der Generalisation empirischer Gesetze gleichstellt und sie auf eine blosse inductio per enumerationem simplicem zurückführt**). Es waltet doch eine wesentliche Verschiedenheit ob zwischen einem Satze, der seine allgemeine Geltung nur dem Umstand verdankt, dass bis dahin keine Erfahrung ihm widersprochen hat, während widerstreitende Erfahrungen sehr wohl vorstellbar wären, und einem solchen Satze, dessen Beseitigung wir uns nicht denken können, ohne gleichzeitig die Gesetze unserer Anschauung und die Normen unseres Denkens verändert zu denken.

In wesentlich anderer Weise vervollständigt die Analogie jene vereinzelten Inductionen, die sowohl den zusammengesetzten Inductionsprocessen wie der Bildung der Axiome zur Grundlage dienen. Hier haben die einzelnen durch Induction gewonnenen Sätze die Bedeutung abstracter Regeln für singuläre Thatsachen, die an und für sich einer Verallgemeinerung nicht zugänglich sind; die Analogie gestattet es dann aber ohne weiteres, andere singuläre Sätze von verwandter Art festzustellen, für die in Folge dessen das Erforderniss einer besonderen Induction hinwegfällt. Nachdem die Summe $7+5=12$ durch wirkliche Addition der Einheiten gefunden ist, bilden wir sofort die Summen $70+50=120$, $700+500=1200$ u. s. w., ohne dass es uns nothwendig scheint, auch in diesen Fällen die Addition durchzuführen. Indem man die 10, 100, 1000 u. s. w. als neue zusammengesetzte Einheiten betrachtet, setzt man voraus, die zwischen ihnen möglichen Operationen seien den nämlichen Ge-

*) Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, S. 1 ff.
**) Mill, Logik, II, S. 154.

setzen unterworfen wie die zwischen den einfachen Einheiten. Die einzelnen Inductionen, aus denen die axiomatischen Gesetze der Addition, Multiplication, Subtraction und Division abstrahirt sind, beschränken sich so auf die Feststellung der für die Zahlen 1 und 10 möglichen Zahlformeln, die bei den directen Operationen unter allen Umständen leicht ausführbaren Verknüpfungen der Einheiten entsprechen, während bei den inversen Operationen in jenen Fällen, in denen sich negative, irrationale oder imaginäre Grössen ergeben, die aufgestellten Beziehungen wirklichen Inductionen nicht unmittelbar parallel gehen. In der That ist es gar nicht denkbar, dass man, so lange die Zahlen ihre ursprüngliche Bedeutung bewahrten, durch unmittelbare Zählungen zu negativen oder irrationalen Zahlen gelangt wäre. Vielmehr wurden die betreffenden Zahlformeln zunächst nur nach Analogie anderer, aus wirklichen Inductionen hervorgegangener gebildet, und erst spätere Inductionen von anderer Beschaffenheit führten zu der Entdeckung, dass ihnen eine reale Bedeutung zukommen könne. Hier hat sich also der gewöhnliche Verlauf umgekehrt, indem die Analogie zuerst zu bestimmten Gesetzen führte, welche dann durch Induction eine objective Grundlage gewannen. Selbstverständlich kann es sich in solchen Fällen auch ereignen, dass die nachfolgende Induction ganz ausbleibt. Wo sie sich aber einstellt, da ist der Vorgang nicht so zu verstehen, als wenn die Begriffe zuerst durch Analogie und dann noch einmal selbständig durch Induction gefunden wären. Vielmehr hat die Induction immer nur zu realen Beziehungen geführt, für deren Ausdruck sich die schon vorhandenen Begriffe als geeignete Hülfsmittel erwiesen. Ihre Anwendung ging daher aus einer willkürlichen Uebertragung hervor, zu der die Induction nur das äussere Motiv bildete. Kein objectiver Zwang nöthigt uns, Gewinn und Verlust, Vermögen und Schulden durch positive und negative Zahlen auszudrücken; aber durch Induction aus der Erfahrung mussten jene gegensätzlichen Begriffe entstanden sein, wenn die negative Zahl überhaupt eine reale Bedeutung erhalten sollte.

Auf geometrischem Gebiete ist es die Analogie, welche das in einer einzelnen Construction anschaulich Gegebene ohne weiteres auf alle Raumgebilde gleicher Art überträgt, um so der in einem einzelnen Fall erkannten Thatsache den Werth eines allgemeinen Gesetzes zu sichern. Diese Analogie ist eine exacte, weil sie sich auf die Unmöglichkeit stützt, andere Räume als den in der wirklichen Anschauung gegebenen vorzustellen. Die grosse Schwierig-

keit, die seit langer Zeit die Geometer in dem so genannten Parallelenaxiom gefunden, beruht wesentlich auf dem Vorkommen der bei diesem Satze mitwirkenden Analogie. Dass zwei gerade Linien, die von einer dritten unter gleichen Winkeln geschnitten werden, sich selbst niemals schneiden können, wie weit wir sie auch verlängern mögen, schliessen wir daraus, dass die schneidende Linie sich selbst parallel beliebig längs der beiden Parallelen verschoben werden kann, ohne dass sich die schneidenden Winkel ändern. Insoweit sich dieser Schluss auf die unmittelbare Anschauung stützt, ist er eine Induction; insoweit er von uns über jede mögliche Anschauung hinaus verallgemeinert wird, ist er eine exacte Analogie, die sich auf die durchgängige Congruenz des Raumes mit sich selber stützt.

In einem wesentlich anderen Sinne dagegen verwerthet die geometrische Untersuchung die Analogie, wenn sie die Uebergänge zwischen den geometrischen Begriffen über die reale Anschauung hinaus im Sinne einer blossen Analogie fortsetzt, wenn sie also einen analogen Uebergang, wie er von der Ebene zum Raum stattfindet, zwischen Räumen von mehr Dimensionen statuirt. Hier beginnt, ähnlich wie bei den Erweiterungen des Zahlbegriffs, der Process mit einer Analogie, der dann unter Umständen Inductionen, die eine reale Anwendung vermitteln, nachfolgen können. Nur muss man freilich beachten, dass diese Anwendungen nicht mehr dem Gebiet der eigentlichen Geometrie, welcher durch die Raumanschauung ihre festen Grenzen gezogen sind, angehören, sondern dass es sich hierbei immer nur um eine Behandlung von Problemen anderer Gebiete, der Functionentheorie oder der Mannigfaltigkeitslehre, in geometrischer Form handelt.

Auf diese Weise ergeben sich für die Benützung der exacten Analogie in dem Zusammenhang der mathematischen Methoden allgemein zwei Formen: die erste, die sich an die Induction anschliesst und zur Feststellung der Allgemeingültigkeit gewisser ursprünglich durch Induction gewonnener Sätze führt, und eine zweite, die gewisse Operationen oder auf anderem Wege festgestellte Begriffe über ihr ursprüngliches Gebiet hinaus erweitert, indem sie einen bestimmten logischen Process nach Analogie der für ihn in den Erfahrungsgrenzen gültigen Normen über die letzteren fortsetzt. Während die erste Form vorzugsweise bei den fundamentaleren Sätzen ihre Anwendung findet, dient die zweite als Basis der abstractesten, zuweilen völlig von dem Boden der Anschauung

sich entfernenden Speculationen. Beide Formen lassen sich auf verschiedene Principien zurückführen, die erste auf ein Princip der Constanz mathematischer Gesetze, die zweite auf ein Princip der Permanenz mathematischer Operationen. So sehr auch das erste derselben, das Constanzprincip, geeignet ist, die in einzelnen Anwendungen festgestellten Gesetze auf eine beliebige Zahl anderer Fälle auszudehnen, so ist es doch niemals im Stande, zu neuen Begriffen und Gesetzen zu führen. Dagegen besitzt das Permanenzprincip in hohem Grade diese Eigenschaft. Durch seine Anwendung werden regelmässig bedeutsame Umgestaltungen der Begriffe hervorgebracht, und diese können zugleich von Umwandlungen der für die Begriffsoperationen gültigen Gesetze begleitet sein*). Die grosse Wichtigkeit, welche das Permanenzprincip hierdurch für die Entwicklung des mathematischen Denkens besitzt, wird sich namentlich aus den Anwendungen ergeben, die es auf den fundamentalsten Begriff der Mathematik, auf den der Zahl, gefunden hat.

---

## Zweites Capitel.

## Die arithmetischen Methoden.

### 1. Die Zahlen und ihre Symbole.

#### a. Das Ziffernsystem.

Weiter zurück als unsere sonstigen für andere Begriffe gebrauchten Schriftsymbole reichen die Anfänge der Zahlsymbolik, die ihrerseits die Quelle des ganzen von der gewöhnlichen Sprache so weit abweichenden Zeichensystems der Mathematik geworden ist. Ursprünglich sind die besonderen Zahlzeichen durch nichts als durch den äusseren Vortheil der Kürze vor den anderen Schriftsymbolen ausgezeichnet. Nur in der fast überall befolgten Regel, dass bei einem Aggregat aus mehreren Zahlen die grössere der kleineren

*) Den Ausdruck „Permanenzprincip" für diesen zweiten auf der exacten Analogie beruhenden Grundsatz hat bereits H. Hankel gebraucht (Theorie der complexen Zahlensysteme, Leipzig 1860, S. 10).

vorangeht*), lässt sich eine unmittelbare Wirkung der arithmetischen Operationen erkennen. Da jede Zahl aus einer Addition von Einheiten entstanden ist, so wird sie nämlich durch ebenso viele Summen ausgedrückt, als sie Zahlsymbole zu ihrer Schreibung bedarf. CLIII z. B. bedeutet die drei Summen 100, 50 und 3. Da nun hierbei die kleinere Summe der nach vollendeter Abzählung der grösseren gebliebene Rest ist, so ergibt sich von selbst, dass sie nachfolgt. In der That kann daher die umgekehrte Anordnung nur dort eintreten, wo nicht die Addition, sondern die Subtraction oder Multiplication zur Bildung der Zahlbezeichnungen dient, wie dies z. B. in der lateinischen Sprache und Schrift gelegentlich der Fall ist. Aber da die wirkliche Bildung der Zahlen von der Addition ausgeht, so konnten nur ausnahmsweise im Interesse der Kürzung solche entgegengesetzte Stellungen aufkommen, und sie mussten bei jedem rationell durchgeführten Ziffernsystem gegenüber der Forderung gleichmässiger Ordnung wieder verschwinden.

Derjenige Schritt, der dem Ziffernsystem erst seinen specifisch mathematischen Charakter aufgeprägt hat, ist dessen Umwandlung in ein reines Positionssystem. Dieses unterscheidet sich aber von den vorangegangenen Systemen regelmässiger Anordnung dadurch, dass nicht die Stellung der Zahl nach ihrem Werthe, sondern umgekehrt der Werth der Zahl nach ihrer Stellung sich richtet. Diese sinnreiche Umkehrung der Beziehung wurzelt zwar in dem nämlichen Gesetz der Summirung, dem die vorangegangene Abhängigkeit der Stellung vom Werthe entsprungen war; möglich aber wurde sie durch die Erfindung der Null. Denn die letztere gestattet es, eine doppelte Werthbezeichnung der Ziffern anzuwenden; eine erste, die an das Symbol als solches geknüpft ist, und eine zweite, die von seiner Stellung abhängt. Diese gibt die allgemeine Classe an, welcher die Ziffer zugerechnet werden soll. Die Werthverhältnisse der Classen sind dabei an sich willkürlich und conventionell, aber es wird durch sie die Menge der einzelnen Symbole bestimmt, welche für die in jeder Classe vorhandenen Zahlen erforderlich sind. So beruht das Decimalsystem auf dem Princip, dass die unterste Classe neun einfache, jede höhere Classe aber neun zusammengesetzte Einheiten enthält, deren jede zehn Einheiten der nächst niederen Classe gleich ist. Wo in einer Classe

*) H. Hankel, Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter. S. 32.

überhaupt keine Einheiten vorkommen, da wird dies durch das zehnte Zeichen, die Null, ausgedrückt. Das Geschäft der Zählung dadurch zu erleichtern, dass man Gruppen von Einheiten bildet und diese als neue Einheiten behandelt, ist ein so nahe liegender Gedanke, dass er lange vor der Ausbildung einer Ziffernsymbolik verwirklicht war, daher die letztere überall von ihm Gebrauch macht. Das von den indischen Mathematikern erfundene Positionssystem aber hat diesen Gedanken nach dem durch die Decimalmethode geforderten Princip systematisch durchgeführt und dabei durch die reine Stellungsbezeichnung der Einheitswerthe den ungeheuren Vortheil erreicht, dass sie mit der möglichst kleinen Anzahl von Zeichen auskommt, indem sie ausser der Null nur so viele Ziffernsymbole nöthig hat, als die niederste Classe Einheiten enthält. Dass hierbei das Decimalsystem den Vorrang erhielt, ist wie gesagt conventionell. Man wird ihm den Vorzug einräumen können, dass es in Anbetracht der durch die praktischen Rechenbedürfnisse gestellten Bedingungen zwischen dem Zuviel und Zuwenig eine richtige Mitte hält. Hätte man die Zahl der Symbole und also auch der Einheiten jeder Classe noch mehr beschränkt, wie in dem quinären System mancher Naturvölker, so würden schon bei mässigen Summen der Classen zu viele sein. Hätte man ein vigesimales oder gar sexagesimales System bevorzugt, so wäre die Menge der Zeichen nachtheilig für ihre sichere Unterscheidung geworden. Nur das duodecimale System, wie es in unserer Tageseintheilung angedeutet ist, hätte diese Vortheile in ungefähr gleichem Grad dargeboten, und es würde daneben für die Division den Vorzug besitzen, dass die Einheiten höherer Classe in eine grössere Anzahl von Factoren zerlegt werden könnten als die Zehn und ihre Potenzen. Da sich jedoch die objectiven Bedingungen der Jahres- und Tageseintheilung, aus denen möglicher Weise ein Duodecimalsystem zu entwickeln war, minder zwingend geltend machten, und da sie überdies nur in sehr annähernder Weise auf Verhältnisse ganzer Zahlen zurückführbar waren, so hatte hier von vornherein die auf den unveränderlichen Eigenschaften des Menschen selbst beruhende decimale Zählmethode den Vorzug.

Das Positionssystem stellt, ganz abgesehen von der speciellen Form, die es als Decimalsystem angenommen hat, jede beliebige Zahl allgemein als eine Reihe dar von der Form

$$\ldots e\beta^4 + d\beta^3 + c\beta^2 + b\beta + a,$$

in welcher durch $a, b, c, d \ldots$ die Einheitswerthe der einander folgenden Classen bezeichnet sind, während $\beta$ die Anzahl der in dem

gewählten System vorhandenen Ziffernsymbole bedeutet; im Decimalsystem ist also $\beta = 10$, während für $a, b, c, d$ . . . irgend welche unter den Ziffern 0 bis 9 eintreten können. Diese Reihe zeigt deutlich den mathematischen Charakter des Positionssystems: jede Zahl wird durch dieses in eine Reihe von Summen zerlegt, welche nach absteigenden Potenzen der Grundzahl des Systems geordnet ist. Da die Reihe bis zu jeder beliebigen Potenz von $\beta$ fortgesetzt werden kann, so ist sie durch keine noch so grosse Zahl begrenzt, ohne dass doch der kleine Vorrath der benützten Ziffernsymbole überschritten zu werden braucht. Das Positionssystem hat daher die durch die unbegrenzte Menge der Zahlen gestellte Forderung gelöst. In der That erkannten schon die indischen Mathematiker, dass die unbegrenzt grosse Zahl, deren Begriff in jener Forderung gegeben ist, zwar niemals durch eine wirkliche Summenreihe, wohl aber, unter Zuhülfenahme des nämlichen Symbols, welches das Fehlen einer Einheit andeutet, der Null, durch eine Division von der Form $\frac{a}{0}$ ausgedrückt werden kann*).

Nicht in der gleichen Weise wie nach oben sind die Zahlen nach unten unbegrenzt. Grössen, die kleiner als die Einheit sind, können zwar bis zu beliebiger Kleinheit durch echte Brüche ausgedrückt werden. Da die Nenner solcher Brüche aber jeden möglichen Werth haben können, so fehlt es innerhalb der ursprünglichen natürlichen Zählmethoden an einem Princip, welches für derartige Zahlen eine durchgängige Vergleichbarkeit herstellt. Das Positionssystem liefert dieses Princip, indem es einfach den Aufbau der Zahl aus einer Summenreihe nach entgegengesetzter Richtung fortsetzt. Wie es die Zahlen, die über der Einheit liegen, durch die Bildung neuer Einheiten gewinnt, die im directen Verhältniss der aufsteigenden Potenzen der Grundzahl des Systems zunehmen, so gewinnt es die Zahlen unter der Einheit ebenfalls durch die Bildung neuer Einheiten, die den aufsteigenden Potenzen der Grundzahl reciprok sind. So entsteht beim Decimalsystem die Ergänzung durch die Decimalbrüche oder allgemein die Darstellung einer beliebigen Zahl durch die Reihe

$$\ldots e\beta^4 + d\beta^3 + c\beta^2 + b\beta + a + \frac{b'}{\beta} + \frac{c'}{\beta^2} + \frac{d'}{\beta^3} + \frac{e'}{\beta^4} + \ldots,$$

*) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I, S. 523.

welche Reihe nach beiden Seiten unbegrenzt wachsen kann und so auf die beiden Begriffe der unbegrenzt grossen und der unbegrenzt kleinen Zahl hinweist. Durch diese Ausdehnung hat sich das Positionssystem zugleich den Erweiterungen angepasst, die der ursprüngliche Zahlbegriff durch die Entwicklung der gebrochenen und namentlich der irrationalen Zahlen erfuhr.

### b. Die Zahlarten und Zahlsysteme.

Durch die einfachen arithmetischen Operationen und ihre Wiederholung entstehen aus dem ursprünglichen System der positiven ganzen Zahlen neue Zahlbegriffe, welche dann zugleich eine reale Anwendung auf geometrische oder beliebige andere Grössen gestatten. Allgemein ist daher zunächst eine doppelte Möglichkeit für die Erzeugung neuer Zahlbegriffe gegeben. Dieselben können erstens entstehen durch die Anwendung des Permanenzprincips auf die Resultate arithmetischer Operationen, indem man voraussetzt, dass mit diesen Resultaten stets die nämlichen Operationen wie mit den ursprünglichen Zahlen wieder ausgeführt werden können; zweitens können sie sich bilden durch die Anwendung des Constanzprincips auf beliebige in der Anschauung gegebene Objecte, indem man annimmt, dass jeder Gegenstand, der überhaupt dem Begriff der Grösse subsumirt werden kann, eine analoge Messung durch Zahlen gestatte, wie eine solche für discrete abzählbare Objecte möglich ist. Diese historisch auf einander gefolgten Entstehungsformen der secundären Zahlbegriffe tragen aber logisch, beide aus verschiedenen Gründen, den Charakter der Zufälligkeit an sich. Bei der ersten erscheint es als ein willkürlicher Act, dass Rechnungsresultate, die nicht durch Zahlen ausgedrückt werden können, dennoch wie Zahlen behandelt werden; bei der zweiten entspringen die neuen Begriffe aus den empirischen Eigenschaften unserer Sinneswahrnehmung, und sie würden daher möglicher Weise ganz andere sein können, wenn diese Eigenschaften sich veränderten. Der Versuch erscheint daher gerechtfertigt, dass man jene beiden äusseren Entwicklungsformen der Zahlbegriffe durch eine innere, dem ursprünglichen Zahlbegriffe selbst immanente zu ersetzen strebt.

Diese dritte Erzeugungsweise, die wir im Unterschiede von der arithmetischen und geometrischen die logische nennen wollen, kann aber allein dadurch zum Ziele führen, dass sie die begrifflichen Merkmale, die in den secundären Zahlbegriffen zur Anwen-

dung kommen, schon in den ursprünglichen Zahlbegriff aufnimmt. Dies geschieht am einfachsten, wenn man ausser dem Begriff der Einheit und der Zusammenfassung von Einheiten oder der Anzahl noch den Begriff des Elementes einführt, indem man von vornherein die Möglichkeit offen lässt, dass die Einheit aus beliebig angeordneten, selbst aber nicht weiter zerlegbaren Elementen, die auch „arithmetische Punkte" genannt werden, bestehe. Der logische Unterschied von den vorhin hervorgehobenen Umwandlungen des ursprünglichen Zahlbegriffs vermittelst der Anwendungen des Permanenz- und des Constanzprincips besteht hier darin, dass jener ursprüngliche Zahlbegriff selbst schon dem generellen Begriff der Mannigfaltigkeit subsumirt wird, aus welchem successiv seine logisch möglichen Formen durch Determination entwickelt werden*). Unter diesen Formen müssen dann aber nothwendig auch die verschiedenen Zahlbegriffe anzutreffen sein. Jener allgemeine Begriff enthält so zwei Bestandtheile, deren Variirung verschiedene Entwicklungen ermöglicht: 1) den Begriff des letzten absolut unzerlegbaren, weil jeder Grösse entbehrenden Elementes, und 2) den Begriff der Einheit oder des einzelnen irgend einen Inhalt zusammenfassenden, aber von der objectiven Beschaffenheit dieses Inhalts abstrahirenden Denkactes. Der Variirung des ersten dieser Begriffe entsprechen die Unterschiede der ganzen und gebrochenen, der rationalen und irrationalen Zahlen; aus den Veränderungen des zweiten entspringen die Unterschiede der positiven, negativen, imaginären und complexen Zahlen. Beide Entwicklungen haben eine völlig abweichende Bedeutung. Durch die erstere ändert sich die innere Constitution, durch die letztere die äussere Form des Zahlbegriffs; jene bezieht sich auf die Art des Zählens, diese auf die Richtung desselben. Es wird daher zweckmässig sein, beide Zahlformen auch durch verschiedene Namen zu unterscheiden: wir wollen die ersten als Zahlarten, die zweiten als Zahlsysteme bezeichnen. Da jene Begriffsvariationen unabhängig von einander geschehen können, so sind übrigens in jedem der Zahlsysteme die verschiedenen Zahlarten möglich**).

---

*) Ueber den Begriff der Mannigfaltigkeit im allgemeinen vgl. mein System der Philosophie, S. 240, 247 ff.

**) Eine unter den Zahlentheoretikern verbreitete Richtung, der besonders L. Kronecker Ausdruck gegeben hat, ist freilich geneigt, alle diese im Folgenden näher zu besprechenden Entwicklungen des Zahlbegriffs als Umgestaltungen desselben zu betrachten, die, aus der Anwendung auf Gegenstände der An-

Die einfachste Zahlart sind die ganzen Zahlen, weil sich bei ihnen die Begriffe der Einheit und des Elementes decken. Ihre nächste anschauliche Verwirklichung finden sie in der zeitlichen Aufeinanderfolge der Denkacte, indem die Einheit dem einzelnen Denkact unter Abstraction von jedem Inhalt entspricht. (Siehe oben S. 128.) Diese psychologische Grundlage des Zahlbegriffs darf aber nicht dazu verführen, dass man mit Kant und W. R. Hamilton auch logisch die Zahl aus der Zeit ableitet*). Können wir schon psychologisch unter Umständen mehrere Denkinhalte gleichzeitig auffassen, so ist es logisch überhaupt nicht nöthig, über die Zeitfolge der Einheiten irgend etwas auszumachen. Das einzige was vorausgesetzt werden muss ist, dass die Einheiten überhaupt zusammengefasst werden. Logisch ist demnach die Zahl ein Begriff sui generis, der ebenso wenig auf die Zeit wie auf den Raum zurückgeführt werden kann. Wäre er dies nicht, so würde auch kaum denkbar sein, wie es möglich ist, den Zahlbegriff logisch unabhängig von diesen Anschauungen nach seinen verschiedenen Gestaltungen zu entwickeln. (Vgl. Bd. I, S. 521 f.)

Bei den gebrochenen Zahlen entsprechen die Begriffselemente der Einheit und des Elementes einander nicht mehr, sondern es werden bestimmte Einheiten in Elemente von je nach Bedürfniss wechselnder Menge zerlegt gedacht, indem der Zähler des Bruchs die Anzahl der Elemente enthält, die zusammengefasst werden

---

schauung entsprungen, dem rein logischen Begriff der Zahl fremd seien (vgl. Kronecker, Ueber den Zahlbegriff, Crelles Journal f. reine u. angewandte Mathem., Bd. 101, S. 337 ff., und Philosophische Aufsätze Ed. Zeller zu seinem 50jährigen Doctor-Jubiläum gewidmet, S. 265). Aber man verkennt hierbei, dass schon bei dem ursprünglichen Begriff der Anzahl nicht anders als bei allen jenen Fortbildungen desselben die empirische Entstehung und der abstract logische Inhalt zu scheiden sind. Beachtet man dies, so ist das Verhältniss des Begriffs zu seiner Anschauungsgrundlage bei den irrationalen und imaginären Zahlen schliesslich kein wesentlich anderes als bei den einfachen ganzen Zahlen. Wenn Kronecker glaubt, dass es dereinst gelingen werde, den gesammten Inhalt der andern mathematischen Disciplinen zu „arithmetisiren", d. h. „einzig und allein auf den im engsten Sinne genommenen Zahlbegriff zu gründen, also die Modificationen und Erweiterungen dieses Begriffs wieder abzustreifen", so dürfte eben die dem ursprünglichen Zahlbegriff immanente logische Fortentwicklung zu den andern Zahlarten und Zahlsystemen der Weg sein, auf welchem dieses „Arithmetisiren" aller Grössenbegriffe bereits erfolgt ist. Vgl. hierzu und zum Folgenden auch die Untersuchung von Walter Brix, Der mathematische Zahlbegriff und seine Entwicklungsformen, Phil. Stud. V, S. 633 ff., VI, S. 104, u. S. 261 ff.

*) W. R. Hamilton, Lectures on Quaternions, Dublin 1853. Preface.

sollen, während der Nenner die Menge der Elemente angibt, die in der Einheit enthalten sind. Da diese Menge wiederum durch eine ganze Zahl angegeben werden kann, so bilden die Elemente neue Einheiten, die der Bedingung entsprechen, dass durch sie die ursprünglichen theilbar sind, und die gebrochene Zahl drückt daher nicht bloss eine durch Zahlen messbare Grösse, sondern zugleich das Verhältniss aus, in welchem jene beiderlei Einheiten zu einander stehen. So sagt z. B. der Bruch $^6/_5$, es solle eine Zahl gedacht werden, die durch die Zusammenfügung von 6 Einheiten entstehe, deren jede durch 5malige Theilung einer ursprünglichen Einheit erzeugt werde. Da das Verhältniss dieser Einheiten beliebig wechseln kann, so repräsentiren die gebrochenen Zahlen eine beliebig veränderliche, im allgemeinen aber ungleich dichte Anordnung der Elemente einer Mannigfaltigkeit.

Aus dieser Eigenschaft entspringt nun eine logische Forderung, die erfüllt gedacht die dritte und letzte Zahlart entstehen lässt. Diese Forderung besteht in der Voraussetzung, die Elemente der Mannigfaltigkeit seien ein für alle Mal so angeordnet, dass mittelst derselben jede beliebige Theilung möglich sei. In Folge dessen tritt zu dem für die ganzen Zahlen gültigen Theilungsgesetz, das an und für sich auch für diese neue Zahlart gültig bleibt, ein zweites Theilungsgesetz hinzu, welches in der Umkehrung des ersteren besteht. Nach dem ursprünglichen Theilungsgesetze werden durch jede beliebige Zahl $a$, die man aus der Reihe der ganzen Zahlen herausgreift, die sämmtlichen Zahlen in zwei Classen zerfällt, von denen die eine nur Zahlen $< a$, die andere nur Zahlen $> a$ enthält, während $a$ selbst entweder der einen oder der anderen Classe zugerechnet werden kann. Führt man nun die Forderung beliebiger Theilbarkeit ein, so bedeutet dies, dass auch das umgekehrte Princip gültig sei, d. h. dass, wenn man irgend eine Theilung der vorausgesetzten Mannigfaltigkeit vornimmt, dadurch jedesmal eine bestimmte Zahl $a$ entstehe, welche die Reihe der Zahlen in zwei Classen von den vorhin geschilderten Eigenschaften zerfällt. Die Zahlen, die dieser Forderung Genüge leisten, sind die irrationalen Zahlen, und die Mannigfaltigkeiten, die denselben entsprechen, besitzen die Eigenschaft, dass sie ins Unendliche theilbar und dass in jedem noch so kleinen Theil die Elemente gleich dicht geordnet sind*). Mittelst

*) Vgl. hierzu Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872, und G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, Leipzig 1883 (Mathem. Annalen, Bd. 15—21).

der irrationalen Zahlen kann jede in der Anschauung gegebene stetige Grösse und jedes Verhältniss solcher Grössen gemessen werden. Deshalb ist aber doch logisch betrachtet die obige Definition keineswegs, wie Dedekind und Cantor annehmen, zugleich die Definition einer stetigen Grösse. Vielmehr ist sie nur die Definition derjenigen Zahlart, die in Folge der vorausgesetzten Theilung der ursprünglichen Einheiten in unendlich viele überall gleich dicht geordnete Elemente eine vollkommen erschöpfende arithmetische Messung der stetigen Grösse zulässt. Denn der Begriff der Zahlenmannigfaltigkeit selbst enthält immer nur die Begriffe der Einheit und des Elementes, und wie man auch das Verhältniss dieser zu einander willkürlich fixiren mag: jede solche Feststellung kann sich nur auf die Anordnung und die Dichtigkeit der Elemente beziehen, sie kann niemals die begriffliche Trennung der letzteren aufheben. Wird, um dies dennoch zu erreichen, die obige arithmetische Definition durch die Forderung ergänzt, dass die Elemente stetig in einander übergehen sollen, oder dass sie eindeutig und wechselweise den Punkten einer in der Anschauung gegebenen stetigen Mannigfaltigkeit, z. B. einer geraden Linie, zugeordnet werden können, so sind solche Bestimmungen immer nur aus der Anschauung hinzugefügt, durch irgend eine Determination des ursprünglichen Zahlbegriffs aber können sie niemals gewonnen werden. Gebunden in unseren arithmetischen Messungen an die ursprüngliche Gestaltung des Zahlbegriffs, vermögen wir übrigens selbst die irrationalen Zahlen nicht durch besondere Zahlformen auszudrücken, sondern es bleibt nur die Aufstellung von Näherungswerthen mittelst gebrochener Zahlen möglich, die aber wegen der unbegrenzten Fortsetzung der Theilungen, welche die letzteren gestatten, bis zu jeder beliebigen Grenze den wirklichen Werthen genähert werden können.

Wie auf diese Weise aus der Variation der Bedingungen für die Elemente der Zahlenmannigfaltigkeit die Zahlarten, so entspringen nun aus der Einführung verschiedener Voraussetzungen für die Einheiten der Zahlen die Zahlsysteme. Bezeichnen wir die ursprüngliche Einheit durch $e$, so hat der Werth $a$, den wir irgend einer Zahl beilegen, die Bedeutung, dass $e$ $a$-mal gedacht werden solle. Diese einfache Position einer Verbindung von Einheiten nennen wir eine positive Zahl, und die unbegrenzte Mannigfaltigkeit solcher Zahlen ist das System der positiven Zahlen. Hiervon können nun die Zahlen anderer Systeme in doppelter Weise logisch abweichen. Sie können erstens aus verschieden-

artigen Einheiten gebildet sein, so dass irgend eine Zahl durch das Product $a . e'$ dargestellt werden muss, worin $e'$ die abweichende Einheit bedeutet. Derartige Zahlsysteme stimmen mit den gewöhnlichen darin überein, dass sie einfache sind: zu jeder Zahl $a$ des gewöhnlichen existirt eine gleich grosse Zahl eines solchen neuen Zahlsystems, die von jener nur durch die Qualität der Einheit verschieden ist. Zweitens können neue Zahlsysteme entstehen, indem Gruppen verschiedener Einheiten zu neuen Zahlen zusammentreten. Gruppen, die aus den nämlichen Einheiten bestehen, wie $a . e$ und $b . e$, können stets durch Addition zu einfachen Zahlen $(a + b)\, e$ vereinigt werden. Gruppen aus verschiedenartigen Einheiten, wie $a . e$ und $b . e'$, sind aber nicht addirbar, weil die Einheiten $e$ und $e'$ nicht vereinigt werden können. Eine so gebildete Zahl wird also nur in der Form eines durch Addition verbundenen Aggregates $a . e + b . e'$ darstellbar sein. Ein System, das aus solchen Zahlen aufgebaut ist, heisst ein complexes Zahlsystem, und es wird speciell, wenn jede Zahl zweierlei Einheiten enthält, ein zweifach ausgedehntes genannt, wenn drei verschiedenartige Einheiten vorkommen, ein dreifach ausgedehntes u. s. w. Es erhellt hieraus, dass die Menge denkbarer Zahlsysteme, und zwar sowohl der einfachen wie der complexen, unbegrenzt ist.

Vergegenwärtigen wir uns nun die Anwendungen der so entstandenen Zahlsysteme auf die Objecte der Anschauung, so liegt offenbar der wesentlichste Unterschied der ursprünglichen positiven Zahlen von den aus ihnen abgeleiteten darin, dass sich jene ausschliesslich auf die zählbaren Objecte selber beziehen, während durch diese zugleich die wechselseitigen Beziehungen der Objecte bestimmt werden. Erst unter dem Einfluss dieser neuen Begriffe erhalten dann auch die positiven Zahlen neben ihrem unmittelbaren noch einen relativen Werth, wobei sie jedoch stets die festen Beziehungspunkte bilden, auf welche die anderen zurückgeführt werden müssen, sobald es sich um eine wirkliche numerische Messung der Objecte und ihrer Relationen handelt. Dies geschieht, indem man die Einheiten der übrigen Zahlsysteme durch positive Einheiten ersetzt und diese mit Operationssymbolen versieht, welche die Entstehungsweise der andersartigen Einheiten aus positiven angeben. Auf diese Weise tritt an Stelle der zweiten Einheit $e_1$ das Zeichen der Subtraction, an Stelle der dritten $i$ das aus der geometrischen Porportion $+ 1 : i = i : - 1$ entnommene Zeichen $\sqrt{-1}$, und die vierte Einheit $i_1$ endlich nimmt das der Verbindung der

Subtraction und Radicirung entsprechende Zeichen $-\sqrt{-1}$ an. Behält man für die positiven Einheiten verschiedener Art die unterscheidenden Zeichen $e$ und $i$ bei, so zerfallen alle Einheiten in zweierlei Gegensätze: $+e$ und $-e$, $+i$ und $-i$, die sich, da $i$ die mittlere geometrische Porportionale zwischen $+e$ und $-e$ ist, durch zwei in einer Ebene zu einander senkrechte Gerade darstellen lassen, die sich im Nullpunkte schneiden. (Fig. 4 f. S.) Die logische Bedeutung der negativen, der imaginären und der aus den letzteren zunächst abgeleiteten gemeinen complexen Zahlen besteht hiernach darin, dass dieselben neben den rein metrischen Verhältnissen der Grössen auch ihre verschiedenen Richtungsverhältnisse bestimmen, wobei aber wiederum die Begriffe der Richtung und Ausdehnung in einem allgemeineren logischen Sinne zu verstehen sind, in welchem sie die räumlichen Beziehungen als einen Specialfall unter sich begreifen.

Die Beschränkung des gemeinen complexen Zahlsystems auf eine zweifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit legt jedoch die Frage nahe, ob sich nicht mit Hülfe weiterer Einheiten noch andere Zahlsysteme bilden lassen. Mindestens für den Raum scheint die geometrische Anschauung eine ähnliche numerische Lagebestimmung zu verlangen, wie sie die gewöhnlichen complexen Zahlen für die Ebene gestatten. Nichts desto weniger erweist sich diese Forderung als undurchführbar. Vielmehr führt der Versuch, irgend eine weitere Form imaginärer Einheiten zu verwenden, immer wieder auf die gewöhnlichen imaginären und complexen Zahlen zurück. Der logische Grund dieser Beschränkung liegt in dem arithmetischen Ursprung der verschiedenen Einheitsformen. Wie die Gerade mit ihren zwei Richtungen der ersten Stufe der einfachen arithmetischen Operationen, der Addition und Subtraction, so entspricht die durch zwei Gerade bestimmte Ebene den Operationen zweiter Stufe, der Multiplication und Division. Weitere Formen imaginärer Einheiten würden also nur dann möglich sein, wenn entweder noch andere arithmetische Fundamentaloperationen existirten, oder wenn mindestens die gegebenen in verschiedener Weise ausführbar wären, wenn also z. B. mehrere einander coordinirte Formen der Multiplication und Division von verschiedener Bedeutung aufgestellt werden könnten. Von dem ersten dieser Fälle kann vermöge der Natur des Zahlbegriffs nicht die Rede sein. Dagegen ist der zweite an und für sich denkbar, da bei jeder Operation je zwei Zahlen in zwei verschiedenen Formen mit einander verbunden werden können, additiv in den Formen $a+b$ und $b+a$, multiplicativ in den Formen $a \,.\, b$ und $b \,.\, a$. Nimmt man nun an,

diese Formen seien einander nicht äquivalent, so würde jede Operation in ebenso viele Unterarten zerfallen, als Permutationen zwischen den Gliedern einer Summe oder den Factoren eines Productes möglich sind. Vorausgesetzt also, die Multiplication wäre eine vieldeutige Operation, so würde man, da die Anzahl der Factoren, die man zu einem Producte vereinigen kann, unbegrenzt ist, beliebig viele Arten imaginärer Einheiten und mittelst ihrer eine unbegrenzte Anzahl complexer Zahlsysteme höherer Ordnung erhalten können.

Einen realen Werth können diese formalen Bedingungen natürlich nur dann gewinnen, wenn die wirkliche Anschauung zur Anwendung entsprechender Zahlbegriffe Veranlassung bieten sollte. Hier ist nun leicht ersichtlich, dass sofort ein von den Verhältnissen des gemeinen complexen Zahlensystems verschiedener Fall eintritt, so-

Fig. 4.

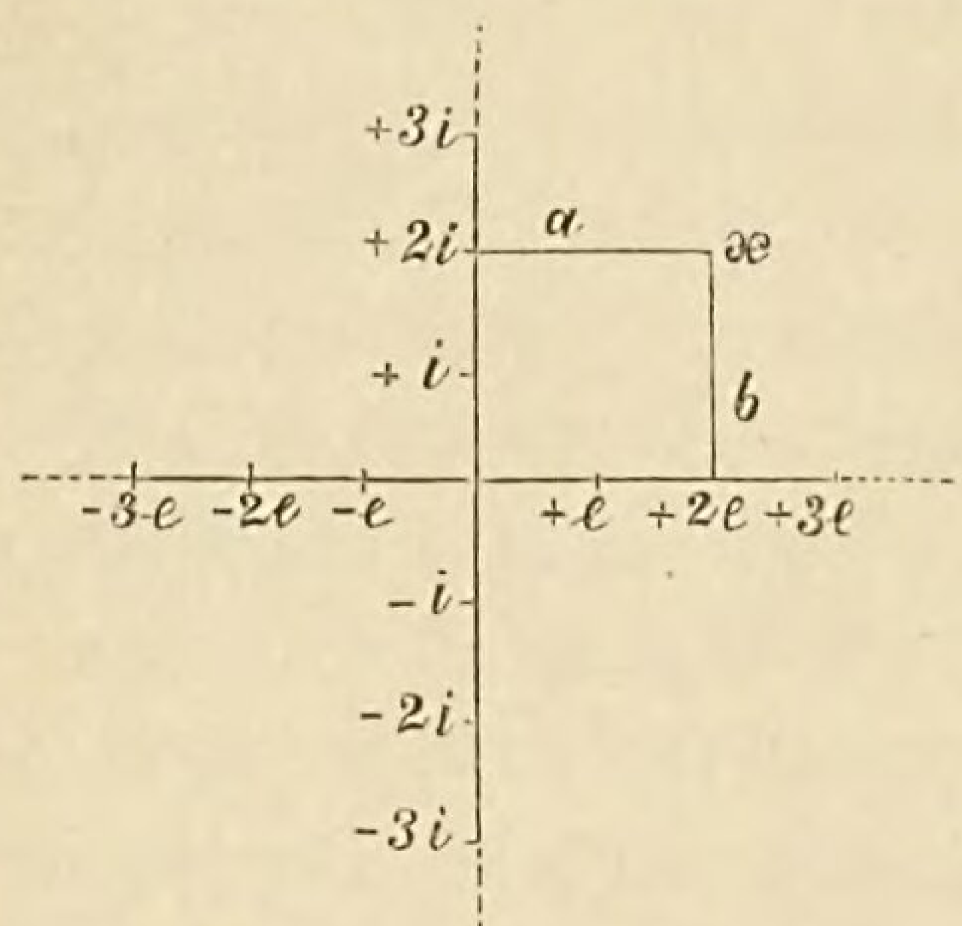
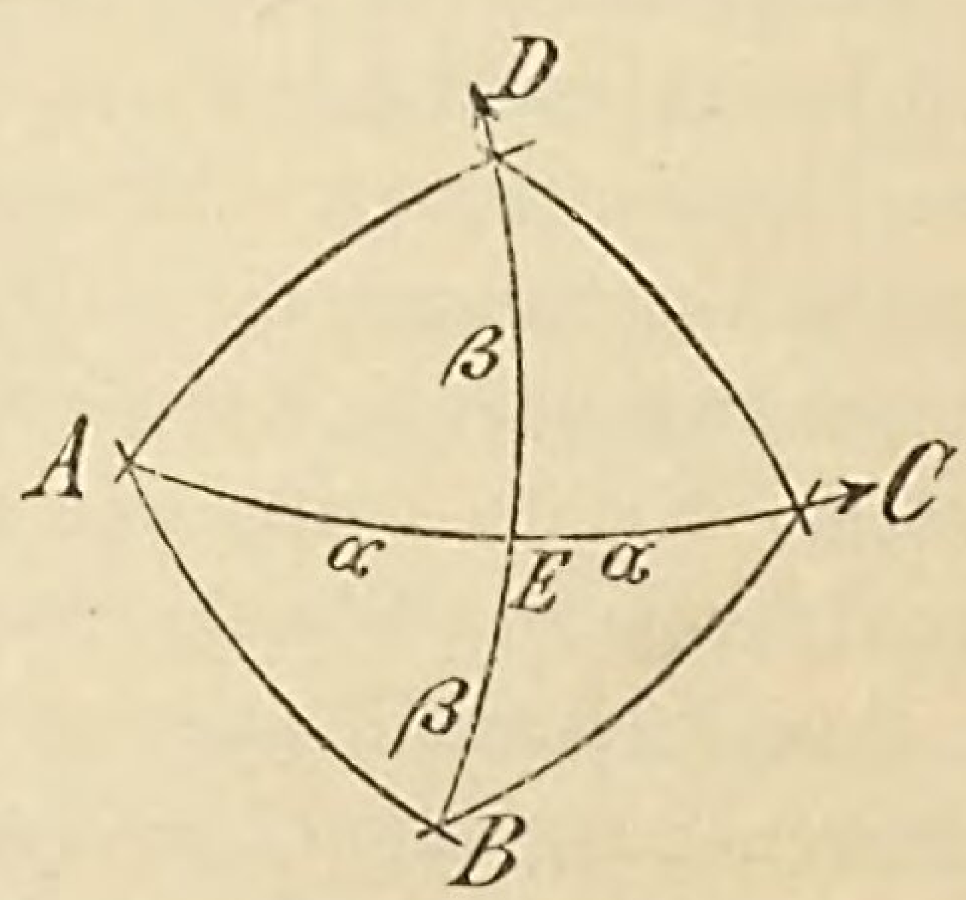



Fig. 5.




bald man als Constructionsfeld nicht die Ebene, sondern die Kugeloberfläche wählt. Irgend ein in der Ebene gelegener Punkt $x$ (Fig. 4), dessen Lage durch die complexe Zahl $a + b\,i$ bestimmt ist, lässt sich als Endpunkt der Diagonale eines Parallelogramms denken, dessen Seiten $a$ und $b\,i$ sind. Ob man nun auf den Wegen $2\,e + b$ oder $2\,i + a$ nach $x$ gelangt, ist für das Resultat gleichgültig. Man schliesst daher, dass $a + b\,i = b\,i + a$ ist, oder dass für das ebene complexe Zahlensystem das commutative Princip gilt. Nun lässt sich auch auf der Kugeloberfläche (Fig. 5) eine Figur construiren, welche dem ebenen Parallelogramm in der Weise entspricht, dass eine Seite $BC$ mit einer anderen $AD$ zur Deckung kommt, wenn sie um den Betrag einer dritten Seite in der Richtung $BA$ um den Mittelpunkt der Kugel gedreht wird. Doch ist klar, dass jene zwei parallelen Seiten eines sphärischen Parallelogramms zwar in ihrer Grösse, nicht

aber in ihrer Richtung einander gleich sind: in diesem Fall wird daher auch einer Bewegung auf der Seite $BC$ eine gleich grosse auf der Seite $AD$ nicht äquivalent sein. Denken wir uns die diagonalen Hauptkreise gezogen, so entstehen vier sphärische Dreiecke, die an dem Pol $E$ an einander stossen. Die dem Winkel bei $E$ gegenüberliegende Seite eines jeden solchen Dreiecks lässt sich durch die Drehung eines von dem Mittelpunkte der Kugel ausgehenden Vectors um die beiden Winkel $\alpha = EC$ und $\beta = BE$ hervorgebracht denken. Das Resultat einer combinirten Drehung wird aber in diesem Fall gleich dem Product der beiden einfachen Drehungen sein. Setzen wir also den Vector $= 1$ und bezeichnen wir $\alpha$ und $\beta$ als Versoren, so ist der Bogen $BC$ gleich dem Producte $\alpha . \beta$ seiner beiden Versoren. Es zeigt sich aber zugleich, dass dieses Product wegen der vorhin hervorgehobenen Eigenschaften des sphärischen Parallelogramms verschiedene Bedeutungen annimmt, je nachdem es in der Form $\alpha . \beta$ oder $\beta . \alpha$ geschrieben, und je nachdem es mit positivem oder negativem Vorzeichen eingeführt wird. Setzen wir die Drehungen in der Richtung der Pfeile als die positiven voraus, so wird das Product $+ \alpha . \beta$ gleichzeitige Drehungen $EC$ und $BE$ bedeuten, welche aber, da $\beta$ Multiplicandus ist, so verlaufen, dass ein von $E$ um den Winkel $\beta$ entfernter Punkt in die Distanz $\alpha$ geführt wird, dass also $+ \alpha . \beta = BC$ wird. Ebenso kann $+ \beta . \alpha$ nur derjenige Bogen sein, bei dessen Anfangspunkt $\alpha$ gegeben und $\beta = 0$ ist, also $AD$. Aus ähnlichen Erwägungen ergibt sich $AB = - \alpha . \beta$ und $DC = - \beta . \alpha$. Diese Betrachtungen lassen sich auf beliebige im Raum ausgedehnte Gebilde übertragen, indem man jede Strecke erstens in Bezug auf ihre Grösse durch eine reelle Zahl misst und dazu zweitens in besonderen imaginären Einheiten den Bogen bestimmt, welcher die Richtung der Strecke angibt. Bezeichnet man die vom Mittelpunkt der Kugel aus nach drei zu einander senkrechten Richtungen gelegten Einheitsradien mit $i$, $j$ und $k$, so lassen sich diese als zu einander und zu den reellen Einheiten laterale Grössen betrachten, für welche die Bestimmungen gelten

$$i . i = -1, j . j = -1, k . k = -1, i . j = k,$$

und die Zahl $\alpha$, welche eine geometrische Strecke nach Grösse und Richtung im Raum vollständig bestimmt, nimmt nun die Form an

$$\alpha = a + bi + cj + dk.$$

Diese viergliedrigen, eine reelle und drei imaginäre Einheiten enthaltenden Zahlen sind von ihrem Erfinder W. R. Hamilton als

Quaternionen bezeichnet worden. Durch sie wird jene Uebertragung des Zahlbegriffs auf den Raum, die das gewöhnliche System der complexen Zahlen vermöge der Eindeutigkeit der arithmetischen Fundamentaloperationen nicht gestattet, auf einem Umweg erreicht. Der Umweg besteht aber darin, dass man Grösse und Richtung als getrennte Eigenschaften einer Strecke behandelt und dann die letztere auf die Drehungen einer imaginären Kugel zurückgeführt denkt. Diese Trennung bringt es dann mit sich, dass die Quaternionen nicht zwei, sondern drei imaginäre Einheiten enthalten. Auch hier lassen sich wieder die Begriffe der Richtung und Strecke selbstverständlich in einem allgemeineren, von den räumlichen Beziehungen abstrahirenden Sinne auffassen. Immerhin ist es klar, dass die so entstandenen Zahlen nicht wie die gewöhnlichen complexen Zahlen aus einer mit innerer Nothwendigkeit sich ergebenden Erweiterung des Zahlbegriffs hervorgegangen sind, sondern dass sie auf der Anwendung eines Kunstgriffs beruhen, der trotz seiner praktischen Fruchtbarkeit doch den Charakter des Zufälligen besitzt.

Einen logisch strengeren, aber freilich für die anschaulichen Anwendungen minder fruchtbaren Charakter gewinnt die Entwicklung neuer complexer Zahlbegriffe dann, wenn man von der Entstehung derselben aus arithmetischen Operationen überhaupt abstrahirt und lediglich die formalen Eigenschaften der gewöhnlichen complexen Zahlen zum Ausgangspunkte nimmt. Eine solche Entwicklung kann dann wieder nach zwei Richtungen ins Unbegrenzte fortgeführt werden, indem man 1) die Anzahl der Glieder einer complexen Zahl zunehmen und 2) an die Stelle des linearen Ausdrucks, aus welchem die gewöhnlichen complexen Zahlen bestehen, höhere Potenzen treten lässt. Logisch betrachtet bewegen sich demnach diese zahlentheoretischen Speculationen lediglich in fortwährenden Anwendungen des Permanenzprincips*).

Die verschiedenen Entwicklungen des Zahlbegriffs haben nunmehr gezeigt, dass, obgleich dieselben ursprünglich in der Anschauung und in den von der Anschauung ausgehenden Begriffsoperationen ihre Quellen haben, dennoch überall diesen anschaulichen Motiven ein rein logisches Erzeugungsprincip substituirt werden kann, welches den Vortheil der grösseren Allgemeinheit voraus hat. Mit seiner Annahme werden dann die anderen Bildungsformen der

---

*) Eine allgemeine Uebersicht der höheren complexen Zahlen gibt H. Hankel, Theorie der complexen Zahlensysteme, S. 99 ff.

Zahlen zu blossen Folgerungen und Anwendungen herabgedrückt, so dass gelegentlich von ihnen auch ganz abgesehen werden kann. Dieses Verhältniss ist aber nicht etwa so aufzufassen, als sei das logische Erzeugungsprincip nur aus zufälligen Ursachen das spätere, oder als sei eine intellectuelle Entwicklung denkbar, bei der sich die Sache umgekehrt verhalten könnte. Diese Annahme wird durch die Existenz eines Hülfsbegriffs widerlegt, den die logische Erzeugung der neuen Zahlbegriffe nicht entbehren kann, während die übrigen Entwicklungen seiner nicht bedürfen: des Hülfsbegriffs der Mannigfaltigkeit oder, was der Bedeutung nach damit identisch ist, des arithmetischen Elementes. Der Mannigfaltigkeitsbegriff ist zunächst durch eine Abstraction aus den in der Anschauung gegebenen Mannigfaltigkeiten, wie Zeit, Raum, beliebig vertheilte Zeitmomente oder im Raum gegebene Punktmengen u. dergl., hervorgegangen, und er hat dann seine arithmetische Allgemeinheit durch die Anwendung des Permanenzprincips auf diese Abstraction erlangt, indem nach demselben nicht nur die Verhältnisse der Dichtigkeit der Elemente, sondern auch die Richtungen ihrer Anordnung als dem Begriff nach völlig unbeschränkte und darum die realen Bedingungen der Anschauung beliebig übersteigende gefordert werden. Darauf wird ausserdem vermittelst des Constanzprincips eine exacte Analogie der für verschiedene Mannigfaltigkeiten solcher Art gültigen Gesetze vorausgesetzt. Aber die Grundlage dieser begrifflichen Constructionen bleibt doch die Anschauung, sie bleibt es auch in dem Sinne, dass hier wie überall fortwährend Anschauungen als Stellvertreter der Begriffe functioniren müssen. Der Unterschied von den beiden anderen Erzeugungsformen besteht also im wesentlichen nur darin, dass bei diesen im einen Falle das Permanenz-, im anderen das Constanzprincip erst nachträglich auf den ursprünglichen Begriff der positiven ganzen Zahlen angewandt wird, während dort beide Principien gleichzeitig vor der Ableitung des Zahlbegriffs zur Anwendung kommen, um zunächst den Begriff einer Mannigfaltigkeit überhaupt herzustellen, der hinreichend allgemein ist, dass die verschiedensten denkbaren Zahlarten und Zahlsysteme aus ihm abgeleitet werden können. Es ist ersichtlich, dass dieses Verfahren, das die beiden ersten eigentlich als Theile in sich begreift, das logisch vollendetere ist. Dies bewährt sich auch darin, dass die Zahlbegriffe, zu denen man auf solchem Wege gelangt, an sich unerschöpflich sind, und dass begriffliche Beziehungen zwischen ihnen hervortreten, die bei den specielleren Erzeugungen unbeachtet bleiben.

### c. Die Zahlgrenzen.

Die positiven ganzen Zahlen bilden eine unerschöpfliche Reihe, vor deren Anfang die Nichtexistenz jeder Zahl, die Null, und an deren Ende die jede denkbare Zahl übersteigende Grösse, das Unendliche, liegt. Diese Eigenschaft geht auf alle anderen Zahlarten und Zahlsysteme über. Die Symbole 0 und $\infty$ bezeichnen daher nicht selbst Zahlen, sondern die beiden Grenzen des Zahlbegriffs. Aber dies schliesst nicht aus, dass sie gewisse Eigenschaften mit den Zahlen gemein haben und daher unter bestimmten Bedingungen den Charakter wirklicher Zahlen annehmen können.

Zunächst nämlich entstehen 0 und $\infty$, ebenso wie die eigentlichen Zahlen mit Ausnahme der Einheit, durch die arithmetischen Fundamentaloperationen. So wird $\infty$ durch die unbegrenzte Addition von Einheiten oder anderen positiven Zahlen, durch die unbegrenzte Multiplication von ganzen Zahlen mit Ausnahme der Einheit, oder auch durch die Division einer Zahl mit 0 erzeugt. Die Null dagegen entsteht entweder durch die Subtraction zweier gleicher Zahlen von einander oder durch die Division einer Zahl mit $\infty$. Es zeigt sich nun schon bei der Vergleichung dieser Entstehungsweisen, dass jedes der Symbole 0 und $\infty$ verschiedene Bedeutungen besitzen kann. Am deutlichsten ist dies bei der Null, wie aus den einfachen Beziehungen hervorgeht:

$$\frac{a}{\infty} : \frac{b}{\infty} = \frac{0}{0} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{a-a}{b-b} = \frac{0}{0} = 0.$$

Jeder der beiden Grenzbegriffe kann hiernach in einer doppelten Bedeutung auftreten. In der ersten bedeutet er die Grenze einer veränderlichen Grösse, einer unaufhörlich abnehmenden oder unaufhörlich zunehmenden; in der zweiten dagegen bedeutet er was alle Grenzen messbarer Grössen überschreitet, weil es entweder keine Grösse besitzt, oder weil seine Grösse durch die Reihe aller Zahlen, selbst wenn diese vollendbar wäre, nicht erschöpft würde. Im ersten Fall handelt es sich um eine aus der Betrachtung der Grössenänderungen, im zweiten um eine aus der Auffassung des absoluten Werthes der Grössen hervorgegangene Gestaltung des Null- und des Unendlichkeitsbegriffs. Die beiden Formen der Null sind durch die oben

erwähnten Entstehungsweisen hinreichend gekennzeichnet. Während die nach der Subtraction $a - a$ zurückbleibende Null das absolute Fehlen jeder Grösse bedeutet, weist die Division $\frac{a}{\infty}$ darauf hin, dass $a$ durch Theilung abnehme, wobei aber, da die theilende Grösse unendlich ist, auch diese Abnahme eine unbegrenzte sein muss. Die beiden Formen des oberen Grenzbegriffs verhalten sich in Bezug auf ihre Enstehungsweisen insofern abweichend, als ein absolutes Unendlich überhaupt nicht auf dem Wege irgend welcher arithmetischer Operationen entstehen kann. Denn durch die der Subtraction entsprechende Operation der Addition entsteht hier ebenfalls nur der veränderliche Grenzbegriff, da diese Addition, um eine unendliche Summe zu geben, nicht wie die Subtraction $a - a$ eine begrenzte Zahl von Gliedern verlangt, sondern in der Form einer unvollendbaren Reihe $a + a + a + a \ldots$ fortschreitet. Der absolute Unendlichkeitsbegriff kann daher überhaupt nur in der Form eines von den erzeugenden Operationen völlig abstrahirenden Postulates gedacht werden. Zu einem derartigen Postulat kann aber die mathematische Untersuchung endlicher Grössen Veranlassung finden. Denn es kann für die Fixirung gewisser Begriffe, die eine absolute Bedeutung besitzen und der Messung durch bestimmte endliche Grössen unzugänglich sind, jener constante oder absolute Unendlichkeitsbegriff erfordert werden. Wenn man z. B. den Durchschnittspunkt zweier Parallellinien in unendliche Entfernung verlegt, so ist hier ein absolutes Unendlich gemeint. Als Durchschnittspunkt bezeichnet er einen einzigen fest bestimmten Ort im Raume, und da der Parallelismus der Linien als gegeben, nicht als erst entstehend vorausgesetzt ist, so kann man ihn nicht etwa als einen Punkt denken, dem die Linien ohne Ende zustreben. Vielmehr denken wir uns die Linien über alle messbaren Grenzen hinaus immer noch als parallel. So lange wir bloss die erste Form des Unendlichkeitsbegriffes, die Grenze einer veränderlichen Grösse, im Auge haben, ist daher der Begriff eines Durchschneidungspunktes überhaupt unvollziehbar. Aehnliche Voraussetzungen wie hier für die specielle Form der Raumgrössen können nun aber auch für die allgemeinsten Grössen, die Zahlen, gemacht werden. Vermöge der unbeschränkten Freiheit mathematischer Begriffsbildung auf Grundlage des Permanenzprincips ist die Annahme möglich, es gebe einen absoluten Werth $\omega = \infty$, welcher nicht bloss die Grenze bezeichne, dem die Reihe der Zahlen ohne Ende zustrebt, sondern in welchem diese

Grenze wirklich erreicht sei. In der That hat man diese Fiction in die arithmetische Speculation eingeführt und daran Untersuchungen über die Eigenschaften der jenseits der Grenzen einer solchen absoluten Grösse $\omega = \infty$ gelegenen Zahlen geknüpft. Dabei stellt sich z. B. heraus, dass diese „transfiniten" Zahlen schon bei der Addition dem Commutationsgesetz nicht mehr folgen, indem $1 + \omega = \omega$, dagegen $\omega + 1 > \omega$, also auch $1 + \omega$ nicht gleich $\omega + 1$ ist*). Wenn wir eine in ihrer absoluten Totalität gedachte unendliche Gerade, die nach ihrer einen Richtung begrenzt ist, vor ihrem Anfang im Unendlichen um eine Strecke verlängert denken, so wird dadurch ihre Grösse verändert; wenn wir aber die nämliche Strecke an ihrer Grenze im Endlichen ansetzen, so bleibt die Gerade eine unendliche Grösse von gleichem Werthe wie vorher.

Vielfach sind in der Mathematik und Philosophie die beiden hier besprochenen Formen der Grenzbegriffe mit einander vermengt worden, und viele der so genannten „Paradoxien des Unendlichen" haben hierin ihre Quelle**). Auch wenn man zu einem gewissen Bewusstsein der Unterschiede gelangte, verband sich dies nicht selten mit einer ungleichen Werthschätzung beider Begriffe, indem einer derselben als der allein berechtigte, der andere als ein unrechtmässiger galt. Besonders bezog sich dieser Streit auf den oberen Grenzbegriff, während der untere, bei dem die arithmetische Anwendung beiden Formen ihr Recht verschaffte, davon kaum berührt wurde. So wurde in der Mathematik das Symbol $\infty$ fast nur in der Bedeutung einer ohne Ende wachsenden Grösse gebraucht, während Hegel diese Unendlichkeit der Mathematiker als die schlechte bezeichnete und ihr die absolute Unendlichkeit als die wahre gegenüberstellte***). Die dieser Unterscheidung zu Grunde liegende Anschauung, dass es sich bei der ersten Form in Wahrheit um endliche, wenn auch unmessbar grosse oder kleine Grössen handle, kann aber nicht als zutreffend anerkannt werden. Obgleich sie in der Entwicklung der Grundbegriffe des Infinitesimalcalcüls ihre Quelle hat, so ist sie doch in diesem offenbar nicht selbständig entstanden, sondern aus den älteren Näherungs- und Exhaustionsmethoden in ihn übergegangen. Das Unendliche ist die Negation der endlichen Grösse und als solche für die beiden Gestaltungen des

*) G. Cantor, Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre, S. 39.

**) Vgl. B. Bolzano, Paradoxien des Unendlichen, Leipzig 1851.

***) Hegel, Logik, I, S. 263 f. In ähnlichem Sinne unterscheidet G. Cantor (a. a. O. S. 13) das uneigentlich und das eigentlich Unendliche.

oberen Grenzbegriffs gültig, Der einzige Unterschied liegt in dem zu Grunde liegenden Erzeugungsprincip. Dieses besteht im ersten Falle darin, dass man das Unendliche aus der endlichen Grösse durch unbegrenztes Wachsthum hervorgehen lässt, während man es im zweiten Falle als einen fertigen Begriff denkt, der von Anfang an das Merkmal der Begrenztheit, welches den endlichen Grössen zukommt, nicht besitzt. Eher werden daher die Bezeichnungen des Endlosen und des Ueberendlichen oder die zuerst von G. Cantor gebrauchten des Infiniten und des Transfiniten diesen verschiedenen Entstehungsbedingungen der Unendlichkeitsbegriffe einigermassen gerecht.

Noch einen andern Uebelstand hatte aber die Vermengung dieser verschiedenartigen Grenzbegriffe. In solchen Fällen, wo an sich nur einer der beiden Unendlichkeitsbegriffe Berechtigung besass, erzeugte sie durch die Herbeiziehung des andern einen falschen Zwiespalt der Anschauungen. Wir werden auf diesen Punkt bei den Grundbegriffen der Infinitesimalmethode zurückkommen. Doch ist hier schon hervorzuheben, dass der absolute oder transfinite Unendlichkeitsbegriff in der Mathematik nur für zahlentheoretische oder geometrische Zwecke eingeführt werden kann, dass dagegen überall da, wo es sich um die mathematische Darstellung physikalischer, also durch die Erfahrung bestimmter Begriffe handelt, nur der infinite Unendlichkeitsbegriff möglich ist.

Nicht zu übersehen ist schliesslich, dass beide Unendlichkeitsbegriffe den Charakter logischer Postulate besitzen. Wir können fordern, es solle die Reihe der positiven ganzen Zahlen in einer einzigen Zahl $\omega = \infty$ zusammengefasst werden, und es solle eine Grösse ohne Ende wachsen oder zunehmen, ja wir können wegen der begrifflichen Freiheit des mathematischen Denkens alle diese Postulate als erfüllt annehmen und dann die daraus entspringenden Folgerungen entwickeln. Aber da unser Denken nicht die Macht hat, eine objective Realität zu erschaffen, sondern höchstens im Stande ist, dieselbe in subjectiven und darum den Erkenntnissbedingungen des Bewusstseins unterworfenen Begriffen nachzuerzeugen, so sind auch jene Voraussetzungen an sich nichts als logische Postulate, und eine reale Bedeutung gewinnen sie erst von dem Punkte an, wo sie sich in der begrifflichen Nachbildung der Wirklichkeit als brauchbar bewähren*).

---

*) Vgl. hierzu die Bemerkungen über die transcendenten Raumspeculationen, Bd. I, S. 493 ff., und meine Abhandlung über Kants kosmologische Antinomien und das Problem der Unendlichkeit, Philos. Stud. II, S. 495 ff.

## 2. Die algebraischen Operationen.

In den Zahlarten und Zahlsystemen ist ein Zahlbegriff zur Entwicklung gelangt, der von dem allgemeinen Begriff der Grösse nicht mehr verschieden ist. Durch die Symbole des an den ursprünglichen Zahlbegriff sich anlehnenden Ziffernsystems kann daher dieser Begriff nicht in zureichender Weise ausgedrückt werden, sondern derselbe fordert Begriffszeichen von allgemeinerer Bedeutung. Solche Zeichen sind die algebraischen Buchstabensymbole, denen jene Bedeutung willkürlich beigelegt worden ist. Neben ihnen bedarf die allgemeine Arithmetik der Operationssymbole, welche die mit den Zahlen vorgenommenen arithmetischen Operationen andeuten. Ausser diesen beiden kann endlich noch eine dritte Art von Symbolen vorkommen, welche Zahlen und die mit denselben vorzunehmenden Operationen gleichzeitig bezeichnen. Diese dritte Art ist an sich nicht unerlässlich wie die beiden ersten, aber sie ist als abkürzendes Hülfsmittel des Denkens von grosser Wichtigkeit und findet deshalb eine mit der Verwicklung der Aufgaben zunehmende Anwendung.

Die arithmetischen Methoden, welche diese dreierlei Symbole benützen, können nun entweder die directe Lösung allgemeiner Zahlenprobleme bezwecken, indem sie sich dazu der vier arithmetischen Grundoperationen und ihrer Wiederholungen bedienen; oder sie können der Untersuchung der Eigenschaften gewisser allgemeiner Grössenbeziehungen gewidmet sein, um erst in zweiter Linie von diesen Eigenschaften für die Lösung der Probleme Gebrauch zu machen. Auf diese Weise scheiden sich von einander die Gebiete der eigentlichen Algebra und der algebraischen Analysis. Nicht die Gegenstände, mit denen sich beide beschäftigen, sondern die Standpunkte, die sie bei der Untersuchung dieser Gegenstände einnehmen, sind daher verschieden. Die Algebra betrachtet einen algebraischen Ausdruck bloss mit Rücksicht auf den Werth der einzelnen Grössen und auf die Beschaffenheit der Operationen, die mit ihnen vorzunehmen sind; die algebraische Analysis sieht ihn als die Darstellung einer Beziehung zwischen Grössen an, und sie untersucht seine Abhängigkeit von den Veränderungen, die einzelne in ihn eingehende Grössen erfahren können. Der analytische Standpunkt ist daher der allgemeinere, welcher den rein algebraischen als

speciellen Fall in sich schliesst. Nichts desto weniger wird es angemessen sein, hier den nämlichen Weg zu wählen, den die Ausbildung der mathematischen Begriffe selber genommen hat. Wir beschäftigen uns darum zuerst mit den algebraischen Methoden im engeren Sinne und wenden uns erst in einem folgenden Capitel der logischen Untersuchung des Begriffs der Function zu, von welchem die Analysis beherrscht ist, dessen Entwicklung aber, wie wir sogleich sehen werden, schon in den gewöhnlichen algebraischen Operationen beginnt.

### a. Die Entstehung und Bedeutung algebraischer Gleichungen.

Die algebraischen Methoden in dem oben angegebenen engeren Sinne sind auf zwei logische Grundlagen zurückzuführen. Die eine besteht in der Allgemeinheit der Zahlgesetze. Diese, die den Gebrauch der Symbole möglich macht, beherrscht auch fortan deren Anwendungen. Die andere besteht in der unmittelbaren, aber vermöge der abgeschlossenen Natur eines jeden Problems stets begrenzten Anwendung der vier arithmetischen Operationen und ihrer Wiederholungen. Die Art, wie diese Operationen zur Anwendung kommen und auf einander folgen müssen, richtet sich nach der Natur des Problems. Die nächste Aufgabe der algebraischen Methodik besteht daher darin, dass sie die Beschaffenheit des vorgelegten Problems in einem allgemeinen symbolischen Ausdruck darstellt. Dies geschieht mittelst der Aufstellung einer Gleichung, welche die Beziehungen zwischen den in das Problem eingehenden Grössen angibt. Die Probleme, die auf solche Weise eine algebraische Formulirung zulassen, können sich auf alle möglichen messbaren Objecte beziehen, auf abstracte Zahlen, auf Zeit- und Raumgrössen, auf Waaren und Güterwerthe u. s. w. Stets aber besteht die Bedingung zur Aufstellung einer algebraischen Gleichung darin, dass sich die quantitativen Relationen zwischen den Grössen auf einfache arithmetische Operationen in begrenzter Anzahl zurückführen lassen. Das bei der Lösung der gestellten Aufgaben einzuschlagende Verfahren muss dann aus Operationen bestehen, welche denjenigen entgegengesetzt sind, aus denen die quantitativen Relationen der in der Gleichung verbundenen Grössen hervorgingen: eine Addition wird also in einer Subtraction, eine Multiplication in einer Division, eine Potenzerhebung in einer Radicirung ihre Auflösung finden.

Die Gleichung als mathematisches Identitätsurtheil ist die einzige Form, in welcher der Ausdruck fest bestimmter Relationen zwischen Grössen überhaupt möglich ist. Die Aufstellung einer Gleichung enthält aber nur dann zugleich eine bestimmt lösbare Aufgabe, wenn eine der durch sie in Relation gesetzten Grössen unbekannt ist und aus der in der Gleichung vorgelegten Relation zu den andern bekannten Grössen gefunden werden soll. Sind alle Grössen der Gleichung bekannt, so enthält diese keine Aufgabe; ist mehr als eine Grösse unbekannt, so genügt sie nicht, um die Aufgabe zu lösen, sondern es müssen ebenso viele weitere Relationen zwischen den nämlichen Grössen in der Form von Gleichungen gegeben sein, als weitere Unbekannte vorhanden sind. Da die Algebra aus praktischen Rechenaufgaben hervorging, bei denen es sich stets um die wirkliche Ermittlung unbekannter Werthe aus unveränderlich gegebenen bekannten handelte, so ist die Untersuchung der Gleichungen ursprünglich nur von diesem Gesichtspunkte bestimmt gewesen. Jede Gleichung galt als der Ausdruck einer Beziehung zwischen Grössen, die sämmtlich fest bestimmte Werthe besitzen, von denen aber einzelne zufällig unbekannt sind. Traten mehrere Gleichungen mit mehreren Unbekannten auf, so wurden solche nur als Hülfsmittel angesehen, um aus ihnen die Normalform mit der einen Unbekannten herzustellen. Zuerst kam dieser rein arithmetische Standpunkt aus Anlass der mehrfachen Werthe, welche die Unbekannte bei höheren Gleichungen annahm, ins Schwanken. Denn eine anschauliche Deutung dieser mehrfachen Werthe lieferte die Geometrie, indem sie zeigte, dass, sobald man die in der Gleichung aufgestellte Relation als eine solche zwischen Raumgrössen ansieht, die mehrfachen Werthe der Unbekannten mehreren Raumgrössen entsprechen, die sämmtlich der gegebenen Gleichung Genüge leisten. Hier musste sich nun zugleich die Wahrnehmung aufdrängen, dass eine derartige Bestimmung der Unbekannten immer nur einen oder (bei den höheren Gleichungen) einige Einzelwerthe herausgreift, welche eine Grösse dann annimmt, wenn anderen mit ihr in gesetzmässiger Beziehung stehenden Grössen fest bestimmte Werthe gegeben werden, dass aber, sobald man sich diese oder einzelne unter ihnen stetig verändert denkt, nun auch jene Unbekannte stetige Veränderungen erfährt. So führte hauptsächlich die geometrische Betrachtung zu einer neuen Auffassung der algebraischen Gleichungen. Die Unbekannte wurde untergeordnet dem allgemeinen Begriff der Veränderlichen. Die algebraische Gleichung musste nun allgemein als ein Ausdruck betrachtet werden,

welcher die auf eine begrenzte Zahl arithmetischer Elementaroperationen zurückführbaren Beziehungen zwischen veränderlichen und constanten Grössen angibt. Werden alle Grössen als constant angenommen mit Ausnahme von zweien, so drückt die Gleichung eine einfache Reihe stetig veränderlicher Beziehungen aus, indem jedem Werth der einen Veränderlichen $x$ im allgemeinen auch ein anderer Werth der zweiten Veränderlichen $y$ entspricht. Ihre einfachste anschauliche Verwirklichung findet darum eine solche Gleichung in einer ebenen Curve, deren Grad dem Grad der Gleichung entspricht. Wird in dieser Gleichung der einen der Veränderlichen ein constanter Werth beigelegt, so ist es klar, dass auch die zweite Veränderliche einen constanten Werth oder, wenn das Resultat mehrdeutig wird, eine begrenzte Anzahl constanter Werthe annehmen muss. Insofern diese constanten Werthe nicht direct gegeben sind, sondern erst aus ihrem Verhältniss zu den übrigen Grössen gefunden werden sollen, verwandelt sich jetzt die Veränderliche in die Unbekannte, und die Auflösung der Gleichungen wird zu einem Specialfall der Behandlung algebraischer Functionen. Will man sich die Entstehung dieses Specialfalls vergegenwärtigen, so muss man also von dem allgemeinen Gesetz einer stetig veränderlichen Function ausgehen. Eine Function zweiten Grades z. B. von der Form $y^2 = x\,(a - x)$ wird in eine lösbare Gleichung zweiten Grades übergehen, wenn etwa $y = b$ und demnach $x^2 - ax + b^2 = 0$ wird. Man erhält dann für $x$ die zwei Werthe $\frac{1}{2}\,a \pm \sqrt{\frac{1}{4}\,a^2 - b^2}$. Fragen wir aber nach der realen Bedeutung dieses Uebergangs, so wird, wenn wir eine geometrische Bedeutung zu Grunde legen, $y^2 = x\,(a - x)$ zur Scheitelgleichung eines Kreises vom Durchmesser $a$. Setzt man hierin die auf dem Durchmesser senkrechte Ordinate $= b$, so ist damit auch der zugehörige Abscissenwerth $x$ fixirt. Aber da zu der Ordinate $b$ eine gleich grosse auf der entgegengesetzten Seite des Kreismittelpunktes existirt, so erhält $x$ zwei Werthe, je nachdem man die Wurzelgrösse positiv oder negativ nimmt.

Es ist das grosse Verdienst Descartes', dass er diese Entwicklung der Gleichung aus der algebraischen Function der Wissenschaft zum Bewusstsein brachte*). Er hat damit zugleich auf den

---

*) Descartes, Géométrie, Oeuvr. T. I. Zwar waren schon die arabischen Mathematiker durch die von ihnen geübten Methoden der Lösung von Gleichungen zu ähnlichen Gesichtspunkten gelangt. Ihre Leistungen wurden aber erst in

rationellen Weg zur methodischen Behandlung der Gleichungen hingewiesen, welcher darin besteht, dass man sich überall erst von ihren Entstehungsbedingungen Rechenschaft gibt, hieraus die Kenntniss ihrer allgemeinen Eigenschaften schöpft und auf diese endlich die Methoden zu ihrer Lösung gründet.

Die einfachsten Bedingungen zur Aufstellung einer Gleichung sind dann gegeben, wenn die realen Grössen, welche durch sie in Beziehung gesetzt werden, gleichförmig mit einander veränderlich sind. In diesem Fall entspricht der Constanz in dem Fortschritt der Zahlenreihe eine ihr völlig gleichende Constanz in den Verhältnissen der Objecte, auf welche die Zahlen Anwendung finden. Ist nun bei einem solch gleichmässigen Fortschritt irgend eine der mit einander veränderlichen Grössen für einen bestimmten Werth der andern nicht direct gegeben, so bestimmt sie sich aus dem bekannten Verhältniss, in dem sie zu den andern Grössen steht. Der Ausdruck dieses Verhältnisses ist eine lineare Gleichung, die durch einfache Isolirung der Unbekannten gelöst wird. Bei diesem Verfahren kommen nur die vier arithmetischen Operationen selbst zur Anwendung, nicht ihre Wiederholungen. Zu den einfachsten Aufgaben solcher Art gehören diejenigen der Regeldetri, bei denen zu drei gegebenen Gliedern einer Proportion das vierte gesucht wird.

Hiervon unterscheiden sich nun die verwickelteren Fälle dadurch, dass die Grössen, deren Relation die Gleichung ausdrückt, nicht gleichförmig zu- und abnehmen, dass also die eine nicht ein constanter Bruchtheil oder ein constantes Vielfaches der andern ist. Demgemäss reicht nun auch die einfache Division oder Multiplication nicht mehr aus, um eine Unbekannte in bekannten Grössen auszudrücken. Der nächst einfache Fall ist hier dann gegeben, wenn die Geschwindigkeit in der Zunahme des Wachsthums einer Grösse proportional der absoluten Zunahme einer andern ist, oder wenn, während die eine Grösse gleichförmig zunimmt, die andere mit einer Geschwindigkeit wächst, die fortwährend ihrem eigenen absoluten Werthe proportional bleibt. Der erste dieser Fälle ist in der Natur in vielfältiger Weise verwirklicht, in der Zunahme der Geschwindigkeit fallender Körper, in der Zunahme der Licht- und Schallstärke mit der Annäherung an die Licht- und Schallquelle, u. s. w. Die

jüngster Zeit der Vergessenheit entrissen und haben daher in dieser Beziehung keinen merklichen Einfluss auf die Entwicklung der neueren Algebra ausgeübt. Vgl. L. Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra, Leipzig 1878, S. 921.

reine quadratische Gleichung ist der Ausdruck dieser Beziehung. Dem zweiten Fall entspricht das Wachsthum eines Capitals, dessen Zinsen wieder capitalisirt werden. Reine Gleichungen höherer Grade entstehen demnach überhaupt, wenn zwei Zahlen in solcher Beziehung stehen, dass sie sich stetig mit einander verändern, dass aber die Veränderung der einen aus derjenigen der andern nicht durch eine einfache Multiplication oder Division, sondern nur durch mehrfache Wiederholung dieser Operationen in Bezug auf die nämliche Grösse gefunden werden kann.

Diese bis dahin noch einfachen Aufgaben werden nun von steigender Verwicklung, wenn nicht bloss das Wachsthum der durch die Gleichung in Beziehung gesetzten Grössen ein verschiedenes ist, sondern wenn ausserdem theils die Anzahl der Grössen, die zu einander in Relation gebracht sind, theils die Anzahl der zwischen ihnen existirenden Relationen zunimmt. Geben wir z. B. der Gleichung mit zwei Variabeln $x$ und $y$ eine geometrische Deutung, so bezeichnen $x$ und $y$ stets zwei gerade Linien, deren relatives Wachsthum den Weg einer Curve bestimmt, die in ihrem ganzen Verlauf der Ausdruck der gesetzmässigen Beziehungen zwischen den Veränderungen jener beiden Geraden ist. Denken wir uns zwischen den nämlichen Geraden von denselben Anfangspunkten aus gleichzeitig zweierlei beziehungsweise Veränderungen nach einem verschiedenen Gesetze oder mindestens mit verschiedener Geschwindigkeit erfolgen, so werden diese zwei neben einander hergehenden Relationen in zwei Curven ihren Ausdruck finden, die sich in irgend einem Lageverhältniss zu einander befinden. Legt man sich nun die Frage vor, ob es einen oder mehrere Punkte auf der Geraden $x$ gibt, die für beide Gesetze beziehungsweiser Veränderungen coincidiren, wo also zwei Werthen $y$ von gleicher Grösse auch zwei gleiche Werthe von $x$ entsprechen, so verwandeln sich die beiden Gleichungen zwischen $x$ und $y$, welche die Gesetze des Verlaufs der zwei Curven ausdrücken, in zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Die Werthe von $x$, die man aus ihnen gewinnt, bezeichnen, auf der Geraden $x$ abgemessen, die den beiden Curven gemeinsamen Punkte. Auf diese Weise entsprechen zwei Kegelschnitten im allgemeinen vier Schnittpunkte. Die zwei quadratischen Gleichungen der Kegelschnitte liefern daher als allgemeinen Ausdruck für die Werthe von $x$ eine Gleichung vierten Grades. Die Lage der beiden Kegelschnitte kann nun aber auch eine solche sein, dass sie in weniger als vier Punkten, oder dass sie gar nicht sich schneiden. In diesem Fall ergeben sich als

die entsprechenden Werthe von $x$ imaginäre oder complexe Zahlen. Gemäss der geometrischen Bedeutung der letzteren ist dieses Resultat so zu erklären, dass sich der betreffende Punkt nicht auf der Geraden $x$ selbst finden lässt, sondern dass diese in lateraler Richtung bewegt werden müsste, um ihn zu erreichen. Denken wir uns, die eine der sich schneidenden Linien sei stets eine Gerade, so ist an und für sich klar, dass die andere eine Curve von immer zusammengesetzterer Beschaffenheit werden muss, wenn die Zahl der Schnittpunkte wachsen soll. Wie die Gerade eine andere Gerade in einem und einen Kegelschnitt in zwei Punkten schneidet, so eine Curve dritten, vierten, fünften Grades in je drei, vier, fünf Punkten, von denen wieder je nach der Lage der Geraden einzelne hinwegfallen können, wodurch sich imaginäre Werthe der Unbekannten $x$ ergeben.

Die geometrischen Objecte bilden die anschaulichste Darstellung der Beziehungen, die zur Aufstellung von Gleichungen führen, und die Verhältnisse anderer Grössen können immer leicht in sie übertragen werden. Versuchen wir es aber, die in dieser Darstellung gegebenen Bedingungen in abstracter Allgemeinheit auszudrücken, so bestehen dieselben offenbar darin, dass aus einer Summe in wechselseitigen Relationen stehender Grössen zunächst die einzelnen Grössen isolirt werden, was in der Bezeichnung jeder einzelnen durch ein besonderes Buchstabensymbol ausgedrückt ist. Jede solche isolirte Grösse enthält in sich kein bestimmtes Gesetz des Wachsthums, ihre Messung folgt daher dem durch die natürliche Zahlenfolge gegebenen Gesetz gleichmässiger Aenderung. Sobald nun aber die Grössen in den zwischen ihnen stattfindenden Relationen beobachtet werden, so zeigt es sich, dass die einen, $a$, $b$, $c$ . . ., constant bleiben, während sich die andern, $x$, $y$, $z$ . . ., verändern. Zum Ausdruck des Gesetzes dieser Veränderung ist zunächst die Gleichung bestimmt. Die ihr entsprechende Curve hat, wie die Gleichung selbst, die Bedeutung einer Relation zwischen Grössen, die für sich selbst betrachtet sämmtlich gerade Linien von theils unveränderlichem, theils veränderlichem Werthe sind. Auch die Aufgabe, zu welcher die Gleichung überführt, indem sie an Stelle der mehreren Veränderlichen die eine Unbekannte zurücklässt, besteht daher geometrisch in der Ermittlung der Länge einer Geraden oder allgemein des isolirten Werthes der Grösse $x$. Darum führt die Auflösung einer Gleichung immer darauf hinaus, dass eine Gleichung $n$ten Grades für $x$ in $n$ Gleichungen ersten Grades übergeführt werde, die den $n$ Wurzeln für $x$ entsprechen.

### b. Die allgemeinen Eigenschaften der algebraischen Gleichungen.

Der nahe Zusammenhang der Eigenschaften der Gleichungen mit ihren Entstehungsbedingungen ergibt sich unmittelbar aus den obigen Erörterungen. Während aber die Betrachtung der Entstehungsbedingungen von den verwickelten Erscheinungen, welche Anlässe zu bestimmten Problemen enthalten, ausgehen musste, ist der Weg für die Untersuchung der Eigenschaften der Gleichungen nothwendig der umgekehrte. Daraus ergibt sich zugleich die Möglichkeit, dass hier die Untersuchung sofort in abstracter Form begonnen werden kann, wogegen einer verwickelten Gleichung immer erst durch die anschaulich gegebenen Verhältnisse, auf die sie bezogen wird, ein Verständniss abzugewinnen ist. Hierin besteht nun das zweite grosse Verdienst Descartes' um die algebraische Analysis. Während er auf der einen Seite das geometrische Bild als das angemessenste Object für die Erkenntniss der Bedeutung einer Gleichung und der sie constituirenden Grössen kennen lehrte, zeigte er auf der andern, dass bei der Untersuchung des Aufbaues der Gleichung aus diesen Elementen das algebraische Symbol jeder anschaulichen Versinnlichung überlegen ist, weil es für die Ausführung der arithmetischen Elementaroperationen das einfachste Werkzeug darbietet.

Das Ergebniss der Auflösung einer Gleichung besteht in der Feststellung linearer Gleichungen von der Form $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma \ldots$, deren Anzahl dem Grad der ursprünglichen Gleichung entspricht, und in denen $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ successiv die einzelnen Wurzelwerthe bedeuten, die $x$ annehmen kann. Diese Werthe $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ sind in der ursprünglichen Gleichung nicht isolirt enthalten, sondern unter einander und mit $x$ zu einer einzigen zusammengesetzten Relation verbunden, welche die Werthe $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma \ldots$, die sämmtlich gleich Null sind, als Factoren enthält, und worin übrigens $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ sowohl negative als complexe Werthe bedeuten könnten. Rückwärts wird daher auch aus den $n$ linearen Endgleichungen die ursprüngliche wieder hergestellt werden, wenn man die genannten Factoren mit einander multiplicirt, wenn man also

$$(x - \alpha) . (x - \beta) . (x - \gamma) \ldots = 0$$

setzt. Es ergibt dann die wirkliche Ausführung dieser Multiplication einen Ausdruck

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots + T = 0,$$

in welchem die Coëfficienten $A$, $B$, $C \ldots T$ bestimmte Verbindungen der Wurzeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma \ldots$ sind, nämlich

$$A = \alpha + \beta + \gamma \ldots$$
$$B = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta \ldots$$
$$C = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta \ldots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$T = \alpha\beta\gamma\delta \ldots.$$

Diese von Descartes gelehrte Reconstruction der Gleichung aus den linearen Endgleichungen ihrer Wurzeln liefert nun das vollständige Material zur Ableitung der Eigenschaften der Gleichungen. Die oben entwickelte Form, die sämmtliche Potenzen von $x$ in absteigender Reihenfolge enthält, wird dabei als die Normalform angesehen, deren verschiedene Gestaltungen von der positiven, negativen oder imaginären Form der einzelnen Wurzeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma \ldots$ abhängen. Alle Methoden für die Untersuchung der Gleichungen gründen sich einzig und allein auf die Herstellung jener Normalform $n$ten Grades aus den vorläufig hypothetisch als gegeben vorausgesetzten $n$ Wurzeln als ihren Elementen. Die specielle Verfolgung dieser Methoden gehört nicht zu unserer Aufgabe; nur der Ausgangspunkt und allgemeine Charakter derselben bedarf einer kurzen Erörterung. Ausgangspunkt ist der Satz, dass die Gleichung $n$ten Grades aus ihren $n$ Wurzelgleichungen reconstruirt werden kann. Dieser Satz gründet sich auf das arithmetische Gesetz, dass die Veränderung, die an einem beliebigen Zahlenausdruck durch eine begrenzte Anzahl elementarer Operationen vorgenommen wurde, wieder aufgehoben werden kann, wenn man die umgekehrten Operationen in der geeigneten Reihenfolge anwendet. Dieses Gesetz selbst ist aber nur eine Verallgemeinerung des Princips der inversen Operationen. Nachdem unter der Anleitung dieses Princips die Normalform der Gleichung $n$ten Grades durch die wirkliche Ausführung der Multiplication, also durch Induction gefunden ist, trägt nun die weitere Untersuchung der allgemeinen Eigenschaften der so entstandenen Gleichungen durchgehends einen gemischten Charakter an sich, insofern die Sätze, zu denen man gelangt, sowohl eine inductive wie eine deductive Begründung zulassen. In der Regel sind sie zuerst durch Induction im Anschlusse an die erste Induction, welche die Normalgleichung ergibt, gefunden worden; man hat dann aber ausserdem gesucht, sie direct aus den Eigenschaften dieser abzuleiten. So ergibt sich

z. B. der Cartesianische Satz, dass eine vollständige Gleichung lauter positive Wurzeln hat, wenn die Coëfficienten von $x$ abwechselnde Vorzeichen besitzen, und dass sie lauter negative Wurzeln hat, wenn die Coëfficienten ohne Ausnahme positiv sind, inductiv aus der Multiplication der linearen Factoren; derselbe ergibt sich aber ausserdem auch als eine nothwendige Folge der Eigenschaften der Normalfunction $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} \ldots$ Denn sobald von je zwei auf einander folgenden Gliedern vom ersten an die höhere Potenz positiv und die niedrigere negativ ist, so muss $x$ unter allen Umständen einen positiven Werth haben, wenn die Summe gleich Null werden soll; umgekehrt dagegen, wenn alle Vorzeichen positiv sind, so kann die Summe nur dann gleich Null sein, wenn $x$ stets negativ ist. Aehnlich folgt der Satz, dass die Normalgleichung durch jede der Differenzen $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma \ldots$ ohne Rest theilbar ist, inductiv aus der Bildung des Productes $(x - \alpha) . (x - \beta) . (x - \gamma) \ldots$, wo jede der Differenzen unmittelbar als ein Factor jenes Polynoms erscheint. Der nämliche Satz lässt sich aber aus den allgemeinen Eigenschaften des Polynoms und dem Begriff der Wurzel erweisen, nach welchem für jeden Werth $\alpha$, $\beta$, $\gamma \ldots$ die nämliche Gleichung wie für $x$ gelten muss, also auch die Differenzengleichung

$$(x^n - \alpha^n) + A(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + B(x^{n-2} - \alpha^{n-2}) \ldots = 0$$

gebildet werden kann, welche durch $x - \alpha$ theilbar ist.

Bei den Transformationen der Gleichungen, namentlich bei der Bildung abgeleiteter Wurzelgleichungen und Coëfficientengleichungen, benützt man sodann die durch die Fundamentalsätze festgestellten Eigenschaften der Normalgleichung, um aus ihnen auf ausschliesslich deductivem Wege weitere Sätze zu gewinnen. Es handelt sich hierbei um fortgesetzte Anwendungen zweier allgemeiner Principien. Nach dem ersten derselben darf jede in eine Gleichung eingehende Grösse eine beliebige Veränderung erfahren, sobald nur mit den zu ihr in Relation gebrachten Grössen entsprechende Veränderungen vorgenommen werden. Nach dem zweiten Princip darf für eine gegebene Relation einer Grösse irgend eine andere der nämlichen Grösse substituirt werden, sobald man nur an Stelle der übrigen ursprünglichen Grössen andere von geeigneter Beschaffenheit einführt. Das erste dieser Principien, welches wir als das Princip der correspondirenden Veränderungen bezeichnen können, beruht unmittelbar auf der Constanz der Zahlgesetze und der Existenz der inversen Operationen, vermöge deren es jederzeit möglich

ist, eine willkürlich eingeführte Veränderung wieder aufzuheben. Das zweite Princip, welches wir das der Variation der Beziehungen nennen können, schöpft seine Berechtigung aus dem Wesen der Gleichung. Da diese aus einer unbegrenzten Anzahl denkbarer Beziehungen einer Grösse $x$ eine einzelne herausgreift, so ist es natürlich immer möglich, der gewählten irgend eine andere jener denkbaren Beziehungen zu substituiren. Bei der Anwendung des ersten Princips bleibt die vorliegende Form der Gleichung unverändert, bei der Anwendung des zweiten wird sie in der Regel verändert, und im allgemeinen geht man bei dieser Veränderung darauf aus, eine Gleichung niedrigeren Grades aus einer solchen höheren Grades herzustellen.

Die zahlreichen Methoden, die zum Zweck der Auflösung der Gleichungen im Laufe der Zeit erfunden worden sind, bestehen nun in der fortgesetzten und meist combinirten Anwendung jener beiden Principien. Nur die Gleichungen ersten Grades erfordern ausser der einfachen Hülfe der vier arithmetischen Operationen kein weiteres Verfahren; streng genommen handelt es sich aber bei ihnen gar nicht um Lösungsmethoden, sondern nur um eine geeignetere Ordnung der Grössen, da sie die Form der linearen Wurzelgleichung bereits besitzen. Anders bei den Gleichungen höherer Grade, wo nunmehr das eigentliche Lösungsverfahren in der schliesslichen Reduction auf Gleichungen ersten Grades besteht. Zahlreiche Methoden substituiren, um dies zu erreichen, zunächst der Unbekannten $x$ eine lineare Function von $x$, z. B. $y = x - z$. Aus der ursprünglichen Gleichung $f(x) = 0$ erhält man auf diese Weise eine neue Gleichung $f(y) = 0$, in welcher alle Grössen Veränderungen erfahren haben, die dem Uebergang von $x$ in $y$ entsprechen. Wenn man die unbestimmte Grösse $z$, die in die Coëfficienten der neu gebildeten Gleichung eingeht, unter Rücksichtnahme auf die sonstigen Factoren dieser Gleichung in geeigneter Weise bestimmt, so genügt das so zur Anwendung gekommene Princip der correspondirenden Veränderungen vollständig zur Lösung. Ist dies aber nicht der Fall, so kann dann ausserdem das Princip der Variation der Beziehungen herbeigezogen werden, indem man z. B. die Gleichung $f(y) = 0$ in zwei Gleichungen $\varphi'(y, z) = 0$ und $\varphi''(y, z) = 0$ zerlegt, in welchen die beiden Grössen $y$ und $z$ als Unbekannte behandelt werden. Sind diese Gleichungen niederen Grades, so können sie die Auffindung zunächst der Wurzeln von $y$ und $z$ und dadurch, vermöge der angenommenen Beziehung dieser Grössen zu $x$, auch der Wurzeln von $x$

vermitteln. Bei der von Descartes erfundenen, für die algebraische Analysis epochemachenden Methode der Lösung biquadratischer Gleichungen wird das Princip der Variation der Beziehungen unmittelbar in der hier angedeuteten Weise angewandt, indem die vorgelegte Gleichung, nachdem sie auf die Form $x^4 + a x^2 + b x + c = 0$ gebracht ist, in zwei quadratische Gleichungen

$$x^2 + a_1 x + b_1 = 0 \text{ und } x^2 - a_2 x + b_2 = 0$$

zerlegt wird. Der ursprünglichen Beziehung zwischen $x$ und den bekannten Grössen $a$, $b$, $c$ sind hier zwei andere Beziehungen zwischen $x$ und andern Grössen $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$, die zunächst ebenfalls unbekannt sind, substituirt. Diese unbestimmten Coëfficienten können nun aber gefunden werden, da die Bedingung besteht, dass die zwei neu aufgestellten Relationen mit der ursprünglichen übereinstimmen müssen. Man sucht daher besondere Gleichungen zu gewinnen, durch welche die Beziehungen der unbestimmten Coëfficienten $a_1$, $b_1$ u. s. w. zu den ursprünglichen $a$, $b$, $c$ festgestellt werden. Dies ist im vorliegenden Fall leicht möglich, da man durch Multiplication der beiden quadratischen Gleichungen mit einander eine biquadratische von der Form der ursprünglichen erhält, die nun mit dieser verglichen unmittelbar die Bedingungsgleichungen liefert, durch welche die neuen Coëfficienten bestimmt werden. Die Methode der unbestimmten Coëfficienten, die Descartes bei dieser Gelegenheit in die Analysis einführte, ist wie in diesem Beispiel so in zahlreichen andern ein nothwendiges Hülfsmittel für die Anwendung des Princips der Variation der Beziehungen. Jene Methode selbst aber ist eine der fruchtbarsten Anwendungen des allgemeinen Princips der analytischen Methode, dass das Gesuchte zum Behuf seiner Auffindung als bereits gegeben vorausgesetzt werde. (Siehe oben Seite 94.)

Drittes Capitel.

# Die geometrischen Methoden.

## 1. Die geometrischen Constructionsmethoden.

### a. Die Entwicklung der geometrischen Constructionsmethoden.

Der abstracte Raumbegriff, welcher den Gegenstand der reinen Geometrie bildet, ist durch eine einförmigere Entwicklung aus der Anschauung hervorgegangen als der Zahlbegriff. In diesem Sinne liegt er der Anschauung näher als der letztere, so dass Kant sogar ihn selbst für eine Anschauung halten konnte. (Vgl. Bd. I, S. 491 f.) Auch die anschaulichen Objectivirungen der einzelnen geometrischen Begriffe sind aus diesem Grunde eindeutiger als die arithmetischen Begriffsformen, und sie fordern dadurch unmittelbarer eine Untersuchung mittelst der Analyse und Synthese einfacher räumlicher Objecte heraus. Auf solche Weise erklärt es sich, dass unter allen mathematischen Methoden die geometrischen am frühesten eine wissenschaftliche Ausbildung erreicht haben. Im Dienste der Induction und der Deduction gleichzeitig verwendbar vollzieht sich in ihnen am deutlichsten der Uebergang aus der inductiven in die deductive Periode der Mathematik. Versuchsweise zog man Hülfslinien, um Sätze zu finden, oder um zu erproben, ob Sätze, die in speciellen Fällen bereits gefunden waren, eine weitere Ausdehnung zuliessen. Ein derartiges Verfahren beginnt einen deductiven Charakter anzunehmen, sobald die ausgeführten Versuche die Kenntniss des nachzuweisenden Satzes bereits voraussetzen, wenn auch diese nur in der Form einer Vermuthung vorhanden sein sollte. Die Construction wird dann eben zu dem Zwecke ausgeführt, den deductiven Beweis für die Richtigkeit der Vermuthung zu liefern. Die Mathematik steht in dieser Beziehung auf dem nämlichen Boden wie die Erfahrungswissenschaften. Wo es sich nicht gerade um den Beweis von Wahrheiten handelt, die durch Induction oder durch eine andere Form der Beweisführung bereits vollkommen sicher stehen, da hat die Deduction überall die Aufgabe, zunächst Hypothesen zu Grunde zu legen, um diesen, wenn die Beweisführung gelingt, Gewissheit zu geben. Hypothesen, auf Grund deren geometrische Constructionen

ausgeführt werden, entstehen aber am häufigsten dadurch, dass die unmittelbare Anschauung der Figuren dieselben an die Hand gibt.

Schon durch die griechischen Geometer wurden die Constructionsmethoden mit reicher Erfindungskraft gehandhabt. Sie bedienten sich ihrer zugleich zum Beweis arithmetischer Sätze, indem sie die Zahlgrössen durch Raumgrössen versinnlichten. Theils die Anschaulichkeit solcher Beweise, theils die unvollkommene Ausbildung der arithmetischen Symbolik machten so die geometrische Construction fast zur allgemeinen mathematischen Methode. Die instrumentellen Hülfsmittel, welche die alte Geometrie bei diesem Verfahren gebrauchte, waren das Lineal und der Cirkel, wobei dieser nicht bloss zur Herstellung des Kreises, sondern namentlich auch zur Abmessung gleicher Strecken auf den mit dem Lineal gezogenen Geraden diente. Lineal und Cirkel ersetzten also den Massstab. Jene Verwendung geometrischer Constructionen im Dienste der Arithmetik scheint aber keineswegs in der Weise entstanden zu sein, dass man von Anfang an für Zahlbegriffe nach räumlichen Versinnlichungen suchte. Vielmehr waren wohl umgekehrt die Sätze ursprünglich geometrische und wurden erst durch Messung und Zählung in arithmetische umgewandelt. Am frühesten scheint die Ausmessung des Quadrates zu diesem Uebergang den Anlass geboten zu haben. Indem man den Flächeninhalt desselben durch Zerlegung in kleine Quadrate bestimmte, ergab sich von selbst die umgekehrte Aufgabe, einem elementaren Quadrate *a* successiv Theile anzufügen, welche es mit Erhaltung seiner Gestalt vergrösserten. So erhielt man aus *a* durch Hinzufügung eines so genannten G n o m o n (*b d c*) das nächstgrössere Quadrat *a b d c*, aus diesem auf ähnliche Weise das noch grössere *a e i f*, u. s. w. Mass man aber das zuletzt erhaltene durch Zählung der successiv hinzugenommenen elementaren Quadrate, so erhielt man die Reihe der so genannten Quadratzahlen $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2$, d. h. man gewann durch die geometrische Betrachtung den arithmetischen Satz, dass die Summe der ungeraden Zahlen von 1 bis zu einer beliebigen Zahl gleich dem Quadrat der Hälfte der nächst höheren geraden Zahl sei. Die nämliche Zerlegung hat wahrscheinlich Veranlassung gegeben, die elementaren Quadrate zu summiren, welche die Hälfte des ganzen Quadrates oder das gleichschenkelige rechtwinkelige Dreieck *a k l* ausmessen: man erhielt so successiv *a*, *b c*, *e d f*, *k g h l* oder die

Fig. 6.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *k* | *n* | *m* | *p* |
| *e* | *g* | *i* | *q* |
| *b* | *d* | *h* | *o* |
| *a* | *c* | *f* | *l* |

natürliche Zahlenreihe $1 + 2 + 3 + 4 \ldots + n = n \frac{(n+1)}{2}$, die daher den Namen der Dreieckszahlen führte, und deren Summirung abermals einen arithmetischen Satz ergab*). Das methodische Interesse dieser arithmetischen Anwendung geometrischer Constructionen besteht vor allem darin, dass uns diese hier noch vollständig als Hülfsmittel der Induction entgegentreten. Dem entspricht der eigenthümliche Charakter dieser Constructionen, bei denen eine Figur aus gleichartigen Elementen aufgebaut und dann die Verknüpfung der Elemente mittelst einer einfachen Addition ausgeführt wird.

Diesem synthetischen Verfahren einfachster Art trat frühe schon die Methode der Zerlegung geometrischer Figuren zum Zweck der Feststellung der wechselseitigen Beziehung ihrer Theile gegenüber. Man sieht sich zu einer solchen Zerlegung gezwungen, sobald die geometrischen Figuren allzu verwickelt sind, so dass sie eine unmittelbare Erkenntniss ihrer Form- und Massverhältnisse in der Anschauung nicht zulassen. Der Zweck der Zerlegung besteht daher zunächst darin, einfachere Theile zu gewinnen, deren Massbeziehungen unmittelbar übersehen werden können. Das älteste Constructionsverfahren begnügt sich mit der Erreichung dieses Zweckes: der Geometer gibt die Anleitung zur Ziehung der Hülfslinien und verweist dann auf die Anschauung. Erst durch die Platonische Philosophie wurde der Mathematik allmählich das Bedürfniss zum Bewusstsein gebracht, sich bei dieser Berufung nicht zu beruhigen, sondern über die Gründe Rechenschaft zu geben, aus denen gewisse Formverhältnisse für uns evident sind**). Nun erst entstand die Forderung, mit Hülfe der Construction alle Sätze auf ein System von Definitionen und Axiomen zurückzuführen, eine Forderung, deren getreuen Reflex die Euklidische Geometrie enthält, welche die Theilung der Figuren mit Vorliebe als Constructionsmethode verwendet. Hiermit hat zugleich diese Methode ihren deductiven Charakter gewonnen, und sie ist analytisch in einem doppelten Sinne, in einem anschaulichen und in einem begrifflichen: in jenem, weil das in der Anschauung Gegebene selbst zerlegt wird, in diesem, weil die Zerlegung auf die logischen Voraussetzungen zurückgeht, aus denen der Beweis zu führen ist.

An die Zerlegung der Figuren schliesst sich aber ein anderes

*) Hankel, Zur Geschichte der Mathematik, S. 104. Cantor, Vorlesungen, I, S. 135 f.

**) Cantor, Vorlesungen, I, S. 188 f.

Verfahren nahe an, zu dem man in solchen Fällen zu greifen pflegt, wo die Zerlegung nicht vollständig genügt, um Formverhältnisse herzustellen, die eine unmittelbare Anschaulichkeit vermitteln. Hier zieht man ergänzende Constructionen zu Hülfe, die, ausserhalb der untersuchten Figuren angebracht, die Theile derselben in neue Relationen bringen, welche die zuvor nicht hinreichend vorhandene Anschaulichkeit vermitteln und dadurch zugleich die Zurückführung auf bestimmte Axiome gestatten. Es stellt also dieses Verfahren eine Zwischenform zwischen analytischer und synthetischer Methode dar: die Zerlegung verbindet sich mit der Erzeugung neuer Raumgebilde, die durch ihre Verbindung mit den gegebenen die Lösung einer Aufgabe gestatten. Hierdurch führt diese Methode unmittelbar über zu einem letzten Verfahren, welches insofern das vollkommenste ist, als es das zu untersuchende Raumgebilde aus bestimmten Entstehungsbedingungen hervorgehen lässt, mit denen die wesentlichsten Eigenschaften desselben theils unmittelbar gegeben sind, theils in einem leicht durchschaubaren Zusammenhange stehen: zur Methode der genetischen Construction. Sie ist im allgemeinen wieder synthetisch, wird aber, im wesentlichen Unterschiede von jenem synthetischen Aufbau einfacher Figuren aus gleichartigen Theilen, mit dem die geometrische Construction anfing, ausschliesslich im deductiven Interesse geübt. Denn eine genetische Construction lässt sich nicht ausführen, ohne dass das leitende Princip, von dem alle Eigenschaften der erzeugten Gebilde abhängen, zuvor gegeben ist. Auf diese Weise hat sich die Entwicklung der geometrischen Constructionsmethoden in einer bestimmten Ordnung vollzogen: mit synthetischen Verfahrungsweisen nehmen dieselben ihren Anfang, und in ebensolchen finden sie wieder ihren Abschluss, der Uebergang aber wird durch Methoden von analytischem und von gemischtem Charakter vermittelt. Anderseits bewegt sich die nämliche Entwicklung von inductiven Anfängen aus durch grossentheils inductiv gefundene aber deductiv verwerthete Methoden zu solchen, die in Auffindung und Anwendung vollständig deductiv geworden sind. Doch ist auch hier das Nacheinander zugleich ein Nebeneinander, da die neu gewonnenen Methoden keineswegs die früher vorhandenen verdrängten. Nur die ältesten synthetischen Constructionen haben, da sie bloss räumliche Versinnlichungen einfacher arithmetischer Operationen sind, der abstracten Ausübung der letzteren Platz gemacht.

### b. Die Theilung der Figuren.

In den einfachsten Fällen, in welchen die Euklidische Geometrie die Theilung der Figuren anwendet, ist diese durch den Inhalt des zu erweisenden Satzes selbst bestimmt, so dass die constructive Erfindungskraft nicht weiter in Anspruch genommen wird. So ergibt sich z. B. der Satz, dass Parallelogramme auf derselben Grundlinie und zwischen denselben Parallellinien einander gleich sind (Euklid I, 35), aus der Construction der Figur selbst ohne Ziehung von Hülfslinien. Für die Anschauung ist der Satz unmittelbar einleuchtend, der Beweis greift auf die Definition des Parallelogramms, den Satz von der Gleichheit der Wechselwinkel und die Congruenz der Dreiecke zurück. Die Erfindung zweckmässiger Hülfslinien wird hier dadurch erspart, dass die Construction der Figur schon eine hinreichende Zahl von Linien und Durchschnittspunkten liefert, um eine geeignete Zerlegung in Theile möglich zu machen (Fig. 7).

Fig. 7.

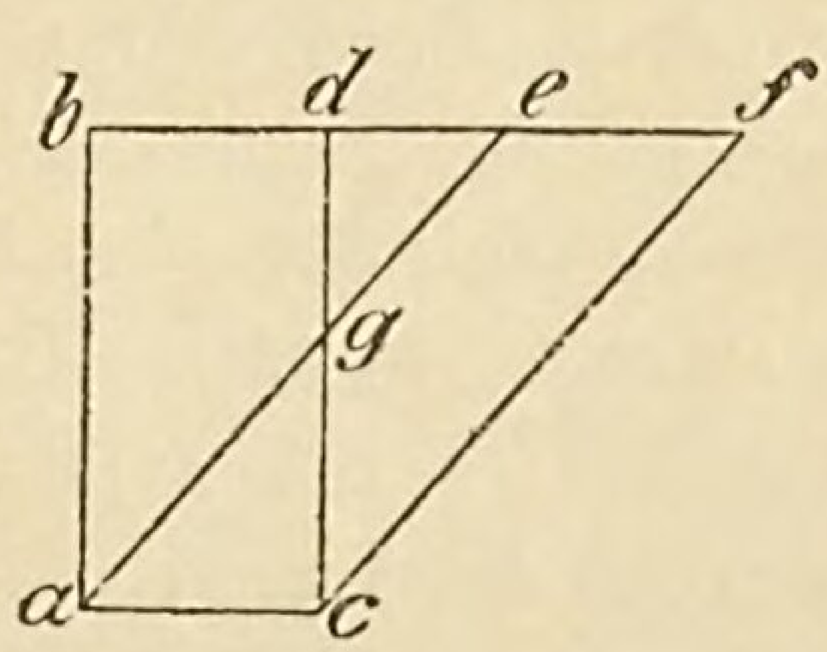
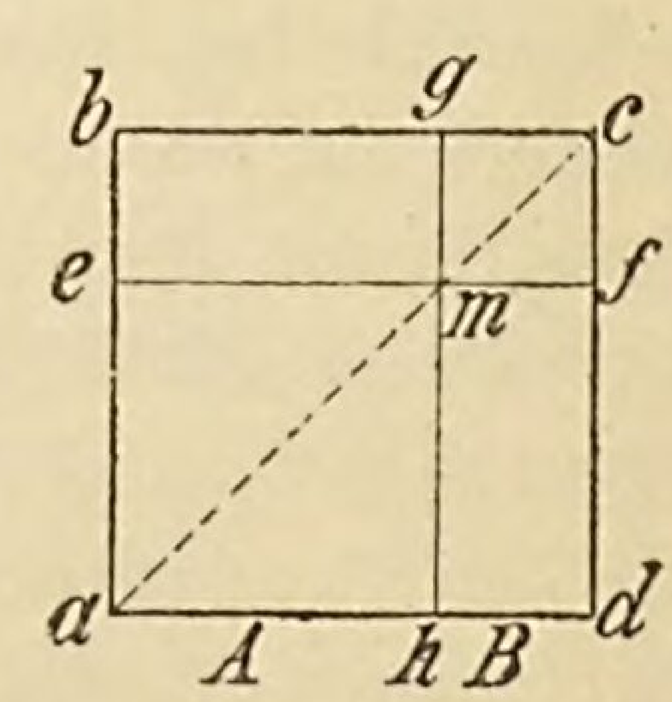


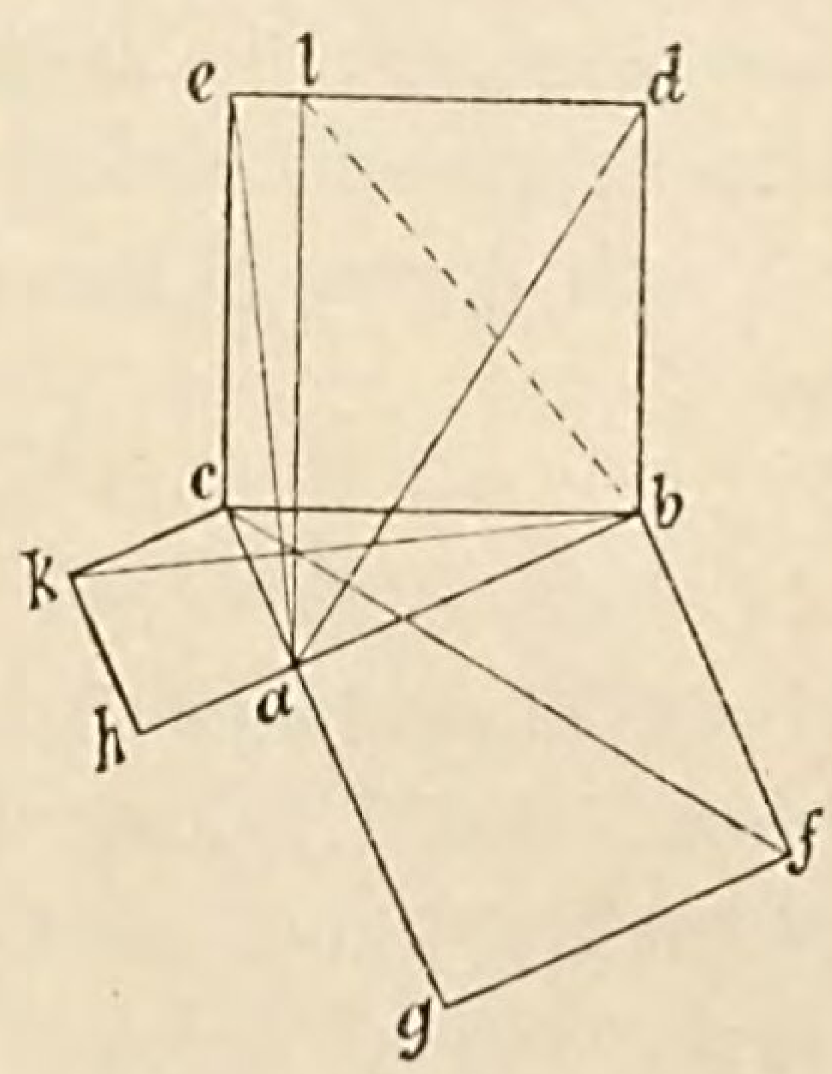

Fig. 8.




Diesen Fällen reihen sich zunächst solche an, in denen zwar der Inhalt eines Satzes unmittelbar durch die Construction anschaulich wird, aber die logische Führung des Beweises eine hinzutretende Theilung durch Ziehung einer oder mehrerer Hülfslinien erforderlich macht. So bedarf die geometrische Versinnlichung des Satzes $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ (Euklid II, 4), um sofort anschaulich zu sein, nur der Ziehung der durch den Satz selbst geforderten Linien $ef$ und $gh$. Die Reduction auf bereits bewiesene Sätze fordert aber ausserdem die Ziehung der Diagonale $ac$, welche es möglich macht, auf die Sätze von der Gleichheit der Wechselwinkel und der Winkel an der Basis des gleichschenkeligen Dreiecks zurückzugreifen (Fig. 8).

In einer dritten Classe von Fällen ist die Art der vorzunehmenden Theilung weder mit dem Inhalt des Satzes unzweideutig gegeben, noch führt sie zu einer unmittelbaren Veranschaulichung desselben, sondern sie wird zunächst nur durch das Streben nach logischer Zurückführung der Theoreme auf bereits bekannte Sätze bestimmt. Hier erreicht zwar ebenfalls die zerlegende Construction eine grössere Anschaulichkeit, aber es geschieht dies doch nur für ein durch mannigfache geometrische Betrachtungen bereits geübtes Anschauungsvermögen oder unter Zuhülfenahme weiterer, noch mehr ins einzelne gehender Zerlegungen. Als Beispiel kann der Euklidische Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes gelten (I, 47). Auch bei ihm können wir eine durch den Inhalt des Satzes selbst geforderte Construction von denjenigen Constructionen unterscheiden, die erst durch die Zurückführung auf bekannte Sätze nothwendig werden. Der Inhalt des Satzes macht die Ziehung der Linie $al \parallel ce$ erforderlich, durch welche das Quadrat $be$ in zwei Rechtecke $cl = ak$ und $bl = bg$ getheilt wird. Die weitere Construction, die in der Ziehung der Hülfslinien $ae$, $ad$, $bk$ und $cf$ besteht, dient dann dem Nachweis, dass wirklich $cl = ak$ und $bl = bg$ ist. Der grosse Unterschied von den vorangegangenen Fällen liegt aber darin, dass diese dem Beweis dienende Hülfsconstruction zugleich die Richtigkeit des Satzes erst einigermassen anschaulich macht. Dies geschieht dadurch, dass die drei genannten Hülfslinien zunächst die Herstellung von zwei Paaren congruenter Dreiecke, $cbf$ und $abd$, $ckb$ und $ace$, vermitteln. Da nun leicht zu sehen ist, dass $\triangle abd$ die Hälfte des Rechtecks $bl$ und $\triangle cbf$ die Hälfte des Quadrates $af$, so folgt, dass $bl = af$, und dass in analoger Weise $cl = ch$ ist. Prägen sich aber auch diese Verhältnisse einer geometrisch geübten Anschauung unmittelbar ein, so lässt sich doch nicht verkennen, dass solches nur vermöge der vorangegangenen Beschäftigung mit den Sätzen über die zwischen Parallellinien construirten Figuren möglich wird, welche von der unmittelbar anschaulichen Identität des Flächeninhalts von Dreiecken oder von Parallelogrammen von gleicher Höhe und Grundlinie und von der nicht minder anschaulichen Halbirung des Parallelogramms durch die Diagonale consequent zu dem Satze über-

Fig. 9.



geführt haben, dass ein Dreieck, welches mit einem Parallelogramm einerlei Grundlinie hat und zwischen denselben Parallelen construirt ist, die Hälfte vom Flächeninhalt des Parallelogramms einnimmt, daher $abd = \frac{1}{2} bl$ und $ace = \frac{1}{2} cl$ sein muss. Anschaulicher noch wird dieses Verhältniss, wenn man, die in jenen grundlegenden Sätzen stattfindende Entwicklung reconstruirend, etwa die Diagonale $bl$ zieht, wo sofort die Flächengleichheit der Dreiecke $abd$ und $bld = \frac{1}{2} bl$ einleuchtet. Selbst in solchen Fällen, wo das Constructionsverfahren vorwiegend durch logische Motive bestimmt wird, führt demnach die Theilung der Figuren auch immer zugleich eine anschauliche Vergegenwärtigung des Inhalts der Sätze mindestens als Nebenerfolg herbei. Es hat dies seinen natürlichen Grund darin, dass die durch die Ziehung gerader Linien gewonnenen Theile im allgemeinen von einfacherer Beschaffenheit sind als die ganze Figur und sich darum in ihren Formverhältnissen leichter übersehen lassen.

### c. Die ergänzenden Hülfsconstructionen.

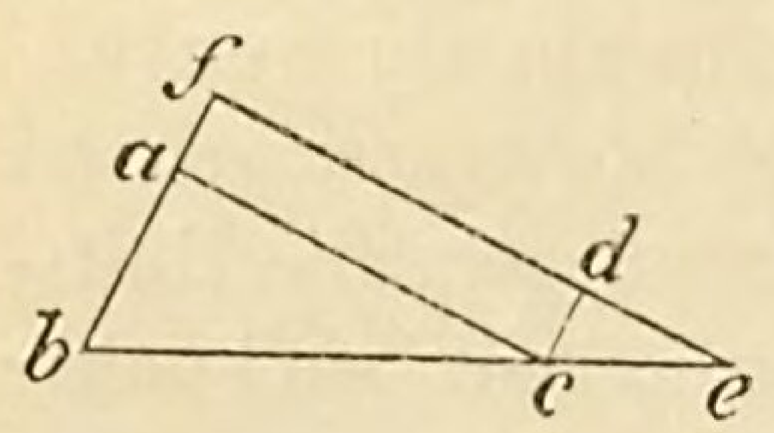
Während für Lehrsätze, die sich auf bestimmte Figuren beziehen, die Theilung dieser in der Regel als das nächstliegende Hülfsmittel einer anschaulichen Demonstration erscheint, führt die Lösung irgend welcher geometrischer Aufgaben häufiger zur Herbeiziehung von Hülfsconstructionen, die darauf abzielen das Raumgebilde, dessen Erzeugung die Aufgabe fordert, als einen Theil eines Ganzen erscheinen zu lassen; die Relationen der verschiedenen Theile dieses Ganzen verbürgen dann die Richtigkeit der gegebenen Lösung. Sehr deutlich ist dieses Verhältniss in Euklids Elementen zu erkennen, in denen Lehrsätze und Aufgaben weit mehr von einander geschieden sind, als es bei der neueren Behandlungsweise der Geometrie zu geschehen pflegt. So löst Euklid die Aufgabe, auf einer geraden Linie $ab$ ein gleichseitiges Dreieck zu errichten, indem er an den Endpunkten $a$ und $b$ mit $ab$ als Halbmesser zwei sich schneidende congruente Kreise zieht, worauf die nach einem der Schnittpunkte $c$ gezogenen Radien $ac$ und $bc$ die geforderte Construction ergeben: diese beruht also auf dem Kunstgriff, dass die gegebene Linie $ab$ zum Radius zweier sich in ihren Mittelpunkten schneidender gleicher Kreise gemacht wird, wodurch dann auch die Linien $ac$ und $bc$ zu Radien, also mit einander und mit $ab$ gleich

werden (Elemente I, 1). Die Aufgabe einen Winkel zu halbiren löst Euklid, indem er auf den Winkelschenkeln gleiche Strecken abträgt und an den Endpunkten dieser gleiche Radien zieht; die gewonnenen Punkte mit einander verbunden ergeben dann zwei congruente Dreiecke, deren gemeinsame Grundlinie die Halbirungslinie ist: hier besteht der Kunstgriff darin, dass die geforderten Winkel als gleich liegende Winkel congruenter Dreiecke construirt werden (I, 9).

Dieses Verhältniss zwischen Aufgaben und Lehrsätzen beruht darauf, dass im allgemeinen die Lösung von Aufgaben ein synthetisches Verfahren darstellt, welches für die Hülfsconstructionen der Lehrsätze, die den analytischen Gang einzuhalten pflegen, die Hülfsmittel herbeischafft. Die ergänzenden Hülfsconstructionen sind daher ebenfalls vorwiegend synthetischer Art: sie benützen das gegebene Object, um weitere Raumgebilde zu construiren, die mit jenem in einem bestimmten Zusammenhange stehen, worauf dann zuweilen allerdings als Nebenerfolg zugleich eine Theilung des ursprünglichen Objectes auftreten kann, namentlich wenn diese, wie in dem zweiten der obigen Beispiele, durch die Aufgabe selber gefordert ist. Es steht also diese Verwendung ergänzender Hülfsconstructionen in naher Beziehung zu der allgemeinen wissenschaftlichen Bedeutung der Aufgaben, und es ist daher charakteristisch, das Euklids Elemente nicht nur sogleich mit Aufgaben beginnen, sondern dass auch später neue Lehren wiederum durch solche eingeleitet werden. Von den fundamentalen Aufgaben, wie wir oben in unserem ersten Beispiel eine derartige kennen lernten, scheiden sich dann aber diejenigen, die bestimmten Lehrsätzen folgen, als deren Anwendungen, die meistens zugleich auf neue Lehrsätze vorbereiten. So ist das zweite der obigen Beispiele eine Anwendung der Congruenzsätze und bereitet anderseits die Sätze über das Verhältniss der Neben- und Aussenwinkel vor, in denen von der Theilung der Winkel Gebrauch gemacht wird. Nichts desto weniger hat auch Euklid Aufgaben und Theoreme nicht vollständig von einander getrennt, sondern, namentlich in solchen Fällen, in denen die Lösung einer Aufgabe dem Beweis eines einzelnen Lehrsatzes dient, die erstere mit dem letzteren verschmolzen, oder er hat Sätze in die Form von Theoremen gebracht, die ebenso gut als Aufgaben behandelt werden könnten. Unter diesen Umständen ist es begreiflich, dass auch in der Begründung einer grossen Zahl von Lehrsätzen ergänzende Hülfsconstructionen theils für sich, theils neben der Theilung der Figuren

auftreten. So beweist Euklid den Satz, dass Dreiecke auf gleichen Grundlinien und zwischen denselben Parallellinien gleich sind, indem er die Dreiecke durch Verlängerung der Parallelen, zwischen denen sie construirt sind, und durch Ziehung von Parallelen zu je einer der Seiten eines jeden Dreiecks zu Parallelogrammen ergänzt, wodurch der Satz auf den andern von der Gleichheit der Parallelogramme von gleicher Höhe und Grundlinie zurückgeführt ist (I, 40). Der Satz, dass in gleichwinkeligen Dreiecken die Seiten, die um gleiche Winkel liegen, proportionirt sind, wird bewiesen, indem die Dreiecke auf derselben Grundlinie construirt und durch Verlängerung gleich liegender Seiten zu einem grösseren Dreieck, dessen Theile sie sind, ergänzt werden (VI, 4). Es ist dann leicht ersichtlich, dass die Ergänzung *a f c d* (Fig. 10) ein Parallelogramm, daher $fb \parallel cd$ und $ac \parallel fe$ ist. Mit Hülfe des Satzes, wonach die Parallele zur einen Seite eines Dreiecks die andern Seiten proportional theilt, folgt aber hieraus $ba : af = bc : ce$ oder $ba : cd = bc : ce$; ebenso $fd : de = bc : ce$ oder $ac : de = bc : ce = ba : cd$. Offenbar liesse sich dieser Satz ebenso gut in der Form einer Aufgabe behandeln. Um auf derselben Grundlinie zwei Dreiecke zu construiren, deren Seiten proportionirt sind, hat man die beiden andern Seiten paarweise einander parallel zu ziehen und zu verlängern, wodurch das Dreieck *b f e* entsteht und alles weitere wie oben folgt.

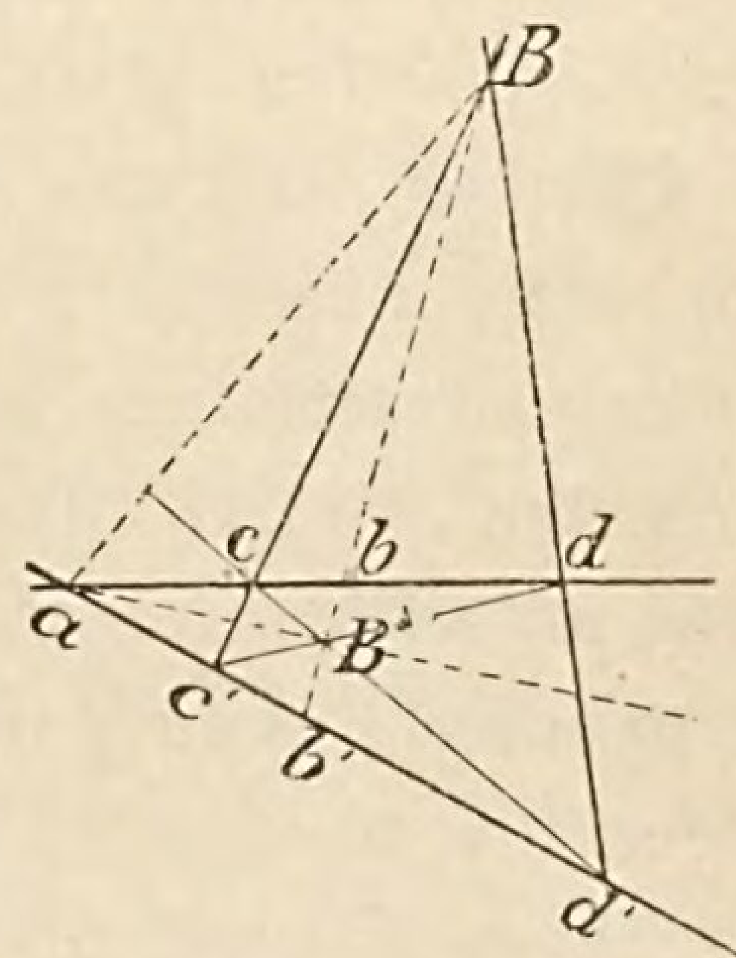
Fig. 10.




In einer noch innigeren Verbindung stehen in der neueren Geometrie die Lösung der Aufgaben und die Aufstellung der Lehrsätze, wie dies häufig schon die durchgängig gewählte Form der äusseren Darstellung mit sich bringt, in der an die Stelle der Zerlegung in eine Reihe scheinbar völlig getrennter Sätze die zusammenhängende Untersuchung getreten ist. Indem aber diese Untersuchung regelmässig von der Lösung bestimmter Aufgaben mittelst der Construction zu der Formulirung der Gesetze fortschreitet, die sich aus jener ergeben, wird die Constructionsmethode eine vorwiegend synthetische. Die Theilung der Figuren kommt daher nur noch in sehr geringem Masse zur Anwendung; an ihre Stelle tritt überall da, wo sich die Untersuchung auf ein bereits gegebenes Raumgebilde bezieht, wo also das Untersuchungsobject selbst nicht erst durch Construction erzeugt werden soll, die ergänzende Hülfs-

construction. Aber sie unterscheidet sich zugleich in der Art ihrer Durchführung von den Methoden der alten Geometrie. Diese tragen häufig noch den Charakter des Zufälligen an sich. Dem Stadium inductiver Ermittelungen näher stehend, oft sichtlich aus einer Erprobung verschiedener Mittel hervorgegangen, erscheinen sie leicht als willkürlich bevorzugte Verfahren, für die ebenso gut andere hätten gewählt werden können. Diesen Charakter trägt die Methode der Theilung der Figuren am allermeisten an sich; er fehlt aber auch bei den ergänzenden Hülfsconstructionen der Alten nicht ganz. Im Gegensatze hierzu sucht nun die neuere synthetische Geometrie überall diejenigen Constructionsmethoden anzuwenden, die durch die Natur des Problems unmittelbar gefordert sind, so dass sie den künstlichen Verfahrungsweisen Euklids gegenüber als natürliche Methoden erscheinen, die sich für Jeden, der das allgemeine Princip der Methoden erfasst hat, von selbst ergeben. Es handle sich z. B. um die Untersuchung des Vierecks oder desjenigen Raumgebildes, das durch vier Punkte in der Ebene, $c\,d\,c'\,d'$, bestimmt wird. Für Euklid war die Untersuchung eines solchen Gebildes erschöpft durch die Ermittelung seines Flächeninhaltes, welche mittelst der Construction eines Parallelogramms von gleichem Flächeninhalte geschah, und wobei der Winkel, den die Höhenseite dieses Parallelogramms mit der Grundlinie bildet, willkürlich blieb (Elemente I, 45). Die neuere Geometrie sucht die gesetzmässigen Beziehungen festzustellen, in denen die aus dem gegebenen Raumgebilde und seinen Elementen von selbst sich ergebenden Raumtheilungen zu einander stehen.

Fig. 11.




Als nächste ergänzende Construction wird so die Verbindung eines jeden der vier Punkte mit jedem der drei andern gefordert: auf diese Weise entsteht das aus 6 Linien bestehende vollständige Viereck (Fig. 11). Sodann kann eine jede dieser 6 Geraden beliebig verlängert werden: diese Verlängerungen sammt den so entstandenen Durchschnittspunkten bilden das vollständige Vierseit. In ihm erscheinen die Punkte $c'\,d'$ als Projectionen der Punkte $c\,d$, $b$ und $b'$ als Projectionen von $B'$ oder $B$. Daraus aber folgt die fundamentale Beziehung

$$\frac{a\,c}{b\,c} : \frac{a\,d}{b\,d} = \frac{a\,c'}{b'\,c'} : \frac{a\,d'}{b'\,d'},$$

eine Beziehung, aus der eine Reihe der wichtigsten Folgerungen abgeleitet wird, die in das Gebiet der später zu betrachtenden geometrischen Analyse gehören*).

Zuweilen gehen solche Constructionen von speciellen Fällen aus, in denen Hülfslinien von fundamentaler Bedeutung für die Auffassung der Mass- oder Lageverhältnisse der Figuren durch die Beschaffenheit dieser an die Hand gegeben sind, worauf sie dann durch Verallgemeinerung auf alle andern Fälle ähnlicher Art übertragen werden, um die anschauliche Darstellung eines allgemeinen Gesetzes zu vermitteln. So ist unmittelbar ersichtlich, dass die gemeinsame Sehne zweier sich schneidender Kreise von jedem Punkte ihrer Verlängerungen aus die Ziehung von Tangenten, die einander gleich sind, an die beiden Kreise gestattet. Dies vorausgesetzt ist leicht nachzuweisen, dass jenes Verhalten der gemeinsamen Sehne eine Eigenschaft ist, die allgemein einer bestimmten Geraden zukommt, die auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte zweier beliebig in einer Ebene gelegener Kreise senkrecht ist, und die als die Polare der beiden Kreise bezeichnet wird. Es kann dann die nämliche Linie auch für die Lagebeziehung dreier Kreise benützt werden, da offenbar die drei Polaren dieser Kreise in einem Punkte sich schneiden müssen**). Im weiteren Sinne können diesen ergänzenden Hülfsconstructionen auch die Projectionsmethoden der descriptiven Geometrie, durch die sie wichtige Eigenschaften körperlicher Gebilde mittelst ihrer Projectionen auf einer Ebene nachweist, sowie die mannigfaltigen Verfahrungsweisen der Transformation der Figuren beigezählt werden. Sie alle haben die gemeinsame Eigenschaft zu gegebenen Figuren andere zu construiren, die, zu jenen in bestimmten gesetzmässigen Beziehungen stehend, deren räumliche Verhältnisse erkennen lassen.

Der unterscheidende Charakter der ergänzenden Hülfsconstructionen in den zuletzt betrachteten Anwendungen gegenüber der Euklidischen Geometrie besteht zunächst darin, dass man nicht bloss die Grösse-, sondern auch die Lagebeziehungen der untersuchten Raumgebilde mittelst der Construction erschöpfend zu bestimmen sucht. Sodann aber ergeben sich die geforderten Hülfslinien unmittelbar aus den Relationen der gegebenen Elemente selbst, und

---

*) Jacob Steiners Vorlesungen über synthetische Geometrie. II, 2. Aufl. Bearb. von H. Schröter, S. 17 ff.

**) H. Hankel, Die Elemente der projectivischen Geometrie, Leipzig 1875, S. 7 u. 65 ff.

sie führen daher ohne weiteres zu einem angemessenen Ausdruck dieser Relationen. So zeigt z. B. die Hülfsconstruction des vollständigen Vierseits (Fig. 11) sofort, dass die Lagebeziehung der vier Punkte auf den allgemeineren Fall der projectivischen Beziehung zweier geradliniger Punktreihen *abcd* und *a'b'c'd'* zu einem von einem gegebenen Mittelpunkt *B* ausgehenden ebenen Strahlenbüschel zurückführbar ist. Indem die Construction von dem gewöhnlichen zunächst zu dem vollständigen Viereck und dann von diesem zu dem vollständigen Vierseit überführt, ist sie aber zugleich eine Erzeugung dieser Raumgebilde. Die ergänzenden Hülfsconstructionen bilden daher den Uebergang zu den genetischen: sie können, namentlich in der Anwendungsweise, die ihnen die projectivische Geometrie gibt, selbst als genetische Constructionen betrachtet werden, die in ihrer Ausführung durch bereits vorhandene Raumgebilde bestimmt sind.

### d. Die genetischen Constructionen.

Die genetische Construction ist nothwendiger Weise zu jeder Zeit der Ausgangspunkt geometrischer Untersuchungen gewesen. Die Raumgebilde müssen erzeugt sein, ehe die Betrachtung ihrer Mass- und Lageverhältnisse beginnen kann. Aber nicht immer hat die genetische Construction zugleich die Grundlage der Untersuchungen gebildet. Die Geometrie der Alten betrachtet die mit Lineal und Cirkel hervorgebrachten Figuren als fertige Objecte, die sie für sich und in ihrem gegenseitigen Verhältnisse der Untersuchung unterwirft. Dadurch wird von selbst die Theilung der Figuren, mit gelegentlicher Herbeiziehung ergänzender Hülfsconstructionen, zur herrschenden Methode, und diese Methode führt unvermeidlich zur isolirten Untersuchung der einzelnen Classen von Figuren, wobei verbindende Beziehungen nur zwischen solchen Raumgebilden sich einstellen, bei denen schon die unmittelbare Anschauung dieselben erkennen lässt. Indem hier die genetische Construction nur den Zweck hat, das Material für die nachfolgende Untersuchung zu gewinnen, nicht dieser selbst als vornehmstes Hülfsmittel zu dienen, erscheint die Art, wie die verschiedenen Figuren erzeugt werden, verhältnissmässig gleichgültig. Der gleichzeitige Gebrauch von Cirkel und Lineal liess überdies von vornherein die einfachsten regelmässigen Figuren bevorzugen, eine Neigung, die durch ästhetische Interessen, durch die Leichtigkeit der Aufgaben und durch die einseitig metrische Richtung der Untersuchung begünstigt wurde.

So begreiflich und nothwendig aber auch diese Bevorzugung war, so hinderte doch gerade sie eine allgemeinere Behandlung der Probleme, die zugleich zu einer planmässigeren und übereinstimmenderen Anwendung genetischer Constructionsmethoden hätte führen können. Es ist charakteristisch für dieses Zurücktreten des genetischen Gesichtspunktes, dass Euklid die Definitionen der Raumgebilde möglichst unabhängig macht von ihrer Erzeugungsweise, und daher erst bei den Körpern mit krummen Oberflächen, Kugel, Cylinder, Kegel, wo offenbar eine blosse Beschreibung allzu weitläufig würde, die descriptive durch eine genetische Definition ersetzt*). Obgleich aber die in diesen Fällen naheliegende Entstehungsweise der Raumgebilde durch Rotation einer ebenen Figur (Halbkreis, Parallelogramm, Dreieck) um ihre Axe darauf hinweisen musste, dass die Bewegung eine überall anwendbare genetische Constructionsmethode sei, so wurde diese doch bei den Kegelschnittlinien aus bloss zufälligen Anlässen wieder verlassen, um das Princip der Erzeugung von Figuren mittelst der gegenseitigen Durchschneidung anderer, die bereits gegeben sind, zu benützen. Nur bei gewissen verwickelteren Curven, wie bei der Quadratrix, der Conchoide des Nikomedes, der Archimedischen Spirale u. s. w., kehrte man, veranlasst durch die in der Natur zu beobachtende Entstehung solcher Curven, abermals zu der Bewegung zurück. Auf diese Weise pflegt die antike Geometrie von derjenigen Erzeugungsweise der Formen auszugehen, durch die sie zufällig gefunden wurden, ohne sich darum zu kümmern, dass im einen Fall körperliche Gebilde zur Erzeugung von Curven in der Ebene und in einem andern umgekehrt ebene Figuren zur Erzeugung von Körpern und krummen Oberflächen verwendet werden.

Dagegen ist die neuere Geometrie, in dem Masse als sie die genetische Construction zur herrschenden Methode erhob, zugleich bestrebt gewesen, die einzelnen Constructionen in einen systematischen Zusammenhang zu bringen, der durch die gleichförmigen Bedingungen der Erzeugung und die regelmässige Ableitung neuer Constructionen aus den bereits gegebenen bedingt wird. Indem dieser Zusammenhang die Forderung mit sich bringt, dass alle Raumgebilde auf die einfachsten Elemente zurückzuführen sind, aus denen sie erzeugt werden können, werden die äusseren Hülfsmittel, deren sich die Construction bedient, nicht vermehrt, sondern vereinfacht. Das einzige unerlässliche Werkzeug bleibt das Lineal. Nicht der Kreis und die

*) Euklids Elemente, Buch XI.

Gerade, sondern der Punkt und die Gerade sind die einfachsten Gebilde; sie dienen zunächst zur Erzeugung der Ebene, worauf dann mittelst dieser drei Elemente alle andern Raumformen entstehen können. Hatte die alte Geometrie, durch zufällige Anlässe bestimmt, bald die Bewegung der Elemente, bald die Durchschneidung gegebener Raumgebilde benützt, ohne dass zwischen beiden Methoden eine innere Beziehung ersichtlich geworden wäre, so ist jetzt die wechselseitige Durchdringung beider zur Herrschaft gelangt. Indem alle Raumgebilde auf gesetzmässig erfolgende Bewegungen von Punkten und Geraden zurückgeführt werden, pflegt nämlich eine solche Bewegung die Entstehung von Durchschnittsfiguren als eine weitere Folge mit sich zu führen. Der Vorgang, der diese Verbindung beider Constructionen unmittelbar verwirklicht, ist die Projection. Hiernach scheiden sich die genetischen Constructionsmethoden im ganzen in drei Classen: die Erzeugung von Raumgebilden durch Bewegung, die Bildung von Durchschneidungsfiguren und die projectivische Construction. Ausserdem sind zuweilen noch Transformationen der Figuren durch Biegung, Dehnung und Zerschneidung als specielle Hülfsmittel, namentlich im Interesse der geometrischen Versinnlichung analytischer Sätze, angewandt worden. Die Bewegung und die wechselseitige Durchschneidung von Raumgebilden hat schon die alte Geometrie benützt; die projectivische Methode ist erst in der neueren synthetischen Geometrie zur Entwicklung gelangt.

Die Erzeugung der Raumgebilde durch Bewegung hat gegenüber andern Methoden hauptsächlich zwei grosse Vorzüge. Der eine besteht in ihrer unbeschränkten Anwendbarkeit: jedes beliebige Raumgebilde lässt sich auf irgend eine Bewegung oder auf ein System von Bewegungen zurückführen, und diese Entstehungsweise gibt regelmässig zugleich über gewisse fundamentale Eigenschaften der Figur unmittelbar Rechenschaft. Der zweite Vorzug besteht in der Möglichkeit, jede, auch die verwickeltste Form aus sehr einfachen Bedingungen abzuleiten. In doppelter Weise findet bei der Erzeugung der Formen durch Bewegung eine solche Zurückführung auf elementare Bedingungen statt: jede Bewegung zusammengesetzter Raumgebilde lässt sich in Bewegungen einfacherer, und jede verwickeltere Bewegung lässt sich in eine Anzahl einfacher Bewegungen zerlegen. Als letztes Element des Raumes, aus dessen wiederholten Bewegungen jede noch so complicirte Figur schliesslich abgeleitet werden kann, bleibt so der Punkt; als einfachste Bewegung, auf

deren Wiederholung und Zusammensetzung jede beliebige Bewegung zurückzuführen ist, bleibt die einfache geradlinige Bewegung. Die Verwicklung der aus diesen Elementen erzeugbaren Formen kennt aber keine Grenzen, da sich beliebig viele einfache Bewegungen combiniren und die durch vorausgegangene Bewegungen erzeugten Formen als Grundgebilde für eine neue Erzeugungsreihe verwenden lassen. Die systematische Erzeugung zusammengesetzter Formen aus einfachen kann daher den Uebergang von den Formen niederer zu solchen höherer Stufe in zweifacher Weise gewinnen: 1) durch gleichzeitige Combination mehrerer Bewegungen von gleicher Einfachheit, und 2) durch successive Anwendung bestimmter Bewegungsgesetze auf die durch vorangegangene Bewegungen erzeugten Raumgebilde. Beide Formen des systematischen Fortschritts erfüllen verschiedene Zwecke, nach denen die Wahl der Methode sich richten muss.

Die gleichzeitige Combination mehrerer einfacher Bewegungen ist das wirksamste Mittel, um Raumgestalten derselben Art, aber von wachsender Verwicklung entstehen zu lassen. Die Zusammensetzung der Bewegungen gibt hier unmittelbar ein anschauliches Mass ab für den Grad der Verwicklung der Form, wie er analytisch durch den Grad der Gleichung gemessen werden kann, die der arithmetische Ausdruck des betreffenden Raumgebildes ist. So entstehen alle Curven zweiten Grades durch die Bewegung eines Punktes, die im allgemeinen durch eine Gerade und zwei feste Punkte, die Brennpunkte, bestimmt ist: diese Bewegung erzeugt eine Ellipse, wenn die Entfernungssumme, eine Hyperbel, wenn der Entfernungsunterschied von den zwei festen Punkten gleich der gegebenen Geraden ist; Kreis und Parabel sind Grenzfälle, von denen der erste entsteht, wenn die zwei Brennpunkte in einen zusammenfallen, der zweite, wenn der eine der Brennpunkte in unendliche Entfernung rückt. Wie sich auf diese Weise die Kegelschnitte auf Punkte und gerade Linien als die bestimmenden Elemente zurückführen lassen, so ist eine ähnliche Reduction bei jeder noch so verwickelten Curve immer ausführbar. Man pflegt dabei unter den bestimmenden Elementen zunächst einfachere Curven zu erhalten; da sich aber diese durch Punkte und Gerade bestimmen lassen, so bleibt jene Reduction auch bei den höheren Curven immer möglich, und es nimmt dadurch theils die Zahl der einfachen Elemente, von denen die Bewegung abhängt, theils die Zahl der Bewegungen, die zur Erzeugung der Curve erforderlich sind, fortwährend zu. So er-

fordert z. B. die Archimedische Spirale an sich nicht mehr Elemente als der Kreis, nur tritt bei ihr an die Stelle des festen Punktes und der Geraden ein fester Kreis und eine Gerade, und die Bewegung selbst wird eine doppelte: während die Gerade als Halbmesser des Kreises bestimmte Bogenlängen beschreibt, legt zugleich auf ihr der erzeugende Punkt Strecken zurück, die jenen Bogenlängen proportional sind.

Auf diese Weise verwendet die synthetische Geometrie die Bewegung stets in solcher Weise, dass das bewegte Element durch seine Relationen zu gewissen andern Elementen vollständig bestimmt wird, und dass daher von der relativen Geschwindigkeit der stattfindenden Bewegungen abstrahirt werden kann. Diese Abstraction findet ihren Ausdruck in dem Begriff des geometrischen Ortes. Indem dieser einen Punkt oder eine Summe von Punkten bezeichnet, welche von andern Raumelementen bestimmt sind, ermöglicht er die vollständige Elimination des Begriffs der Bewegung, während doch alle sonstigen Vortheile der genetischen Construction beibehalten werden. Definirt man z. B. die Hyperbel als den geometrischen Ort eines Punktes, für den die Differenz der Abstände von zwei festen Punkten einer constanten Geraden gleich kommt, so ist hier nur noch die gesetzmässige Abhängigkeit von den bestimmenden Elementen der Curve zum Ausdruck gelangt. Da der Begriff der Bewegung zur Auffassung eines Raumgebildes nicht erforderlich ist, so ist die Substitution des geometrischen Ortes an ihrer Stelle die vorzüglichere Form der Definition, wenn auch anerkannt werden muss, dass dieser Begriff erst durch die Verwerthung der Bewegung zur Erzeugung der Raumgebilde nahegelegt wurde. Die Möglichkeit den Begriff der Bewegung durch den des geometrischen Ortes zu ersetzen unterscheidet aber insbesondere auch die Constructionen der synthetischen von denjenigen der Coordinatengeometrie. Diese wird durch die analytischen Zwecke, die sie verfolgt, zur Anwendung möglichst gleichförmiger Constructionsmethoden gezwungen. Hierdurch ist sie aber zugleich genöthigt, sich auf die Benützung von bestimmten Elementen einfachster Art zu beschränken. Eine ebene Curve z. B. denkt man sich erzeugt durch die Bewegung eines in der Ebene gelegenen Punktes, die in zwei Bewegungen nach den Coordinatenaxen zerlegt wird: es ist dann die Form der Curve von der relativen Geschwindigkeit abhängig, welche diese beiden Bewegungen in jedem Momente besitzen. Hier ist eine Elimination des Begriffs der Bewegung zu Gunsten des geometrischen Ortes durchaus unmöglich, da die gleichförmige Art, in der jene

Reduction auf die Coordinatenaxen bei Curven der verschiedensten Ordnung vorgenommen wird, dazu zwingt, alle Formeigenthümlichkeiten der Raumgebilde auf Relationen der Geschwindigkeit zurückzuführen. Wo sich die erzeugenden Elemente nach der besonderen Natur der Gebilde nicht richten, da muss selbstverständlich alles in die Modalitäten der erzeugenden Bewegungen, ihre relativen Geschwindigkeiten und Geschwindigkeitsänderungen, verlegt werden. Der Vortheil, der aus dieser Gleichförmigkeit für die analytische Behandlung entspringt, ist aber ein ebenso grosser Nachtheil für die rein geometrische Betrachtung.

Die Forderung, jede Construction durch Bewegung auf möglichst einfache bestimmende Elemente zurückzuführen, geräth nun unvermeidlich bei Aufgaben von verwickelter Natur mit der andern Forderung, dass die Zahl der bestimmenden Elemente eine möglichst kleine sei, so sehr in Conflict, dass man in der Regel der letzteren nachgeben wird, sofern nicht, wie bei der Coordinatengeometrie oder bei den unten zu besprechenden projectivischen Methoden, specielle Motive die ausschliessliche Wahl gerader Linien fordern. Hiervon abgesehen erscheint es als ein wohlbegründetes Recht, dass man durch die successive Anwendung bestimmter Bewegungsgesetze auf bereits vorhandene Raumgebilde eine Reihe neuer Constructionen gewinnt. Nicht selten wird dieses Verfahren zu einer tieferen Einsicht in die Verwandtschaftsbeziehungen geometrischer Formen führen, als wenn man für jede einzelne Form die einfachste Erzeugungsweise wählt, die für sie möglich ist. So lassen die oben angeführten einfachsten genetischen Constructionen der Kegelschnitte durchaus eine Erkenntniss ihrer Beziehungen vermissen. Diese wird dagegen sofort hergestellt, wenn man jeden Kegelschnitt aus der Bewegung eines Punktes ableitet, der von einem festen Punkte und von einem Kreise gleich weit absteht, wenn man also statt zweier Punkte und einer Geraden einen Punkt, einen Kreis und eine Gerade als bestimmende Elemente wählt*). Weist man nun dem erzeugenden Punkte die verschiedenen für ihn möglichen geometrischen Orte an, so erhält man successiv die verschiedenen Formen des Kegelschnitts; dieser ist eine Ellipse, wenn der Punkt innerhalb des bestimmenden Kreises liegt, er wird selbst zu einem Kreis, wenn er in den Mittelpunkt desselben fällt, zu einer Geraden, wenn er in

*) Steiner, Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung. Bearbeitet von C. F. Geiser, 2. Aufl., S. 40 ff.

seinen Umfang fällt, zu einer Hyperbel, wenn er ausserhalb des Kreises liegt, und speciell zu einer Parabel, wenn der Mittelpunkt des bestimmenden Kreises in unendliche Ferne rückt, wodurch sich der Umfang desselben in die Leitlinie der Parabel umwandelt. Diese Construction erschöpft also nicht nur vollständig den Begriff des Kegelschnitts, sondern sie zeigt auch, wie die verschiedenen Formen durch stetige Veränderung der Bedingungen in einander übergehen.

Die Bildung von Durchschneidungsfiguren ist eine Constructionsmethode, welche zur Erzeugung durch Bewegung insofern im vollen Gegensatze steht, als sie nicht aus dem Einfachen das Zusammengesetzte, sondern aus dem Zusammengesetzten das Einfache ableitet. An sich ist diese Methode ebenso consequent durchführbar wie die entgegengesetzte. Wie man durch Bewegung des Punktes die Linie, durch Bewegung der Linie die Fläche und durch Bewegung der Fläche den Körper erhält, so liesse sich, von diesem ausgehend, als sein Durchschneidungsgebilde die Fläche, aus ihr die Linie und aus der Linie der Punkt gewinnen. Auch hat man zuweilen, mit Rücksicht darauf, dass uns in der Erfahrung nur Körper gegeben sind, diese Entwicklung für den naturgemässen Weg zur Erlangung der geometrischen Grundbegriffe gehalten. Dabei wird jedoch übersehen, dass wir durch Abstraction und nicht durch Construction zu den geometrischen Begriffen von Fläche, Linie und Punkt gelangen, und zwar durch eine Abstraction, die schon bei dem Begriff des Körpers wirksam ist, da dem geometrischen Körper zahlreiche Merkmale nicht zukommen, welche bei den physischen Körpern nicht fehlen können. In der That hat daher auch vorzugsweise in einem Fall die Bildung von Durchschneidungsgebilden wichtigere Anwendungen gefunden: bei der Erzeugung von krummen Linien durch Flächen. Gerade hier aber pflegt sich trotz des Uebergangs von drei Dimensionen auf zwei das erzeugende Gebilde durch einfachere Eigenschaften auszuzeichnen. Den augenfälligsten Beleg hierzu liefert diejenige Classe von Curven, die lange Zeit ausschliesslich auf diesem Wege abgeleitet wurde, die Kegelschnitte. Der Kegel, namentlich der gerade Kreiskegel, den die Alten allein benützten, wird durch eine viel einfachere Bewegungsconstruction gewonnen als die Kegelschnitte selbst, den Kreis ausgenommen. So leicht es war, durch Drehung eines Dreiecks auf seiner Basis einen Kegel herzustellen, so wenig nahe lag es, durch die Bewegung eines Punktes in der Ebene die Ellipse, Parabel und Hyperbel zu finden.

Auch musste die Verschiedenheit der Durchschnittsfläche des abgestumpften Kegels je nach der Lage der schneidenden Ebene frühe schon die Aufmerksamkeit fesseln. Ausserdem bietet diese Construction vor der Erzeugung durch Bewegung eines Punkts in der Ebene den Vortheil, den Zusammenhang der verschiedenen Kegelschnitte unter einander anschaulich zu machen. Dagegen steht sie mit den fundamentalen Eigenschaften der Curven nicht in so unmittelbarer Beziehung, und es muss immerhin als eine Unvollkommenheit anerkannt werden, wenn man genöthigt ist, zur Erzeugung einer ebenen Figur den Raum von drei Dimensionen zu Hülfe zu nehmen.

Diese Unvollkommenheit ist es nun, die hauptsächlich zur Ausbildung der dritten Form genetischer Methoden, zu denen der projectivischen Construction, beigetragen hat. Indem diese aus einer Verbindung der beiden vorigen hervorging, hat sie freilich zur Ueberwindung gerade jener Unvollkommenheit nur allmählich geführt. Die nächste Umgestaltung nämlich, welche die Erzeugung von Durchschnittsgebilden im Sinne einfacherer genetischer Methoden zuliess, bestand in der Ausbildung der perspectivischen Projectionsmethode. Wie die sämmtlichen Curven zweiten Grades als Durchschneidungsgebilde der allgemeinsten Oberfläche zweiten Grades, der Kegelfläche, dargestellt werden können, so lassen sie sich auch als perspectivische Projectionen der einfachsten dieser Curven selber, des Kreises, gewinnen. Denkt man sich den Schatten, den ein Kreis entwirft, wenn sich hinter ihm ein leuchtender Punkt befindet, durch eine Ebene von veränderlicher Lage aufgefangen, so erhält man durch Drehung der Ebene die verschiedenen Kegelschnitte als Schattenprojectionen. Aehnlich lassen sich, wie Newton gezeigt hat, die verschiedenen Formen der Curven dritten Grades durch die Schattenprojection von fünf divergirenden Parabeln gewinnen*). Denkt man sich nun aber den Punkt, von dem die Projectionsstrahlen ausgehen, in unendliche Entfernung gerückt, so verwandelt sich die centrale Projection in die seit Monge von der descriptiven Geometrie vorzugsweise benützte Parallelprojection. Da bei dieser parallele Linien auch nach der Projection parallel bleiben, so werden zwar die Dimensionsverhältnisse, nicht aber die Lageverhältnisse der Figuren verändert. Aus räumlichen Gebilden gehen also Figuren in der Ebene hervor, die jenen in allen ihren Eigenschaften ent-

*) Neutoni Genesis curvarum per umbras, Lond. 1746.

sprechen. So eröffnet sich hier eine Reihe theoretisch wie praktisch gleich wichtiger Wechselbeziehungen, indem sich bald die Eigenschaften der ebenen Figuren aus denjenigen der ihnen entsprechenden körperlichen Formen, bald umgekehrt diese aus jenen genetisch entwickeln lassen*).

Diese beiden Anwendungen der Projectionsmethode, die Schattenconstruction und die Parallelprojection der descriptiven Geometrie, setzen jedoch gegebene Raumgebilde voraus, die nach bestimmten Regeln in andere transformirt werden. Sie stehen auf diese Weise in gewissem Sinne immer noch zwischen der ergänzenden Hülfsconstruction und der genetischen Construction in der Mitte. Nur insofern, als das durch die Transformation erzeugte Gebilde entweder den gleichen Werth beansprucht wie das ursprüngliche oder sogar den eigentlichen Zweck der Methode ausmacht, überwiegt bereits der genetische Gesichtspunkt. Zur vollen Geltung gelangt aber dieser bei den projectivischen Constructionen erst dann, wenn nicht bestimmte Raumgebilde, sondern nur die zur Ausführung der Projection unerlässlichen Elemente selbst als gegeben vorausgesetzt werden. Diese Elemente sind der Punkt, als der Ort von dem ein Projectionsstrahl ausgeht, die Gerade, welche die Richtung desselben angibt, und die Ebene, welche das zu einem Punkt gehörige Strahlenbüschel enthält, das durch je zwei in dem Punkt sich schneidende Strahlen bestimmt wird. Insofern sich hierbei der Punkt stets als Durchschnittsgebilde von Strahlen ergibt, können diese Elemente auch auf zwei, auf die Gerade und die Ebene, zurückgeführt werden. Es übernimmt dann die Gerade jene Rolle des erzeugenden Gebildes, die bei der Construction durch Bewegung dem Punkte zukommt. Wie bei dieser der in einer Ebene bewegte Punkt alle ebenen Figuren hervorbringt, so erzeugen bei der projectivischen Construction gerade Linien in der Ebene, indem sie sich kreuzen oder als Tangenten einen Raum umhüllen, alle in der Ebene möglichen Raumformen. Den Namen der synthetischen Geometrie trägt gerade diese Darstellungsweise deshalb mit Recht, weil sie wirklich durch eine Synthese von ausgedehnten Gebilden der einfachsten Art, von Geraden, alle Formen hervorbringt. Die Bewegungsconstruction dagegen verfährt nicht im eigentlichen Sinne synthetisch, da der Punkt selbst kein ausgedehntes Gebilde, also

*) Vgl. hierzu Chasles, Geschichte der Geometrie, Cap. V. Deutsche Ausgabe von Sohncke, Halle 1839, S. 185 ff.

auch die Erzeugung einer Curve durch seine Bewegung nur die successive Darstellung der geometrischen Orte ist, aus denen die Curve wirklich besteht, nicht aber eine synthetische Erzeugung aus anderen elementaren Raumgebilden.

Die in diesem Sinne angewandte projectivische Construction ist demgemäss auch vom genetischen Gesichtspunkte aus die vollendetste Methode. Nichts weiter voraussetzend als jene einfachsten zur Construction erforderlichen Elemente, wird es ihr möglich, die verschiedenen Formen in der naturgemässen Reihenfolge hervorzubringen und unmittelbar aus ihrer Erzeugungsweise ihre wesentlichen Eigenschaften und inneren Beziehungen erkennen zu lassen. Um den Charakter dieser Methode zu kennzeichnen, sei hier nur auf einige einfache Beispiele hingewiesen, die sich an frühere Constructionen anschliessen. Wir haben S. 177 bemerkt, dass, wenn durch ein ebenes Strahlenbüschel zwei transversale gerade Linien gelegt werden, auf diesen zwei Reihen von Durchschnittspunkten $a, b, c, d$ und $a', b', c', d'$ entstehen, die zu einander perspectivisch sind, indem die eine Reihe als die perspectivische Abbildung der andern angesehen werden kann. Denkt man sich nun den Träger der einen Punktreihe, z. B. $A'$ (Fig. 12), durch Drehung um den Punkt $a'$ aus seiner ursprünglichen Lage gebracht, während die Punkte auf ihm unverändert bleiben, so können diese nicht mehr mittelst des Strahlenbüschels $S$, wohl aber mittelst eines zweiten Strahlenbüschels $S'$ erhalten werden, welches auf der andern Seite von $A'$ so gelegen ist, dass die Strahlen $Sa$ und $S'a'$ zusammenfallen. Verlängert man nun aber die von $S$ und $S'$ ausgehenden Strahlen über die zugehörigen Punkte hinaus, so schneiden sie sich in einer Punktreihe $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$, deren Träger wiederum eine gerade Linie ist. Da nämlich (S. 175 u. 177)

$$\frac{a\,c}{b\,c} : \frac{a\,d}{b\,d} = \frac{a'\,c'}{b'\,c'} : \frac{a'\,d'}{b'\,d'}$$

und jedes dieser Doppelverhältnisse nach der Construction $= \frac{\alpha\,\gamma}{\beta\,\gamma} : \frac{\alpha\,\delta}{\beta\,\delta}$ ist, so muss auch der Träger $G$ der Punktreihe $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$ wiederum eine Gerade sein. Umgekehrt lässt es sich daher als die Bedingung für die Erzeugung einer Geraden ansehen, dass die einander zugeordneten oder homologen Strahlen von perspectivisch gelegenen Mittelpunkten $S$ und $S'$ ausgehen müssen, wobei die perspectivische Lage dieser Mittelpunkte dadurch charakterisirt ist, dass ein Paar

homologer Strahlen zusammenfällt. Wir können uns nun aber auch den Träger $A'$ so aus seiner ursprünglichen Lage gebracht denken, dass diese Bedingung nicht mehr erfüllt ist. Ist dies der Fall, befinden sich also die beiden ursprünglich perspectivischen Punktreihen in irgend einer nicht perspectivischen oder schiefen Lage, so wird auch nicht mehr zu erwarten sein, dass die Durchschnittspunkte homologer Strahlen auf einer Geraden liegen. In der That zeigt die nähere Untersuchung, dass hier die Verbindung der Durchschnittspunkte eine regelmässig gekrümmte Linie ergibt, welche allgemein die Form eines Kegelschnitts besitzt. Die specielle Form

Fig. 12.

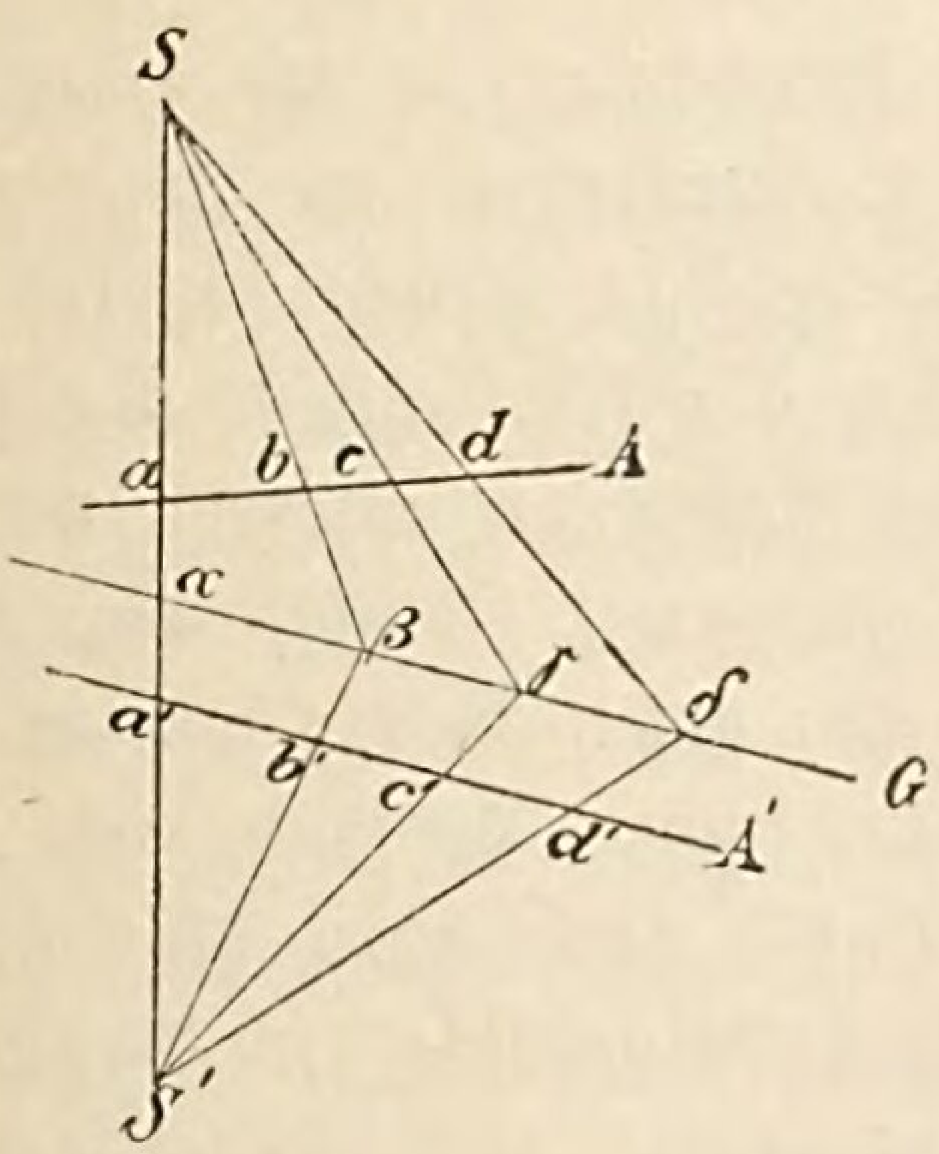
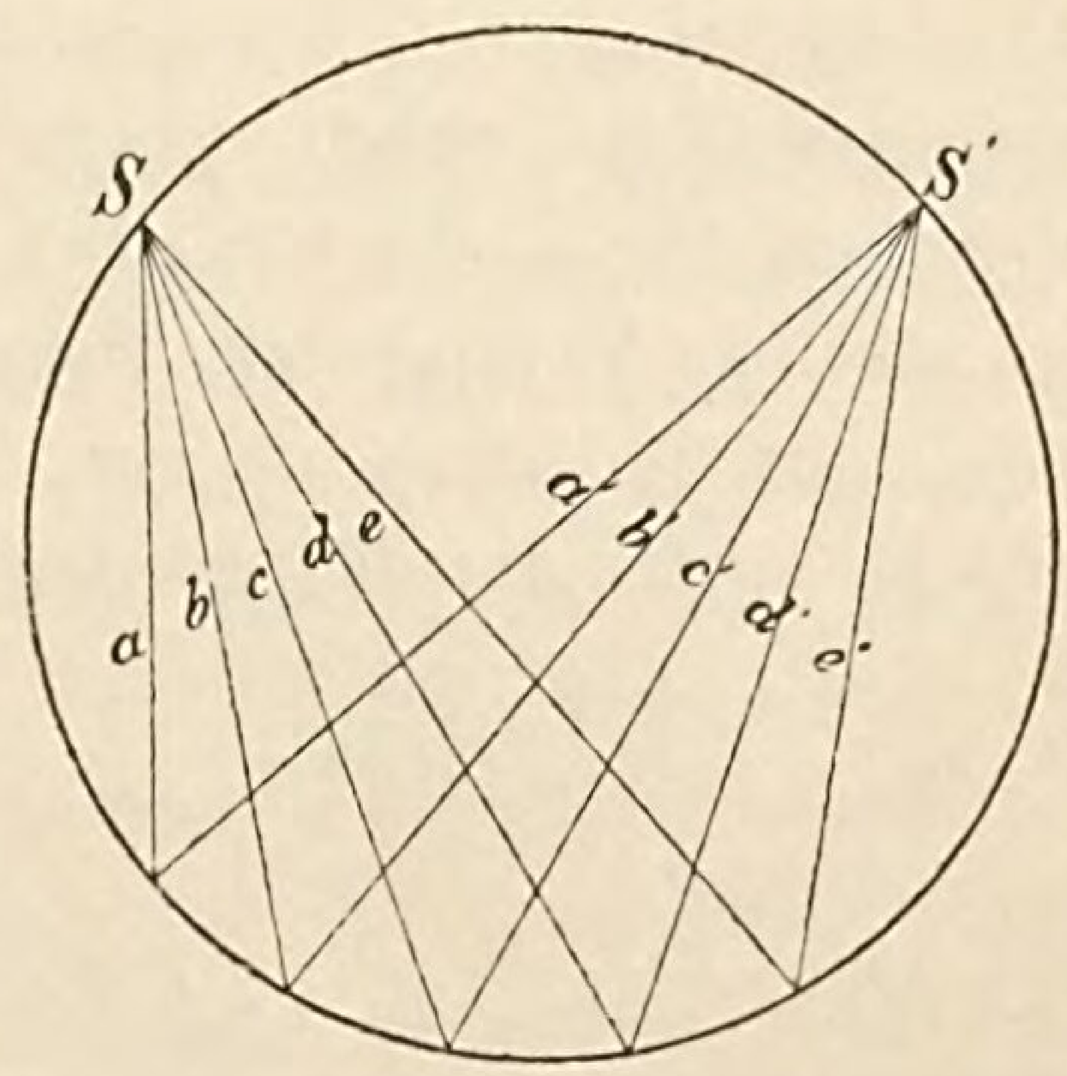



Fig. 13.

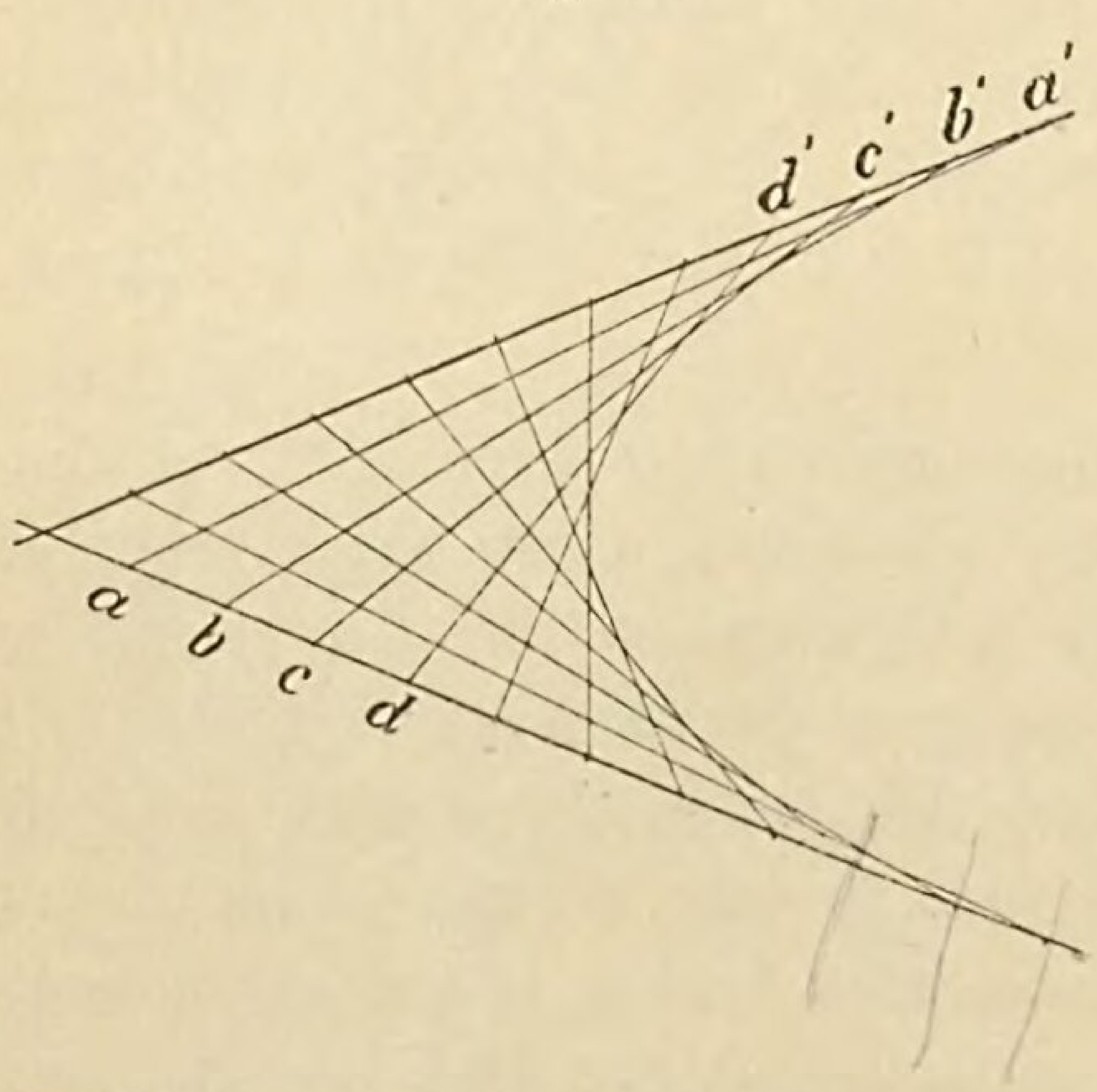



desselben ist dann wieder von den Lageverhältnissen der zu einander gehörigen Strahlen abhängig. So erhält man einen Kreis, wenn die Strahlen übereinstimmend liegen und überdies die Bedingung erfüllen, dass die Winkel, welche je zwei Strahlen bei $S$ bilden, den Winkeln der ihnen homologen Strahlen bei $S'$ gleich sind. In Folge dessen müssen dann auch die Winkel, welche die von jedem Curvenpunkt nach $S$ und $S'$ gezogenen Geraden bilden, sämmtlich einander gleich sein (Fig. 13). Ist die zweite der obigen Bedingungen nicht erfüllt, so entsteht je nach der Lage, die man den Strahlbüscheln (bez. den ihnen entsprechenden perspectivischen Punktreihen) zu einander gibt, eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, wobei sich als specielle Fälle ein Punkt, eine Gerade oder zwei Gerade ergeben können. So lange die Strahlen nicht nur übereinstimmend laufen, sondern auch alle homologen Strahlen sich durchschneiden, entsteht eine Ellipse, da diese ausser dem Kreis der einzige Kegelschnitt

ist, der keinen unendlich entfernten Punkt hat. Ist nur ein einziges homologes Strahlenpaar parallel, so entsteht die Parabel, der ein unendlich entfernter Punkt zukommt. Sind endlich zwei Strahlenpaare parallel, so entsteht die Hyperbel mit ihren beiden, zwei unendlich entfernten Punkten entsprechenden Zweigen. Dieser Fall kann sich auch dann ereignen, wenn die homologen Strahlen der beiden Strahlenbüschel nicht übereinstimmende Lage haben (nicht gleichlaufend sind). Hier gehören dann deren Mittelpunkte verschiedenen Zweigen der Hyperbel an. Der Durchschnitt nicht gleichlaufender Strahlen erzeugt darum unter allen Umständen eine Hyperbel. Theilt diese mit dem Kreise die Eigenschaft, dass die Winkel homologer Strahlen gleich sind, so entsteht der specielle Fall der gleichseitigen Hyperbel.

Abgesehen von der unmittelbaren Beziehung, in der diese Erzeugungsweisen durch projectivische Construction zu den geometrischen Eigenschaften der erzeugten Gebilde stehen, bietet die Methode den Vorzug dar, dass sie wegen der Einfachheit der Elemente, mit denen sie operirt, leicht Modificationen zulässt, welche geeignet sind, die Eigenschaften der erzeugten Gebilde von verschiedenen Seiten her zu beleuchten. So lässt sich eine Curve nicht bloss als Durchschnittsgebilde von Strahlenbüscheln in projectivischer Lage, sondern auch als Tangentengebilde construiren. Die Parabel z. B. hat die Eigenschaft, dass die zwischen äquidistanten Punkten irgend zweier Tangenten gezogenen Strahlen ebenfalls Tangenten sind. Demnach kann man sie als Umhüllungsgebilde zweier Strahlenbüschel betrachten, die von zwei projectivisch-ähnlichen Punktreihen in nicht-perspectivischer Lage erzeugt werden (Fig. 14).

Fig. 14.




Aehnlich umhüllt aber überhaupt die Gesammtheit der Projectionsstrahlen zweier projectivischer Punktreihen eine Curve, die mit jedem Projectionsstrahl nur einen Punkt, den Berührungspunkt, gemein hat. Diese Curve ist ein Kegelschnitt, und die specielle Form desselben hängt von dem Lageverhältniss der beiden erzeugenden

Punktreihen ab*). In dem Verhältniss dieser Erzeugungsweise zu der vorhin besprochenen tritt zugleich ein ergänzendes Verhältniss der constructiven Elemente zu einander hervor. Die nämliche Curve kann entweder als eine continuirliche Reihe von Punkten oder als eine continuirliche Reihe berührender Strahlen (Tangenten) betrachtet werden. Dort entsteht sie als Durchschnittsgebilde, hier als Umhüllungsgebilde. Im ersten Fall aber ist das ursprünglich erzeugende Gebilde das projectivische Strahlenbüschel, im zweiten die projectivische Punktreihe. Diese ergänzende Beziehung, die man auch als das Princip der Dualität der Gebilde bezeichnet, tritt in verschiedenen Gestaltungen auf. Wie sich in der Ebene die Punktreihe und das Strahlenbüschel ergänzen, so treten im Raum Punkt und Ebene als reciproke Gebilde einander gegenüber. Die Lage einer Geraden kann ebensowohl durch zwei Punkte wie durch zwei sich schneidende Ebenen bestimmt werden; im ersten Fall entsteht aber die Gerade als Bewegungsgebilde, im zweiten als Durchschneidungsgebilde. Ferner kann sowohl die Ebene wie der Punkt durch zwei Gerade oder die erstere durch eine Gerade und einen ausserhalb liegenden Punkt, der letztere durch eine Gerade und eine sie kreuzende Ebene, oder endlich jene durch drei Punkte, dieser durch drei Ebenen bestimmt werden. Diese Constructionen zeigen zugleich die nahe Beziehung zwischen der Erzeugung der Raumgebilde durch Bewegung und ihrer Erzeugung durch Durchschneidung. Einer Erzeugungsweise der ersten Art steht immer eine solche der zweiten dual gegenüber, und die eine wandelt sich in die andere um, wenn an die Stelle der erzeugenden Elemente andere treten, die zu ihnen in einem reciproken Verhältnisse stehen: bei Constructionen in der Ebene an die Stelle des Punktes die Gerade, bei Constructionen im Raum an die Stelle des Punktes die Ebene.

Insoweit die projectivischen Constructionen für sich selbst zur Entwicklung der Eigenschaften der betreffenden Raumgebilde nicht zureichen, pflegen sie unmittelbar auf gewisse Hülfsconstructionen hinzuweisen, die auch hier ihre ergänzenden Dienste leisten. So lässt z. B. die Construction der Kegelschnitte als Durchschnittsgebilde projectivischer Strahlenbüschel unmittelbar ersehen, dass jeder Kegelschnitt durch fünf Punkte seines Umfangs vollständig bestimmt ist. Es gehören nämlich die Mittelpunkte der erzeugenden

*) Steiner, Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften, S. 91 ff.

Strahlenbüschel stets der Curve an, und ausserdem sind alle Strahlen durch das Doppelverhältniss bestimmt, sobald zu drei Strahlen $abc$ die ihnen homologen $a'b'c'$ gegeben sind. Sucht man zu irgend welchen fünf Punkten eines Kegelschnitts durch Construction einen sechsten auf, so erhält man durch Verbindung dieser Punkte ein Sechseck, von dem schon Pascal die charakteristische Eigenschaft entdeckt hat, dass sich die gegenüberliegenden Seiten desselben in drei Punkten schneiden, die in einer Geraden liegen. Es ist nun aber durch jene sechs Punkte zunächst nur die Form des vollständigen Sechsecks bestimmt, welches man (nach der Analogie des vollständigen Vierecks S. 175) erhält, wenn jeder Punkt mit jedem andern verbunden wird, und welches, da irgend ein Punkt $a$ mit jedem der fünf andern Punkte verbunden werden kann, mit jeder Verbindung aber die entgegengesetzt gerichtete zusammenfällt, $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ Seiten hat. Aus diesem vollständigen Sechseck lässt sich wieder aus ähnlichen Gründen auf $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2} = 60$ verschiedene Arten ein gewöhnliches Sechseck herstellen. Jedem dieser 60 Sechsecke entspricht aber eine Pascal'sche Gerade, und je drei solcher Geraden schneiden sich, wie Steiner gezeigt hat, in einem Punkt. So führt diese Hülfsconstruction, die selbst durch die Erzeugung der Curve an die Hand gegeben ist, in völlig naturgemässer Weise, ohne irgendwie zufällig entdeckte Kunstgriffe in Anspruch zu nehmen, zu einer Fülle charakteristischer Linien und Punkte, durch die zusammengenommen mit den verschiedenen Erzeugungsformen die Eigenschaften der Curve erschöpfend bestimmt werden.

## 2. Die Anwendungen algebraischer Methoden auf die geometrische Untersuchung.

### a. Die algebraische und die analytische Geometrie.

Der Mangel einer algebraischen Symbolik hatte die antike Geometrie über ihr eigentliches Gebiet hinaus zu einer Vertreterin der allgemeinen Arithmetik erhoben. Die ausschliesslich metrische Richtung jener Geometrie, die hierin zum Theil ihre Quelle hatte, war ihrerseits wieder geeignet, diese Verbindung aufrecht zu erhalten und die Aufmerksamkeit von den besonderen Bedingungen

abzulenken, welche die geometrischen Objecte den arithmetischen Verfahrungsweisen entgegenbringen. Hierdurch geschah es, dass bestimmte Zahlverknüpfungen stets auf fest bestimmte Raumverhältnisse bezogen wurden, indem man bei demjenigen geometrischen Bilde stehen blieb, das die ursprünglichste Darstellung einer arithmetischen Operation gewesen war. Demgemäss betrachtete man allgemein die einfache Zahl als Mass einer linearen Strecke, das Product und die Quadratzahl repräsentirten eine ebene Fläche, das dreifache Product und die Cubikzahl einen Körper. Mehrfache Producte und höhere Potenzen als die dritte verloren überhaupt jede geometrische Bedeutung. Erst durch die freiere Bewegung, welche die Arithmetik in Folge der Erfindung der algebraischen Symbolik gewann, wurde diese Beschränkung beseitigt. Die entscheidende Leistung war hier Descartes' Geometrie. Der Titel bezeichnet nur unzureichend ihren Inhalt. Denn indem sich dieser gleichzeitig auf die allgemeine Untersuchung der algebraischen Gleichungen erstreckt, ist es einerseits die freiere geometrische Verwendung der arithmetischen Operationen, anderseits die synthetische Ableitung und analytische Untersuchung der algebraischen Formen, die sich der Verfasser zum Ziel setzt. So wurde dieses Werk gleichzeitig die Grundlage der neueren Geometrie und der Analysis. Den Weg zu seiner Behandlung der Geometrie bahnt sich aber Descartes, indem er den arithmetischen Fundamentaloperationen eine solche geometrische Deutung gibt, dass nicht bloss die ursprünglichen Grössen gerade Linien sind, sondern dass auch die Ergebnisse der mit ihnen vorgenommenen Operationen wiederum als gerade Linien erscheinen. So verwendet er zur Darstellung der Multiplication und Division die Construction ähnlicher Dreiecke. In diesen lässt sich, sobald man eine der Seiten der Einheit gleich setzt, eine Proportion bilden von der Form $a:b = c:1$, welche algebraisch den Gleichungen $a = b.c$ und $b = \frac{a}{c}$, also einer Multiplication und Division entspricht. Construirt man mit Zuhülfenahme des Kreises die mittlere Proportionale zwischen der Einheit und einer anderen Geraden, welche die Einheit zum Durchmesser ergänzt, so erhält die mittlere Proportionale die Bedeutung der Quadratwurzel aus der zweiten Geraden, oder diese ist gleich dem Quadrate der ersteren. Da nun dies Verfahren von den so gefundenen Linien ausgehend beliebig oft wiederholt werden kann, so steht nichts im Wege, eine dritte, vierte oder höhere Potenz in der Form einer Geraden zu construiren. Hatten die Alten alle Curven

höherer Grade als „mechanische Linien“ (weil sie durch gewisse mechanische Vorrichtungen und Bewegungen erzeugt werden konnten) von den geometrischen unterschieden, so gewinnt nun der Begriff der geometrischen Curven bei Descartes einen grösseren Umfang und zugleich eine analytische Bedeutung. Eine geometrische Curve ist ihm jede, die sich schliesslich auf bestimmte Relationen einer begrenzten Anzahl gerader Linien zurückführen lässt. Wo dies nicht mehr der Fall ist, wo also die Relationen der Geraden, die als die Erzeuger der Curven angesehen werden können, irgendwie veränderlich sind, da ist auch für Descartes die Linie keine geometrische mehr. Der Begriff der geometrischen Curve geht also nun vollständig parallel dem der algebraischen Gleichung, und in dem Gebiet der „mechanischen Curven“ verbleiben alle Gebilde, deren Untersuchung nicht durch die einfachen arithmetischen Operationen und ihre Wiederholungen erledigt werden kann, sondern auf eine unbegrenzte Zahl solcher Operationen, d. h. auf transcendente Functionen zurückführt. Auf diese Weise tritt hier zum ersten Mal die Unterscheidung der algebraischen und der transcendenten Curven in die Entwicklung der Geometrie ein, freilich in noch unvollkommener Gestalt und nur mit sicherer Abgrenzung der ersteren. Jene noch heute gebrauchte Bezeichnung rührt erst von Leibniz her, der damit zugleich die Beschränkung der Cartesianischen Geometrie endgültig beseitigte. Ihrem Ausgangspunkte gemäss war diese noch durchaus eine algebraische Geometrie gewesen. Als solche benützte sie die Algebra für die Geometrie und behandelte die letztere nur insoweit, als die elementaren algebraischen Methoden verwendbar sind; anderseits machte sie nicht minder die Geometrie der Algebra dienstbar, indem einer ihrer wesentlichsten Zwecke darin bestand, die anschauliche Bedeutung algebraischer Gleichungen nachzuweisen und so über deren Entstehungsbedingungen Rechenschaft zu geben. Diesem algebraischen Charakter entspricht es, dass die Constructionen überall dem einzelnen Fall angepasst sind. Bei der Untersuchung einer Curve werden diejenigen Hülfslinien gezogen, welche am einfachsten zu einem algebraischen Ausdruck führen. Solche Hülfslinien sind aber naturgemäss wechselnder Art, und es existiren daher, abgesehen von den Fällen, in denen sich ein einzelnes Problem selbst schon auf mehrere Curven bezieht, keine zwingenden Gründe zu einer gleichförmigen Rückbeziehung der untersuchten Gebilde auf ein System gerader Linien von unveränderlicher Lage.

Der Uebergang von der algebraischen zur analytischen

Geometrie vollzog sich theils in Folge der Ausdehnung der analytischen Behandlung auf transcendente Curven und auf den Raum von drei Dimensionen, theils unter dem Einfluss der Anwendungen der Geometrie auf die Mechanik. Die hier sich ergebenden Aufgaben machten einen festen Ausgangspunkt für die bestimmenden Geraden wünschenswerth. Die analytische Geometrie wurde daher zur Coordinatengeometrie. Indem diese die Geraden, durch deren Relationen die Eigenschaften der Raumgebilde gemessen werden, mit bestimmten Richtungen des Raumes zusammenfallen lässt, legt sie ihren Entwicklungen den mathematischen Raumbegriff in seiner abstractesten Form zu Grunde. Die Gleichungen, die als analytische Ausdrücke bestimmter Raumgebilde auftreten, besitzen darum den logischen Charakter von Definitionen, welche die einzelnen geometrischen Begriffe mit dem allgemeinen Raumbegriff in unmittelbare Beziehung bringen. Durch die Gleichung einer Raumcurve wird diese nach drei von einem festen Anfangspunkt ausgehenden Richtungen, die meist senkrecht zu einander gewählt werden, zerlegt, indem man feststellt, wie gross der einem bestimmten Fortschritt in der Richtung $X$ entsprechende Fortschritt in den zwei andern Richtungen $Y$ und $Z$ ist. Das Verfahren ist also auch im logischen Sinne ein analytisches, und zugleich ist in demselben die Vorstellung der Erzeugung der Raumgebilde durch Bewegung enthalten. Gerade deshalb liegt hier der Uebergang von der Geometrie zur Mechanik so nahe. In der That kommt es häufig nur auf die Interpretation der Symbole einer Gleichung an, ob man ihr eine geometrische oder eine mechanische Deutung geben will. Die Mechanik erscheint dabei als ein der Geometrie untergeordnetes Gebiet, insofern unter den zahllosen Raumgebilden, die überhaupt möglich sind, einzelne durch die in der Natur wirksamen Bewegungsgesetze erzeugt werden. Von den Methoden der antiken Geometrie entfernt sich aber die analytische Behandlung weit mehr als die algebraische Geometrie Descartes', da die Beziehung auf ein festes Coordinatensystem die Anwendung besonderer, nach der Natur der untersuchten Gebilde wechselnder Constructionen völlig entbehrlich macht. Darum kann nun auch hier die Untersuchung in völlig abstracter Weise geführt werden. Weil die Hülfsconstructionen bei der Untersuchung entbehrlich sind, so werden schliesslich die geometrischen Objecte selber entbehrlich. An ihre Stelle treten die Gleichungen, an die Stelle der Hülfsconstructionen die passenden Transformationen der Gleichungen. Den Vortheilen, welche diese

Verwerthung der analytischen Hülfsmittel bietet, stehen die geringe Anschaulichkeit der Resultate und nicht selten, wegen des Verzichts auf Constructionen die den besonderen Erfordernissen des Falles entsprechen, die Schwerfälligkeit der Rechnung als Nachtheile gegenüber. Diese sind es denn auch, die in der neueren Zeit eine zur weiteren Form der Verwerthung algebraischer Methoden geführt haben, die wir als die Methode der geometrischen Analysis bezeichnen wollen.

### b. Die geometrische Analysis.

Die geometrische Analysis, die einen wesentlichen Bestandtheil der synthetischen Geometrie bildet, sucht, wie ihr Name andeutet, die Stellung umzukehren, die Analysis und Geometrie in der analytischen Geometrie zu einander einnehmen. Während in dieser das analytische Verfahren vollständig die geometrische Anschauung beherrscht, sucht jene die Ausübung der algebraischen Methoden den specifischen Verhältnissen räumlicher Objecte anzupassen, ebenso wie in ihr die geometrischen Constructionsmethoden den concreten Objecten angepasst sind. Auf der innigen Verwebung naturgemässer Constructionen und algebraischer Betrachtungen beruht daher der eigenthümliche Charakter dieser Geometrie. Auch sie will der Verwerthung algebraischer Methoden keineswegs verlustig gehen; aber sie sucht diese Verwerthung fruchtbarer zu machen, indem sie an der algebraischen Symbolik diejenigen Veränderungen vornimmt, die den Eigenthümlichkeiten der Raumanschauung entsprechen. Die Berechtigung eines solchen Verfahrens ergibt sich daraus, dass die algebraische Symbolik in ihrer allgemein gebrauchten Form auf rein arithmetischem Boden ruht. Sowohl die algebraische wie die analytische Geometrie haben dieses Verhältniss unverändert gelassen, da bei beiden Formen noch immer der metrische Gesichtspunkt vorwaltet. Dies muss von selbst anders werden, wenn die Lagebeziehungen der geometrischen Objecte in den Vordergrund treten. Denn hier muss sogleich die Frage entstehen, ob nicht die arithmetischen Fundamentaloperationen, angewandt auf eine mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, nothwendig Aenderungen erfahren, sobald man nicht bloss auf die Grösse, sondern auch auf die Lage und Richtung des Ausgedehnten Rücksicht nimmt.

Da bei jeder Art geometrischer Untersuchung ausgedehnte Gebilde von verschiedener Form auf die Gerade zurückgeführt werden

können, so bietet sie sich auch bei der geometrischen Analyse als nächstes Object dar. Rein metrisch betrachtet sind zwei Gerade einander gleich, wenn sie gleich lang sind. Auf dieser Voraussetzung ruht daher sowohl die antike wie die analytische Geometrie, und so betrachtet unterscheidet sich die Gerade nicht von beliebigen andern durch Zahlen messbaren Objecten. Nehmen wir dagegen bei der Definition der Gleichheit auf die specifischen Eigenthümlichkeiten des Raumes Rücksicht, so werden wir gleich zwei Gerade nur dann nennen, wenn sie nicht nur gleiche Länge, sondern auch gleiche Lage und Richtung haben. Von gleicher Lage sind sie aber, wenn sie einander parallel sind (worin zugleich der Specialfall, dass die eine in der Verlängerung der andern liegt, eingeschlossen ist). Gleiche Richtung haben sie, wenn alle Punkte der einen von den entsprechenden Punkten der andern gleich weit entfernt sind, wenn also z. B. zwischen den Anfangspunkten $A$ und $A'$ der Geraden $AB$ und $A'B'$ die Distanz die gleiche ist wie zwischen den um eine je gleiche Strecke von ihnen entfernten Punkten $B$ und $B'$. Diese Definition der Gleichheit vorausgesetzt ergeben sich nun die Modificationen, welche die vier arithmetischen Elementaroperationen in ihrer Anwendung auf gerade Strecken erfahren müssen, mit logischer Nothwendigkeit. Bezeichnen wir nämlich in gewohnter Weise die Geraden durch ihre Anfangs- und Endpunkte, also durch $AB$, $BC$ die Strecken zwischen den Punkten $A$ und $B$, $B$ und $C$, so gelten für die Addition von Strecken gleicher Lage folgende Gesetze:

$$AB = -BA, \quad AB + BA = 0,$$
$$AB + BC = AC, \quad AB + BC + CA = 0.$$

Haben zwei Strecken $AB$ und $B'C$ irgend eine andere Lage, so lässt sich die zweite $B'C$ ohne Aenderung der Gleichheit sich selbst parallel verschieben, bis $B'$ mit $B$ zusammenfällt, und es ist dann

$$AB + BC = AC \text{ und } AB - BC = CA = -AC,$$

d. h. sowohl die Summe wie die Differenz zweier Geraden, die einen Winkel mit einander bilden, wird durch eine dritte Gerade dargestellt, welche beide zu einem Dreieck ergänzt; diese dritte Gerade erhält aber im zweiten Fall eine entgegengesetzte Richtung.

Eine Multiplication und Division von Geraden werden nun dann entstehen, wenn Strecken in ihrem Verhältnisse zu einander betrachtet werden, wobei unter diesem Verhältniss wiederum nicht bloss das der Länge, sondern auch das der Lage und Richtung zu

verstehen ist. Sind z. B. vier Strecken $a$, $b$, $c$, $d$ so zu einander gelagert und gerichtet, dass die Proportion besteht

$$a : b = c : d,$$

so wird, wenn man $d$ zur Einheit nimmt, $a = b \,.\, c$, oder, wenn man $c = 1$ setzt, $a = \frac{b}{d}$. Dort wird also die Strecke $a$ gleich dem Product, hier gleich dem Quotienten zweier anderen. Diese Multiplication und Division ist der von Descartes angewandten durchaus ähnlich: hier wie dort wird auf eine Proportion zwischen Strecken zurückgegangen, von denen eine der Einheit gleich gesetzt ist. In beiden Fällen lässt sich daher durch zwei ähnliche Dreiecke der Gleichung Genüge leisten. Aber während es bei Descartes nur auf die Länge der Strecken ankam, bezieht sich hier die Proportion zugleich auf die Richtung und Lage derselben, und es vermehren sich auf diese Weise, entsprechend der mit dem Begriff der Gleichheit vorgenommenen Veränderung, die Elemente, die den Begriff der Aehnlichkeit zusammensetzen.

Der Gesichtspunkt der geometrischen Analyse, der diesen Betrachtungen zu Grunde liegt, gestattet es jedoch nicht, bei der Geraden stehen zu bleiben, sondern er fordert die Anwendung auf das letzte Element aller Raumconstructionen, auf den Punkt. Lässt dieser für eine rein metrische Betrachtung keine weitere Bestimmung zu, so ist dagegen eine Bestimmung der Lage desselben immer möglich. Da sich auf Lagebeziehungen von Punkten schliesslich alle andern geometrischen Verhältnisse zurückführen lassen, so muss dann von den in Bezug auf Punkte ausführbaren Operationen auch ein Uebergang zur Geraden, zur Ebene und zum dreifach ausgedehnten Raumgebilde zu gewinnen sein. Denken wir uns demgemäss, die für irgend zwei von einander entfernte Punkte gewählten Symbole $\alpha$ und $\beta$ bezeichneten gleichzeitig die Lage dieser Punkte, so wird ein genau in der Mitte zwischen $\alpha$ und $\beta$ gelegener Punkt $\gamma$ hinsichtlich seiner Lage in Bezug auf die ersteren bestimmt sein durch die Gleichung

$$\gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} \text{ oder } \alpha + \beta = 2\gamma.$$

Als die Summe zweier Punkte erscheint also deren doppelt genommener Mittelpunkt. Diese Relation wird auch für Verbände von Punkten, z. B. für $m$ Punkte $\alpha$ und für $n$ Punkte $\beta$ gelten, indem

$$m\alpha + n\beta = (m + n)\,\gamma$$

ist, eine Beziehung, in welcher der Mittelpunkt zweier Punktsysteme einem Schwerpunkt analog erscheint*). Von dem der Addition zu Grunde liegenden Princip aus lässt sich nun offenbar auch die Addition eines Punktes und einer geradlinigen Strecke vollziehen. Denken wir uns den Punkt $\beta$ von $\alpha$ um die Strecke $a$ entfernt, so wird sich $\beta$ als hervorgegangen aus einer Addition von $a$ zu $\alpha$ betrachten lassen:

$$\alpha + a = \beta \text{ oder } \alpha - \beta = a \text{ und } \beta - \alpha = - a.$$

Als Differenz zweier Punkte erscheint demnach in Bezug auf Grösse, Lage und Richtung die zwischen beiden gelegene geradlinige Strecke**). Die nämliche Strecke entspricht aber dem Product der beiden Endpunkte. Es ist also

$$\alpha\,.\,\beta = -\beta\,.\,\alpha = \beta - \alpha.$$

Man übersieht leicht, dass in Verfolgung dieses Satzes das Product dreier Punkte zu einem ebenen Gebilde wird, das nach Grösse und Lage dem doppelten Flächeninhalt des durch die drei Punkte gebildeten Dreiecks gleichkommt. In ähnlicher Weise wird das Product von vier Punkten ein dreifach ausgedehntes Raumgebilde, nämlich das durch die drei Punkte als Eckpunkte bestimmte Parallelepiped.

Es versteht sich von selbst, dass diese Betrachtungen noch erweitert werden können, wenn man an Stelle des Raumes den allgemeinen Begriff der Ausdehnung setzt, wie solches von Grassmann geschehen ist. Anderseits lassen sich die hier festgestellten Gesetze der Elementaroperationen ohne Rücksicht auf ihren geometrischen Ursprung als abstracte Zahlgesetze behandeln, wobei man dann den Begriff der betreffenden Zahlsysteme durch diese Gesetze selbst erst bestimmt sein lässt. So ersieht man unmittelbar, dass die oben besprochene geometrische Addition von Strecken vollkommen der Addition complexer Zahlen entspricht, und ähnlich lassen sich die übrigen Elementaroperationen aus der geometrischen Analyse auf das System der gewöhnlichen complexen Zahlen übertragen. Wenn aber die Multiplication incommutativ wird, so nehmen

---

*) Die erste fruchtbare Verwerthung dieses Gedankens hat Moebius gegeben in seinem Werke: Der barycentrische Calcül, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie, Leipzig 1827. (A. F. Moebius' Ges. Werke, I, S. 1—389.)

**) H. Grassmann, Die Ausdehnungslehre von 1844, 2. Aufl., S. 131 ff.

die Zahlen die Eigenschaften der Quaternionen an, die ebenfalls, unabhängig von ihrer geometrischen Bedeutung, als reine Zahlenbegriffe, definirt durch die Beziehungen der drei imaginären Einheiten, betrachtet werden können (S. 147). Es wiederholt sich darin nur eine Entwicklung, die schon dem gewöhnlichen Zahlbegriff zu Grunde liegt. Die Zahl in ihrer allgemeinen Bedeutung ist die letzte, abstracteste Form der mathematischen Auffassung. Wir abstrahiren bei ihr völlig von den realen Objecten und ihren Verhältnissen. Gerade der Fall der geometrischen Analyse zeigt aber deutlich, dass neue fruchtbringende Umgestaltungen des Zahlbegriffs stets gebunden sind an die wirkliche Anschauung. In dieser Beziehung treffen darum auch die complexen Zahlsysteme und die Methoden der geometrischen Analyse von entgegengesetzten Seiten her beim nämlichen Ziel zusammen. Dort findet es sich, dass Ergebnisse, zu denen man in der consequenten Verfolgung der arithmetischen Operationen gelangt, eine Bedeutung nur gewinnen können, wenn man den Begriff der Zahl in dem Sinne erweitert, dass sie nicht bloss die Grösse, sondern auch die Richtung und Lage der Objecte zu messen im Stande ist. Hier zeigt es sich, dass für die arithmetischen Operationen in ihrer Anwendung auf ausgedehnte Gebilde, d. h. auf Objecte von verschiedener Grösse, Richtung und Lage, Modificationen erforderlich werden, die sie selbst und damit auch die zu Grunde liegenden Zahlbegriffe verändern. Auf solche Weise begegnen sich beide Begriffserweiterungen, und dieses Zusammentreffen zeigt, dass es sich hier nicht um willkürliche Erfindungen, sondern um eine naturgemässe Entwicklung handelt, die sich aus den dem Zahlbegriff wie der geometrischen Anschauung immanenten Eigenschaften heraus vollzogen hat.

Viertes Capitel.

# Der Functionsbegriff und die Infinitesimalmethode.

## 1. Die analytischen Functionen.

### a. Die Entwicklung des Begriffs der Function.

Der Begriff der Function ist der älteren Mathematik unbekannt; in der neueren aber hat er eine immer umfassendere Bedeutung gewonnen: er ist der herrschende Begriff der Analysis und durch sie der ganzen Mathematik geworden. Aus der Erfindung der algebraischen Symbolik in naturgemässer Entwicklung hervorgegangen, hat er in der Anwendung der algebraischen Methoden auf die Geometrie seine nächste Quelle. Indem Descartes' Geometrie die Untersuchung der geometrischen Objecte auf die Massbeziehungen gerader Linien zurückführte, deren Zahl für die Ebene gleich zwei und für den Raum gleich drei ist, operirt sie mit dem Begriff der Function, wenn ihr auch dieser Name noch mangelt. In die Gleichung einer ebenen Curve gehen neben constanten Grössen die beiden bestimmenden Geraden $x$ und $y$ als veränderliche ein. Da aber jedem Werthe der einen Veränderlichen $x$ ein bestimmter Werth oder eine Anzahl bestimmter Werthe der andern Veränderlichen $y$ entspricht, so erscheint hier $y$ als Function von $x$. Der Begriff der Function hat also in dieser seiner nächsten Anwendung die Bedeutung, dass er die Abhängigkeit einer Grösse von einer andern oder von einer Mehrheit anderer Grössen bezeichnet, deren Veränderungen nach einem vorgezeichneten Gesetze erfolgen. Dieses Gesetz findet geometrisch in einer Curve, analytisch in der zugehörigen Gleichung seinen Ausdruck. Stets wird dabei die abhängig Veränderliche $y$ selbst als Function aufgefasst, und die unabhängig Veränderlichen $x$, $z$, bei deren Variation $y$ alle für dasselbe möglichen Werthe durchläuft, sind die Argumente dieser Function. Vermöge des beschränkten Gesichtskreises der Cartesianischen Geometrie kamen aber in ihr zunächst nur solche Gleichungen in Frage, in welchen alle Grössenverbindungen aus einer begrenzten Zahl und Reihenfolge der vier arithmetischen Fundamentaloperationen hervorgehen, und es war überdies stillschweigend vorausgesetzt, dass zwar jede beliebige andere Grösse, niemals aber ein Divisor gleich Null werden könne.

Auf diese Weise verengte sich der Begriff der Function zu demjenigen der algebraischen Function.

Erst Leibniz führte in die analytische Geometrie den Namen transcendente Curven ausdrücklich deshalb ein, weil die Probleme, die sich auf solche Curven beziehen, die Hülfsmittel der Algebra übersteigen, oder weil mit andern Worten die in den Gleichungen derselben darzustellenden Grössenbeziehungen nicht durch eine beschränkte Anzahl von Additionen, Multiplicationen, Subtractionen und Divisionen sich erledigen lassen*). Hat z. B. die Function die Form $y = a^x$, so gestattet dieser Ausdruck nur dann eine genaue Berechnung von $y$ durch eine beschränkte Zahl von Anwendungen der arithmetischen Elementaroperationen, wenn für $x$ ein bestimmter ganzer Zahlenwerth angenommen wird. Da dies aber bei der allgemeinen Form der Function nicht der Fall ist, sondern hier für $x$ jede beliebige gebrochene oder irrationale Zahl eintreten kann, so ist es klar, dass eine allgemeingültige Beziehung der beiden Veränderlichen $x$ und $y$ auf algebraischem Wege nicht herzustellen ist. Aehnlich verhält es sich mit den Functionen

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \operatorname{tang} x,\ y = \operatorname{cotang} x.$$

Bei der Function $y = \sin x$ nimmt $x$ von Null an stetig zu, indem es die Werthe $\frac{\pi}{2}$, $\pi$, $\frac{3\pi}{2}$, $3\pi$ u. s. w. durchläuft, während dessen wechselt aber $y$ periodisch und stetig zwischen $0, +1, 0, -1, 0$. Bei der Function $y = \operatorname{tang} x$ wechselt bei stetig wachsendem $x$ der Werth von $y$ zwischen $0, +\infty, 0, -\infty, 0$. Auch hier lässt sich die Beziehung zwischen $x$ und $y$ nicht in allgemeingültiger Weise durch eine begrenzte Zahl arithmetischer Operationen zum Ausdruck bringen. Nichts desto weniger entsprechen nicht nur allen diesen Gleichungen geometrische Gebilde von ebenso strenger Gesetzmässigkeit wie die algebraischen Curven, sondern es verändern sich auch die in Beziehung gesetzten Grössen, abgesehen von den speciellen Fällen, wo die Function unendlich wird, in gleicher Weise mit einander.

Es können nun aber ausserdem bei jeder derartigen Beziehung Eigenschaften der veränderlichen Grössen vorausgesetzt werden, vermöge deren eine Stetigkeit der Veränderung nicht mehr möglich ist, und also auch die geometrische Darstellbarkeit der Function mittelst

---

*) Leibniz, Mathematische Werke, herausg. von Gerhardt, V, S. 228.

einer zusammenhängenden Curve hinwegfällt. Dies geschieht, sobald man annimmt, dass die ursprünglich veränderlichen Grössen, die in irgend einem algebraischen oder transcendenten Ausdruck vorkommen, die Bedeutung ganzer Zahlen besitzen. Es werden sich dann offenbar die einzelnen Werthe von $y$, die in dem Ausdruck $y = f(x)$ den einzelnen Zahlwerthen von $x$ correspondiren, nicht mehr continuirlich, sondern sprungweise ändern. Der Begriff der Function gewinnt hier die Bedeutung eines Zahlengesetzes, und es kann daher der so verengte Begriff speciell als der zahlentheoretische Functionsbegriff bezeichnet werden. Hat dagegen die Unstetigkeit nicht in der Voraussetzung eines unstetigen Wachsthums der Veränderlichen, sondern in der Natur der Function selbst ihren Grund, indem plötzliche Sprünge für beliebig kleine Veränderungen des Arguments vorkommen, so ist an denjenigen Stellen, an welchen der Verlauf der Function durch solche Unstetigkeiten unterbrochen ist, eine nähere Untersuchung derselben unmöglich. Denn diese Untersuchung kann sich immer nur darauf beziehen, dass man zu einer gegebenen Veränderung des Argumentes die zugehörige Veränderung der Function nachweist; in demjenigen Intervall, in welchem der Verlauf der Function ein unstetiger, ist aber ein solcher Nachweis offenbar nicht möglich. Aus diesem Grunde ist die Stetigkeit der Veränderung ein nothwendiges Kriterium der analytischen Function. Zugleich ist es klar, dass der allgemeine Begriff der letzteren auch den zahlentheoretischen Begriff der Function, in welchem die Stetigkeit nicht vorausgesetzt wird, insofern in sich schliesst, als die Annahme, dass die Veränderlichen ganze Zahlen bedeuten sollen, eine willkürlich eingeführte Beschränkung ist. Die zahlentheoretische Function geht im allgemeinen in eine analytische Function über, welche statt des Zahlengesetzes eine Beziehung zwischen stetig veränderlichen Grössen darstellt, sobald man jene beschränkende Voraussetzung aufgibt und an die Stelle des engeren den allgemeineren Zahlbegriff treten lässt, welcher mit dem Begriff der stetigen Grösse zusammenfällt.

In logischer Beziehung lässt sich demnach der Begriff der Function als diejenige Umgestaltung betrachten, welche der Begriff der logischen Abhängigkeit in der Anwendung auf den allgemeinen Grössenbegriff erfahren muss. Bei dem allgemeinen Verhältniss von Bedingung und Folge bleibt es dahingestellt, ob die Glieder desselben überhaupt sich begleitenden Veränderungen unterworfen sind, und ob solche, wenn sie erfolgen,

einen stetigen Charakter besitzen. Wo die logische Symbolik das Functionszeichen anwendet, da gibt sie daher ihrerseits demselben eine erweiterte Bedeutung. Die algebraische Symbolik dagegen, welche unter ihren Zahlsymbolen gerade dann, wenn sie ihnen die allgemeinste Bedeutung gibt, continuirliche Grössen denkt, muss in die Abhängigkeitsbeziehung einerseits den Begriff der Veränderung und anderseits den der Stetigkeit aufnehmen. Denn die Abhängigkeit zweier Zahlen kann überhaupt nur darin bestehen, dass die Veränderungen der einen von den Veränderungen der andern bedingt sind, und eine feste Beziehung zwischen diesen Veränderungen lässt sich nur dann erkennen, wenn im allgemeinen (von einzelnen Unstetigkeiten abgesehen) der stetigen Veränderung der ursprünglich veränderlichen Grösse eine stetige Veränderung der abhängig veränderlichen entspricht. Wenn daher Johann Bernoulli, der Urheber des Ausdrucks „Function", dieselbe allgemein als eine Abhängigkeit zwischen Grössen definirte, so war dieser Begriff zu weit und unbestimmt*). Denn es fehlte darin jenes Merkmal der Stetigkeit, durch welches der mathematische Begriff der Function sich scheidet von dem allgemeineren der logischen Folge. Wir nennen aber eine Grösse $x$ stetig veränderlich, wenn sie bei der Zunahme um einen Werth $+\delta$ sowie bei der Abnahme um einen Werth $-\delta$ stets Werthe durchläuft, die zwischen $x$ und $x+\delta$ und zwischen $x$ und $x-\delta$ in der Mitte liegen, auch wenn man $\delta$ so klein wählt als man will. (Vgl. oben S. 142 f.) Demgemäss werden wir eine Function $y = f(x)$ dann eine stetige nennen, wenn nicht nur für jede der Grössen $x$ und $y$ an und für sich die obige Bedingung zutrifft, sondern wenn sich ausserdem die abhängige Variable $y$ nur dann um ein messbares Intervall verändert, wenn sich auch $x$ um ein messbares Intervall verändert, während für jede Veränderung von $x$, die kleiner ist als irgend eine messbare Zahl $\delta$, die beliebig klein gewählt werden mag, auch $y$ keine Veränderung erfährt, die irgend einer messbaren Zahl gleichkommt. Diese Definition der Stetigkeit einer Function führt unmittelbar zu den Grundbegriffen der Differentialrechnung, bei deren Erörterung wir daher den Begriff der stetig veränderlichen Grösse nach seinen verschiedenen Richtungen weiter verfolgen werden**).

---

*) Joh. Bernoulli, Opera omnia, t. II, p. 241.

**) Als äusseres Kriterium der Stetigkeit einer Function betrachtet man in der That im allgemeinen ihre Differenzirbarkeit. Doch hat Weierstrass gezeigt, dass gewisse zusammengesetzte Sinus- und Cosinusfunctionen zwar

Während so der Begriff der Function durch die Bedingung der Stetigkeit enger begrenzt wird, erfährt er dagegen in Folge der Anwendungen auf complexe Grössen und die damit verbundene Unterscheidung ein- und vieldeutiger Functionen eine bemerkenswerthe Erweiterung. In der Gleichung $y = f(x)$ kann jedem einzelnen Werthe des Argumentes $x$ ein einzelner oder eine fest bestimmte Anzahl einzelner Werthe von $y$ entsprechen: dann nennt man die Function eine eindeutige. In dieser Weise eindeutig sind stets die Functionen reeller Grössen. Eine algebraische Gleichung $n$ten Grades liefert zwar zu jedem Werthe von $x$ $n$ Werthe von $y$, aber diese bezeichnen hier $n$ von einander isolirte Punkte, welche zusammengehörigen Werthen von $x$ und $y$ entsprechen, und die Function selbst bleibt immer durch eine einzige Curve darstellbar. Mehrdeutig dagegen kann eine Function nur dann genannt werden, wenn dem Ausdruck $y = f(x)$ innerhalb gewisser Grenzen ein ganz verschiedener Verlauf der zu einer continuirlichen Aenderung von $x$ gehörigen Werthe von $y$ entspricht, wenn also jene Gleichung durch zwei oder mehr aus einander fallende Curven dargestellt werden kann. Dieser Fall tritt nun im allgemeinen dann ein, wenn die Argumente der Function complexe Zahlen sind. Eine reelle Variable $x$ findet, wie wir sahen, ihre Darstellung in einer geraden Linie. Zwischen zwei von einander entfernten Punkten $a$ und $b$ einer Geraden liegt aber immer nur eine Reihe stetig auf einander folgender Punkte. Wenn $a$ und $b$ gegeben sind, so ist darum auch der ganze Verlauf der Linie $x$ gegeben, und in der Gleichung $y = f(x)$ sind die Werthe von $y$ den correspondirenden Werthen von $x$ eindeutig zugeordnet. Hat dagegen die Function die Form

$$z = f(x + i\,y),$$

so entspricht zwar hier ebenfalls jeder einzelne Werth des complexen Argumentes einem Punkt in der Ebene: die Gesammtheit der stetig auf einander folgenden Punkte, welche das Wachsthum des Argumentes versinnlichen, braucht aber nicht in einer Geraden zu liegen, sondern da jeder Punkt durch die zwei zu einander senkrechten Geraden $x$ und $y$ als Coordinaten bestimmt ist, so kann das Wachsthum des Argumentes einer beliebig veränderlichen Curve oder einer aus geraden und gekrümmten Theilen zusammengesetzten Linie entsprechen. Zwischen zwei bestimmten Werthen $a$ und $b$ eines com-

---

stetig, aber nicht differenzirbar sind. Vgl. P. du Bois Reymond, Crelles Journ. f. Math., Bd. 29, S. 21.

plexen Argumentes sind demnach auch unendlich viele Uebergänge möglich, und jedem dieser Uebergänge wird im allgemeinen ein anderer Verlauf der Function $z$ zugehören. Sind $a$ und $b$ als Anfangs- und Endpunkt der Function gegeben, so werden dieselben Verzweigungspunkte darstellen, zwischen denen der Uebergang durch eine unendliche Schaar stetiger oder gebrochener Linien vermittelt werden kann. Geometrisch lässt daher das Verhältniss der Functionen mit complexen zu solchen mit reellen Argumenten auch so sich auffassen, dass an die Stelle der Geraden, welche hier stets das bestimmende Grundelement ist, dort eine veränderliche Linie tritt, dass also das geradlinige durch ein anderes Coordinatensystem ersetzt wird. Das letzte Element, von dem man irgend ein krummliniges Coordinatensystem abhängig denkt, muss freilich auch hier die Gerade bleiben, da jede Richtung und Richtungsänderung immer wieder durch die Rückbeziehung auf gerade Linien von gegebener Richtung bestimmt werden muss. In der That hat ja jeder einzelne der beiden Theile $x$ und $iy$, aus denen ein complexes Argument besteht, die Bedeutung einer stetig veränderlichen Geraden. In dieser Beziehung sind also die Functionen complexer Variabeln im eigentlichsten Sinne Functionen höherer Ordnung. Sie setzen eine Functionsbeziehung zwischen den Theilen ihrer complexen Argumente voraus. Aber indem der allgemeine Ausdruck einer Function complexer Variabler jene Beziehung zunächst unbestimmt lässt, entspricht jedem einzelnen Werthe von $x$ eine unendliche Menge von Werthen $iy$; auch die Function $z = f(x + iy)$ hat daher zu ihrem geometrischen Bilde nicht eine Curve, sondern eine Fläche, welche von der Ebene, auf der sich der Punkt $x + iy$ bewegt, abhängig ist, und es kommt nun auf besondere Bedingungen an, ob zwischen gewissen Grenzen zu jedem Werthe von $x$ auch nur ein Werth von $iy$ gehört oder nicht. Ist ersteres der Fall, so wird die Function eindeutig, und es entspricht ihr nur noch eine einzige unter der unendlichen Zahl von Curven, die in der Fläche der mehrdeutigen Function zwischen deren Grenzwerthen $a$ und $b$ möglich sind.

Die mathematischen Umgestaltungen des Zahlbegriffs haben hiernach einerseits eine Verengerung, anderseits eine Erweiterung des Begriffs der Function herbeigeführt: die erstere, insofern der allgemeinste Begriff der Zahl durch die in ihn aufgenommene Stetigkeit diese auch auf die Function übertragen liess; die leztere, insofern der Begriff der complexen Zahl zur Function zwischen complexen Grössen und damit zur vieldeutigen Function führte. Wenn

diese auch immer erst durch die Umwandlung in eine eindeutige Form mathematisch fruchtbar wird, so muss sie gleichwohl als eine logisch nothwendige Entwicklung des Functionsbegriffs anerkannt werden. Dem gegenüber ist nun eine fernere Erweiterung dieses Begriffs zunächst aus physikalischen Anwendungen hervorgegangen. Während die rein mathematische Aufstellung einer Function stets voraussetzt, dass durch die beschränkte oder unbeschränkte Anwendung der algebraischen Operationen gewisse Grössenbeziehungen entstehen, welche sich in einer Gleichung ausdrücken lassen, können in andern Fällen solche Beziehungen auch rein empirisch gegeben sein oder vollkommen willkürlich von uns vorausgesetzt werden. Wenn man z. B. die Temperaturen misst, die ein prismatischer oder cylindrischer Stab in verschiedenen Theilen seiner Länge besitzt, so wird man zwei Reihen correspondirender Zahlen erhalten, von denen die einen die Längen des Stabs von einem willkürlich angenommenen Nullpunkte an, die anderen die zugehörigen Temperaturen angeben. Mittelst beider Zahlenreihen lässt sich eine Curve construiren, die im allgemeinen einen stetigen Verlauf haben wird, da alle Temperaturunterschiede allmählich sich auszugleichen streben. Ueber die sonstige Beschaffenheit dieser Curve lässt sich aber a priori gar nichts aussagen, wenn, wie wir voraussetzen, die Bedingungen, denen der Stab unterworfen ist, unbekannt sind. Nichts desto weniger kann die Temperaturhöhe $y$ als Function der Länge $x$ des Stabes angesehen werden, und es ist daher eine Gleichung $y = f(x)$ denkbar, welche die Temperaturvertheilung in mathematischer Form darstellt. Die empirische Beobachtung gibt vielfache Gelegenheit zur Aufstellung solcher Functionsbeziehungen, die sich von den auf mathematischem Wege gewonnenen Functionen offenbar dadurch unterscheiden, dass die Curve, welche den Gang der Function darstellt, nicht aus bestimmten algebraischen Operationen abgeleitet, sondern direct durch Construction der einander entsprechenden Werthe der Variabeln gewonnen wird. Nun steht es der Mathematik frei, beliebige willkürlich angenommene Zahlenreihen in ähnliche Beziehungen zu einander zu bringen, wie sie hier durch die empirische Beobachtung dargeboten werden. Vom mathematischen Standpunkte aus ist zwischen diesen beiden Fällen kein Unterschied: jede Zuordnung stetig veränderlicher Grössen, welche nicht aus bestimmten Operationen hervorgegangen ist, erscheint um so mehr als eine willkürliche, da in der Regel auch bei den durch Beobachtung aufgefundenen Zahlenreihen eine unmittelbare logische oder causale Beziehung zwischen der Function

und ihrem Argumente nicht existirt. So sind z. B. die Entfernungen der Punkte eines Stabes von irgend einem Nullpunkte nicht die Ursachen der Temperaturvertheilung, sondern beide Veränderungen sind auch in physikalischem Sinne bloss coexistirende Thatsachen. Wenn man hier die eine Veränderung als Function der andern betrachtet, so beruht dies also auf einer willkürlichen Annahme. Demgemäss werden überhaupt derartige Functionen als willkürliche bezeichnet. Unter den mathematischen Functionen sind es die transscendenten, namentlich die trigonometrischen, welche in der Form von Reihenentwicklungen die Hülfsmittel zur Darstellung derselben abgeben. Natürlich aber hat ein solcher Functionsausdruck niemals über die Grenzen der Zahlenreihen hinaus Gültigkeit, für welche er speciell gefunden worden ist.

In logischer Beziehung bieten die willkürlichen Functionen, deren Aufstellung erst der neueren mathematischen Physik seit d'Alembert und Euler angehört*), ein mehrfaches Interesse dar. Zunächst sind sie es, durch welche der Functionsbegriff seine grösste Allgemeinheit erreicht, da es keinerlei Art der Abhängigkeit mehr gibt, mag dieselbe auch ganz beliebig von uns angenommen sein, welche sich nicht dem Begriff der Function unterordnen lässt und in dieser Form der mathematischen Behandlung zugänglich ist. Für die letztere gewinnt darum auch das scheinbar Gesetzloseste den Charakter des Gesetzmässigen; denn jede, selbst die irregulärste Beziehung lässt sich auf die Form einer willkürlichen Function zurückführen. Es findet darin der logische Trieb unseres Geistes, der für das Zufällige keinen Raum lässt, seinen vollendetsten Ausdruck. Denn hier wird nicht nur allem objectiven Geschehen, sondern auch jeder Beziehung verschiedener Reihen von Denkobjecten, die aus irgend einer willkürlichen Laune entstehen mag, der Charakter der Gesetzmässigkeit zugesprochen. Das Causalgesetz bleibt für viele Gebiete ein Postulat, das sich unserer sicheren Nachweisung entzieht; das mathematische Gesetz der Function beherrscht alle Grössenbeziehungen, weil seine Anwendung vollkommen in unserer Wahl steht.

Sodann aber hat sich in der willkürlichen Function der allgemeine Begriff der Function selbst von den besonderen, an sich zufälligen Eigenschaften losgelöst, die vermöge seiner mathematischen

*) Zur Geschichte derselben vgl. Riemann, Ges. mathematische Werke, S. 213 ff.

Entstehungsbedingungen ihm anhafteten. Die rein mathematische Function bleibt stets eine Beziehung zwischen Grössen, die aus den mit denselben vorgenommenen Operationen hervorgegangen ist. Diese erscheinen hier als die Bedingungen, welche zur Erzeugung der Function erforderlich sind und daher auch die Form derselben bestimmen. Bei der willkürlichen Function dagegen tritt die Function als der primäre Begriff auf. Zunächst wird hier die Abhängigkeit gewisser Reihen von Grössen von einander festgestellt, und dann erst sucht man die Frage zu beantworten, welche Operationen ausgeführt werden müssen, um diese Abhängigkeit mathematisch auszudrücken. Darum behält der Begriff der Function vollständig seine Bedeutung bei, wenn man zu jener zweiten Frage gar nicht übergeht, sondern sich etwa damit begnügt, die gegebene Abhängigkeit in der Form einer Curve zu construiren, oder in einem abstracten symbolischen Ausdruck, wie $y = f(x)$, darzustellen. Auf diese Weise hat erst die Behandlung der willkürlichen Functionen das Bewusstsein von der allgemeineren, den mathematischen Operationen nicht bloss gleichwerthigen, sondern übergeordneten Bedeutung des Begriffs der Function erweckt. Da es übrigens, sobald die Abhängigkeitsverhältnisse mathematischer Art sind, für den Ausdruck der Function keinen Unterschied macht, ob derselbe aus vorangegangenen Grössenoperationen hervorgegangen ist oder nicht, so besteht vom mathematischen Standpunkte aus zwischen den willkürlichen und den übrigen Functionen kein principieller Unterschied. Der Ausdruck einer willkürlichen Function muss stets ein solcher sein, dass man sich denken könnte, er sei aus einer Reihe von Grössenoperationen hervorgegangen, wie ja auch jede noch so willkürlich und unregelmässig gezogene Curve irgend einem complicirten Gesetze gehorcht. Der Unterschied bezieht sich also einzig und allein auf die Entstehungsweise des für die Darstellung der Function gewonnenen Ausdrucks. Bei den mathematischen Functionen geht dieser unmittelbar aus der Operationsverknüpfung der Elemente hervor, welche den gesetzmässigen Gang der gegebenen Curve bestimmen. Bei den willkürlichen Functionen wird für diese Curve ein Ausdruck von hinreichend allgemeiner Beschaffenheit gewählt, damit durch die Beibehaltung einer genügenden Anzahl von Gliedern und durch die Wahl geeigneter Werthe für die zunächst unbestimmt gelassenen Coëfficienten dieser Glieder der Ausdruck der gegebenen Curve conform wird. Im ersten Fall wird also der untersuchte Begriff direct bestimmt, im zweiten wird zuerst ein allgemeinerer Begriff aufgestellt, den man

dann auf den speciellen Fall anwendet. Die Nöthigung zu dem letzteren Verfahren wird naturgemäss dann eintreten, wenn die Function zu verwickelt ist, als dass sie durch Operationsverknüpfung ihrer Elemente sich finden liesse. Hier bietet die Mathematik die Möglichkeit dar, Functionsausdrücke anzuwenden, welche allgemein genug sind, dass sie alle möglichen Verhältnisse der Abhängigkeit umfassen, und welche doch vermöge der Bestimmtheit, die jedem einzelnen in sie eingehenden Grössenbegriff zukommt, die speciellste Determination gestatten. Auch hierin bewährt es sich wiederum, dass die Function der allgemeinere Begriff ist, welcher die einzelnen Grössenoperationen als die speciellen Beziehungen, aus denen die besonderen Formen mathematischer Functionen hervorgehen, einschliesst.

Der Erkenntniss dieser Bedeutung entspricht der zunehmende Gebrauch der allgemeinen Functionssymbole in der neueren Mathematik. Nicht nur in solchen Fällen, wo die specielle Form der Function noch unbekannt ist oder unbestimmt bleiben soll, wendet man dieselben an, sondern nicht selten auch bedient man sich ihrer der Kürze halber, indem man durch die Wahl verschiedener Functionszeichen, wie $F$, $f$, $f_1$, $\varphi$, $\psi$, die in einem gegebenen Zusammenhang vorkommenden Functionsformen trennt. Hieran schliesst sich dann unmittelbar der Gebrauch stehender Zeichen für gewisse in der höheren Mathematik öfter vorkommende Functionsformen. Diese Anwendung der Functionssymbole gestattet es ausserdem leicht, die Wahl der abhängig Variabeln und des Argumentes unbestimmt zu lassen, indem man statt der Beziehungen $y = f(x)$, $y = f(x, z \ldots)$ die Gleichungen

$$f(x, y) = 0, \; f(x, y, z \ldots) = 0$$

aufstellt. Diese impliciten Functionen repräsentiren den Begriff der Function in der allgemeinsten Form, die für ihn möglich ist, insofern sie lediglich angeben, dass eine Abhängigkeit zwischen gewissen Variabeln besteht. Der Uebergang zu der expliciten Function oder zu der Voraussetzung, dass irgend welche Variabeln als die ursprünglich Veränderlichen angesehen werden, von denen dann die andern abhängen, erscheint auf diese Weise schon als eine Specialisirung dieses allgemeinsten Begriffs.

### b. Die Hauptformen der analytischen Functionen.

Der Begriff der analytischen Function ist aus den algebraischen Operationen hervorgegangen. Die algebraische Gleichung, als Aus-

druck einer Relation zwischen gegebenen völlig bestimmten Grössen, verwandelte sich in einen Functionsausdruck, sobald zwei oder mehrere dieser Grössen veränderlich angenommen wurden. Der Gesichtspunkt, den Descartes für die Untersuchung der Gleichungen einführte, ihre Zerlegung in einfache lineare Factoren und die Reconstruction der höheren Gleichungen durch Multiplication dieser Factoren, ist daher auch für die Auffassung der Functionen bestimmend geworden. (Vgl. S. 161 f.) Jede noch so verwickelte Function lässt sich als hervorgegangen aus der Verbindung linearer Functionen betrachten, die in begrenzter oder in unbegrenzter Anzahl zusammentreten. Die allgemeine Form, auf welche alle Gleichungen zurückgeführt werden können, wird daher zur allgemeinen Grundform der analytischen Functionen, sobald man mindestens zwei von einander abhängige Variabeln in sie einführt. Auf diese Weise ist die Form

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots Px^{n-1} + Qx^n + \ldots$$

die Grundform einer entwickelten Function mit einem Argumente. Diese Reihe kann je nach der Beschaffenheit der Function entweder bei einem bestimmten Gliede abbrechen, oder sie kann ohne Ende fortschreiten, in welchem Fall aber ihr Werth nur dann sich bestimmen lässt, wenn die Glieder immer kleiner werden und sich schliesslich der Null nähern. Während nun die Algebra von der einfachsten Form jener Function ausging und auf sie allmählich die verwickelteren zurückführte, wobei sie jedoch stets an der Voraussetzung einer begrenzten Zahl von Gliedern festhielt, legt umgekehrt die Analysis sofort jene allgemeinste Form, die sie ausserdem als nicht nothwendig begrenzt voraussetzt, ihren Untersuchungen zu Grunde, um durch Einführung specieller Bedingungen aus ihr die einzelnen Hauptformen analytischer Functionen abzuleiten. Diese ihre erste Voraussetzung entnimmt somit die Analysis der Algebra. Sie fügt nur noch die weitere Annahme hinzu, dass sich die angegebene Reihe zur Darstellung jeder beliebigen Function eigne, sobald man eine unbegrenzte Zahl von Gliedern zulasse. Diese Annahme stützt sich auf die Erwägung, dass eine algebraische Gleichung nur deshalb ein geschlossener Ausdruck ist, weil sie aus einer begrenzten Anwendung der arithmetischen Fundamentaloperationen hervorging, dass aber anderseits keine irgendwie beschaffene Function denkbar ist, welche nicht durch eine successive Anwendung jener vier Operationen entstehen könnte. Wenn es demnach Functionen

gibt, welche nicht in der geschlossenen Form einer algebraischen Gleichung ausgedrückt werden können, so kann dies nur darin seinen Grund haben, dass die Zahl der Operationen, die zur Bildung jener Functionen geführt haben, keine bestimmt begrenzte gewesen ist. Denkt man sich nun die Operationen, aus denen eine algebraische Gleichung beliebigen Grades hervorgeht, ins Unbegrenzte fortgesetzt, so entsteht jene Grundform der Analysis, welche dann als speciellen Fall auch jede algebraische Gleichung in sich enthält.

Die Möglichkeit der Anwendung der angegebenen Grundform auf alle einzelnen Functionen beruht zunächst auf der Unbestimmtheit der Coëfficienten $A$, $B$, $C$ . . . Die Umwandlung der allgemeinen Form in eine besondere Functionsform geschieht daher stets auf solche Weise, dass aus den für die Function geltenden Voraussetzungen Specialgleichungen entwickelt werden, aus denen die Coëfficienten $A$, $B$, $C$ . . . gefunden werden können. Auf das in dieser Methode der unbestimmten Coëfficienten zur höchsten Ausbildung gelangte logische Fundamentalprincip der Analysis, dass ein gegebenes Problem zum Zweck seiner Lösung als bereits gelöst vorausgesetzt wird, wurde schon hingewiesen (S. 165). Die Anwendbarkeit desselben im vorliegenden Fall beruht aber darauf, dass in jener Reihe wirklich der oberste Begriff einer analytischen Function enthalten ist, der demnach auch durch geeignete Determinationen in jeden unter ihm enthaltenen besonderen Functionsbegriff übergeführt werden kann. Die Herstellung der Grundform liefert überdies ein einfaches Kriterium für die Entscheidung der Frage, ob zwei gegebene Functionen mit einer gleichen Anzahl von Veränderlichen einander gleich sind oder nicht. Dieses Kriterium besteht in der Identität der Coëfficienten, welche einander entsprechenden Gliedern der beiden Reihen zugehören. Zugleich liegt hierin ein neuer Fall vor, in welchem der allgemeine arithmetische Begriff der Gleichheit durch die Bedingungen, unter denen er Anwendung findet, näher determinirt wird. Wie früher die Geometrie durch die Herbeiziehung des Begriffs der Lage, so sehen wir hier die Analysis durch die Eigenschaften des Functionsbegriffs zu einer solchen Umgestaltung der ursprünglich bloss auf das numerische Mass gegründeten arithmetischen Gleichheit gelangen. Alle diese Umgestaltungen sind einig in der Tendenz, den für viele Zwecke allzu unbestimmten Begriff der numerischen Gleichheit in denjenigen der logischen Identität überzuführen. Bei ihrem ursprünglichen Gleichheitsbegriff musste die Arithmetik von allen denjenigen Momenten der Identität abstrahiren,

welche einer unmittelbaren messenden Vergleichung getrennter Gebilde im Wege stehen. Bei der weiteren Ausbildung ihrer Methoden wird sie ebenso unvermeidlich zu einer immer umfassenderen Berücksichtigung der Eigenthümlichkeiten der verglichenen Gebilde und auf diese Weise zu einer Wiederannäherung an die logische Identität getrieben.

Die Entwicklung der Hauptformen, in die der Functionsbegriff zerfällt, lässt sich nunmehr unmittelbar an die Betrachtungen anschliessen, welche zur Aufstellung der analytischen Grundform geführt haben. Ist diese aus einer zunächst unbeschränkt gedachten Anwendung der vier arithmetischen Operationen hervorgegangen, so werden sich die einzelnen Hauptformen gewinnen lassen, wenn man für die Anwendung der Operationen besondere Bedingungen einführt. Solche können sich beziehen: 1) auf die Anzahl der Operationen, 2) auf die Anzahl ihrer Anwendungen, und 3) auf die Reihenfolge der letzteren. Die Einführung dieser Bedingungen zeigt, dass die so entstehenden Hauptformen der Functionen continuirlich mit einander zusammenhängen, insofern die Operationen, aus deren Hinzunahme eine neue Form entspringt, bei einer vorangegangenen immer bereits vorbereitet sind.

Die Einführung der ersten unter den drei genannten Bedingungen lässt zunächst verschiedene Formen algebraischer Functionen entstehen. Da alle Functionen, welche einer begrenzten Anwendung der vier arithmetischen Operationen entsprechen, algebraische genannt werden, so kann eine weitere Eintheilung derselben nur darauf beruhen, ob jene vier Operationen sämmtlich bei der Bildung der Function mitgewirkt haben oder nicht. Logisch würden sich demgemäss unterscheiden lassen Functionen, die aus blossen Additionen, solche, die aus Additionen und Subtractionen entstanden sind, andere, bei denen die Multiplication mitgewirkt hat, und endlich diejenigen, bei denen auch noch die Division herbeigezogen wird. Nur der letztere Fall begründet aber wesentliche Unterschiede in der Beschaffenheit der Functionen. Aus ihr entspringt die wichtige Eintheilung in ganze und in gebrochene algebraische Functionen.

Die ganzen Functionen bestehen immer aus einer begrenzten Anzahl von Gliedern; denn die entwickelte Function mit einer Variabeln lässt sich stets entstanden denken aus der Multiplication einer beschränkten Anzahl von Factoren von der Form $(x \pm \alpha) \cdot (x \pm \beta) \cdot (x \pm \gamma) \ldots$, wobei einzelne Grössen null, nie-

mals aber Brüche sein können. Die Zahl dieser Factoren und der Glieder, welche in der aus ihnen gewonnenen geschlossenen Grundform

$$y = A + Bx + Cx^2 + \ldots Qx^n$$

stehen bleiben, bestimmt den Grad der Function. Bleibt bloss das erste Glied, so ist die Function nullten Grades; die weiteren Grade entsprechen den Potenzen der Veränderlichen $x$. Vermöge ihrer Entstehungsweise kann eine gegebene ganze Function im allgemeinen auf algebraischem Wege auch wieder in ihre Theile, in Factoren des ersten Grades, zerlegt werden; nur bedarf es zu diesem Zweck stets der Hinzuziehung der vierten Operation, der Division. Auch gibt es einen Specialfall, wo diese Zerlegung innerhalb der realen Einheiten nicht möglich ist. Er ergibt sich überall da, wo eine Summe von Potenzen von der Form $a^2 + b^2$ in die Function eingeht. Diese Summe kann nur in die complexen linearen Factoren $(a + bi) \, . \, (a - bi)$ zerlegt werden. Auf diese Weise führt schon die ganze Function auf den Begriff der complexen Grösse, durch den sie, wie wir unten sehen werden, im Zusammenhang steht mit den transcendenten Functionen.

Wenn ausser den drei ersten arithmetischen Operationen auch noch die Division bei der Bildung einer algebraischen Function mitwirkt, so gewinnt diese die Beschaffenheit einer gebrochenen Function. Denkt man sich die letztere, ähnlich wie die ganze Function, aus linearen Factoren hervorgegangen, so wird man eine Anzahl von Factoren $(x \pm \alpha) \, . \, (x \pm \beta) \, . \, (x \pm \gamma) \ldots$ erhalten, die den Zähler, und eine andere Anzahl von Factoren $(x \pm \alpha') \, . \, (x \pm \beta') \, .$ $(x \pm \gamma') \ldots$, die den Nenner der gebrochenen Function bilden. Jede gebrochene Function $y = F(x)$ lässt sich daher als Quotient zweier ganzer Functionen $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ betrachten, der entweder, wenn die Division ohne Rest aufgeht, auf eine einzige ganze Function $\psi(x)$ zurückführt oder, im entgegengesetzten Fall, neben der Function $\psi(x)$ einen Rest $r$ zurücklässt, der die Form einer niedrigeren Function von $x$ hat, welche abermals durch den Nenner $\varphi(x)$ getheilt werden muss. Mittelst der Einführung negativer Potenzen von $x$ lässt sich nun der so gewonnene echte Bruch $\frac{r(x)}{\varphi(x)}$ in eine neue ganze Function und in einen Rest zerlegen. Auf diese Weise erhält man schliesslich eine Reihe von der Form

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \psi(x) + \psi_1(x) + \psi_2(x) + \ldots,$$

welche ins unendliche fortschreitet, deren Glieder aber kleiner und kleiner werden. Somit lässt sich auch eine gebrochene Function mittelst der Einführung unbestimmter Coëfficienten stets auf die allgemeine analytische Grundform, eine Reihe mit steigenden Potenzen der Variabeln, zurückführen; die Zahl der Glieder einer solchen Reihe wird aber in diesem Falle, sobald die ursprüngliche Function selbst einen echten Bruch darstellt oder in eine ganze Function und in einen echten Bruch zerlegt werden kann, unbegrenzt. Hierdurch überschreiten die gebrochenen Functionen das Gebiet der Algebra, auf welchem sie entstanden sind. Hervorgegangen aus einer begrenzten Anzahl von Anwendungen der vier arithmetischen Operationen, sind sie dem Begriff der algebraischen Function unterzuordnen. Aber sobald es sich darum handelt, ihren Werth durch Summation der Reihe, in welche sie entwickelt worden sind, zu bestimmen, so übersteigt dies die Hülfsmittel der algebraischen Operationen, da die Glieder jener Reihe an Zahl unbeschränkt sind. Nur unter der Voraussetzung, dass schon eine begrenzte Anzahl von Gliedern eine zureichende Werthbestimmung gestattet, reichen hier die algebraischen Methoden noch aus.

Wie auf diese Weise der Begriff der ganzen Function zu dem der gebrochenen führt, sobald man annimmt, dass die bei der Zerlegung einer ganzen Function erforderlichen Operationen sämmtlich auch bei der Bildung einer Function verwendet werden, so vermittelt nun eine ähnliche, an den Begriff der gebrochenen Function sich anschliessende Umkehrung den Uebergang von dieser zu den transcendenten Functionen. Die Zerlegung einer gebrochenen Function lässt sich nämlich nicht mehr in allgemeingültiger Weise auf algebraischem Wege vornehmen, weil diese Zerlegung eine unbegrenzte Anzahl in bestimmter Reihenfolge auszuführender arithmetischer Operationen erfordern würde. Sobald man aber voraussetzt, dass auf eben diesem Wege einer unbegrenzten Anzahl von Operationen eine Function entstehe, so gewinnt man damit den Begriff der transcendenten Function. Wir kommen damit auf den zweiten der oben für die Eintheilung der Functionen geltend gemachten Gesichtspunkte: auf die Anzahl der Anwendungen, welche die arithmetischen Operationen erfahren müssen, um eine Function hervorzubringen. Den Fall, wo diese Anzahl eine be-

schränkte ist, bilden die algebraischen, den Fall, wo sie eine unbeschränkte wird, die transcendenten Functionen.

Die einfachste Form, die hier möglich ist, lehnt sich an die einfachste Form einer algebraischen Function an. Diese letztere ist in Bezug auf zwei Variabeln gegeben in einer Gleichung

$$y = x^a,$$

in welcher das Argument $x$ alle möglichen rationalen und irrationalen Werthe durchlaufen kann, der Exponent $a$ aber constant ist und zwar eine rationale positive Zahl bedeutet. Kehrt man nun auf der rechten Seite dieser Gleichung das Verhältniss der Variabeln und Constanten um, indem man den Exponenten zum Argument der Function nimmt, so entsteht die Exponentialfunction

$$y = a^x.$$

Es ist klar, dass hier der genaue Werth von $y$ im allgemeinen nicht mehr durch eine begrenzte Anzahl von Operationen gewonnen werden kann. Denn sobald $x$ bei seiner Veränderung irrationale Werthe durchläuft, so können solche zunächst mit beliebiger Annäherung durch einen unechten Bruch dargestellt werden, der, wenn die Division wirklich ausgeführt wird, in eine rationale Zahl und eine unbegrenzte Reihe echter Brüche, die sich immer mehr der Null nähern, zerfällt. Die Bildung der Function führt also hier auf eine ähnliche unendliche Reihe, wie sie bei der Zerlegung einer gebrochenen Function sich ergibt. Demnach kann auch die Function $a^x$ auf die analytische Grundform $A + Bx + Cx^2 + \ldots$ zurückgeführt werden, wenn die Anzahl der Glieder derselben unbegrenzt angenommen wird.

Die wesentlichen Eigenschaften der Exponentialfunction, die sich unmittelbar aus dem Wesen der Multiplication ergeben, sind ausgedrückt in den zwei für alle Fälle, in denen $a > 1$ ist, gültigen Gleichungen:

$$a^x \,.\, a^{x_1} = a^{x + x_1} \text{ und } \frac{a^x}{a^{x_1}} = a^{x - x_1}.$$

Diese Eigenschaften liefern die Bedingungen, durch welche die allgemeine Grundform der analytischen Functionen in einen Ausdruck für die Exponentialfunction übergeht. Sie bestehen darin, dass der erste der unbestimmten Coëfficienten $= 1$ und die übrigen den Potenzen der Veränderlichen conform werden. Man gewinnt nämlich:

$$a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{1\,.\,2} + \frac{A^3x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{A^4x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots,$$

und für den Specialfall, dass die Constante $A = 1$ wird,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots,$$

welche Reihe schliesslich für $x = 1$ den Werth von $e = 2{,}71828\ldots$ ergibt. Der analytische Werth der Exponentialfunction beruht auf den in der Beschaffenheit dieser Reihen ausgedrückten Beziehungen der Veränderungen der Function zu den Veränderungen ihres Argumentes. In der Gleichung $y = a^x$ hat für jeden reellen positiven oder negativen Werth von $x$, unter der Voraussetzung dass $a$ grösser als die Einheit ist, die Function $y$ nur positive Werthe, sie ist für jedes negative $x$ kleiner als die Einheit, für jedes positive $x$ grösser als die Einheit und für $x = 0$ der Einheit gleich; dabei entspricht übrigens jeder stetigen Aenderung des Argumentes eine stetige Aenderung der Function. Diese bietet demnach die Möglichkeit, jedes beliebige System von Zahlen in ein positives Zahlensystem zu übertragen, wobei die Beziehung zwischen beiden Systemen nur abhängig ist von der Constanten $a$, welche darum die Basis der Exponentialfunction genannt wird.

Die Eigenschaft der Exponentialfunction, dass sie als die Repräsentantin eines neuen Zahlensystems angesehen werden kann, welches dem durch das Argument $x$ dargestellten ursprünglichen Zahlensystem eindeutig zugeordnet ist, enthält nun aber ausserdem die Möglichkeit zu einer weiteren wichtigen Anwendung. Es lässt sich nämlich diese Zuordnung umkehren, indem man $x$ als Function und $y$ als das zugehörige Argument auffasst: dann geht die Exponentialfunction in die logarithmische Function $x = \log y$ über. Vermöge der oben festgestellten Beziehungen entspricht hier jedem unter der Einheit liegenden Werthe der Zahl $x$ ein negativer Logarithmus, einem über der Einheit liegenden ein positiver, und der Logarithmus der Einheit ist die Null. Die oben gefundenen Gleichungen $a^x\,.\,a^{x_1} = a^{x+x_1}$ und $\frac{a^x}{a^{x_1}} = a^{x-x_1}$ ergeben aber die Beziehungen

$$\log(x\,.\,x_1) = \log x + \log x_1,\quad \log\left(\frac{x}{x_1}\right) = \log x - \log x_1,$$

$$\log(x^{x_1}) = x_1 \log x,$$

in welchen die grosse praktische Bedeutung der logarithmischen Function ausgesprochen ist, dass sie jede arithmetische Operation von der Multiplication an um eine Stufe zu erniedrigen gestattet. Theoretisch ist diese Umwandlung der Exponentialfunction in die logarithmische deshalb von Interesse, weil in ihr zum ersten Mal eine Umkehrbarkeit der Function auftritt, welche weiterhin bei allen höheren transcendenten Functionen sich wiederholt, und welche vollständig der Umkehrbarkeit der arithmetischen Operationen entspricht, die bei den algebraischen Functionen zur Anwendung kommt.

Die Entwicklung der Zahl $e$, der Basis der natürlichen Logarithmen, bietet zugleich ein bemerkenswerthes Beispiel für eine in der Analysis vielfach geübte Methode der Begriffsentwicklung. Durch successive Determination wurde $e$ erhalten, indem man in der für $a^x$ gewonnenen Reihe zuerst die Constante $A$ und dann auch die Veränderliche $x$ gleich der Einheit annahm. Gleichwohl lässt sich die so erhaltene Reihe $1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} \ldots$, welche die Zahl $e$ darstellt, ihrerseits als die arithmetische Grundform ansehen, welche in der Entwicklung einer Function von der Form $a^x$ schon vorausgesetzt ist. Denn unter einer Reihe von Zahlgesetzen von übereinstimmender Form ist dasjenige das einfachste und darum allgemeinste, dessen Factoren der Einheit gleich sind, da man sich die übrigen Formen durch successive Multiplication der Einheit mit anderen Zahlen kann entstanden denken. So bietet sich hier die Möglichkeit dar, eine und dieselbe analytische Form unter entgegengesetzten Gesichtspunkten zu betrachten. Der Grund dieses Verhältnisses liegt in der Eigenthümlichkeit der logischen Determination. An sich ist diese stets eine Operation, die eine Einschränkung des Begriffs ergibt. Aber der Begriff, welcher als Determinator gewählt wird, kann so beschaffen sein, dass er diese Einschränkung wieder aufhebt und in ihr Gegentheil verwandelt. In der That werden wir noch manche Fälle kennen lernen, in denen gerade die Analysis Begriffserweiterungen auf dem Wege der Determination zu Stande bringt. Der vorliegende ist aber dadurch ausgezeichnet, dass bei ihm die Auffassung wechseln kann, je nachdem man von dem analytischen oder dem arithmetischen Standpunkte ausgeht. Analytisch ist die Reihe $e$ ein Specialfall der Function $a^x$; arithmetisch aber ist $e$ die Grundform, welche bei jeder Function $a^x$ vorausgesetzt wird.

Die Bildung der Exponentialfunction beruht auf der Annahme, dass die zur Anwendung kommenden arithmetischen Operationen zwar an Zahl unbegrenzt seien, dass sie aber stets in einer und derselben Richtung fortschreiten. Diese letztere Bedingung findet in der Reihe $a^x = 1 + Ax + \frac{A^2 x^2}{1 \,.\, 2} + \ldots$ unmittelbar ihren Ausdruck, denn die Glieder dieser Reihe sind sämmtlich in der gleichen Weise additiv verbunden, und sie ändern sich successiv um $Ax$, $\frac{Ax}{2}$, $\frac{Ax}{3}$ u. s. w. Die Exponentialfunction lässt sich also durch successive Multiplication der Einheit mit diesen immer kleiner werdenden Factoren und durch Addition der so gebildeten Glieder entstanden denken. Nur unter der Bedingung einer solchen stetig in der nämlichen Richtung vollzogenen Bildung ist es auch möglich, dass Function und Argument durch ihre stetige Veränderung einander eindeutig zugeordnete Zahlensysteme erzeugen, die mit einander zu- und abnehmen. Es lässt sich nun aber die unbeschränkte Anwendung der arithmetischen Operationen noch in einer andern Weise vollzogen denken, so nämlich, dass der gleichförmigen Aenderung des Argumentes periodisch zu- und abnehmende Aenderungen der Function entsprechen. Solche Functionen werden im allgemeinen aus einer wechselnden Anwendung der arithmetischen Operationen hervorgehen, und die Reihe, die der Ausdruck der Function ist, wird daher niemals aus lauter positiven oder aus lauter negativen Gliedern bestehen können. Wir sind hiermit bei der dritten der oben (S. 211) unterschiedenen Bedingungen angelangt, wonach die Reihenfolge, in welcher die zur Bildung der Function erforderlichen Operationen angewandt werden, eine wechselnde ist. An sich kann dieser Wechsel ein beliebiger sein. Die hier sich eröffnende Classe von Functionen umfasst daher alle Functionsbeziehungen, die ausser den oben erörterten noch denkbar sind. Dabei bilden aber die einfachsten periodischen Functionen, d. h. diejenigen, bei denen die periodischen Veränderungen in der einfachsten und regelmässigsten Weise erfolgen, die Grundlagen für alle andern.

Der Begriff der periodischen Function hat, wie fast jeder fundamentale Functionsbegriff, ursprünglich in einer speciellen Anwendung sich entwickelt: in der Anwendung auf die Länge des Kreisbogens und die Seiten des ihm entsprechenden rechtwinkeligen Dreiecks im Kreise. Ist der Radius des Kreises der Einheit gleich,

so erscheint der Sinus eines Winkels zwischen zwei Radien als die senkrechte Gerade, welche von dem Endpunkt des einen der beiden Einheitsradien auf den andern gezogen wird, der Cosinus als die Strecke, welche auf dem letzteren durch jene Senkrechte abgetrennt wird, und welche dem Sinus des Ergänzungswinkels gleich ist, u. s. w. Der geometrische Nutzen dieser trigonometrischen Functionen, durch welchen man zugleich auf deren Gebrauch geführt wurde, besteht darin, dass dieselben es gestatten, den Winkeln im rechtwinkeligen Dreieck überall, wo sie in die Rechnung eingehen, gerade Linien zu substituiren, wodurch die nothwendige Gleichförmigkeit zwischen den der Rechnung unterworfenen Grössen hergestellt wird. Die trigonometrischen Functionen haben also hier, ähnlich den Logarithmen, die Bedeutung von Hülfsfunctionen, welche es leicht ermöglichen, am Ende der Rechnung wieder zu den ursprünglichen Grössen, zu denen sie gehören, zurückzukehren. Während aber bei der Einführung der Logarithmen die Vereinfachung der arithmetischen Operationen der einzige Zweck ist, wird man zur Einführung der trigonometrischen Functionen durch die incommensurable Beschaffenheit der Winkelgrössen oder Bogenlängen gegenüber dem allgemeinen Messungshülfsmittel der Geometrie, der Geraden, genöthigt.

Nun ist die Beziehung, die zwischen den Mittelpunktswinkeln des Kreises und ihren trigonometrischen Functionen besteht, ein Specialfall, der sich in ganz abstracter Weise verallgemeinern lässt, indem man unter Sinus, Cosinus, Tangente u. s. w. Functionen versteht, die sich periodisch verändern, während ihr Argument stetig zunimmt. Zählt man die Winkel oder die ihnen entsprechenden Bogen über $360^0$ hinaus, so lassen sich dieselben als ein ins Unbegrenzte gleichförmig wachsendes Argument betrachten, dessen Functionen sich zwischen bestimmten Grenzen hin- und herbewegen. Dabei gestattet dann die Verschiedenheit der trigonometrischen Functionen die Wahl solcher Functionen, welche für die darzustellende Abhängigkeit die geeigneten Grenzen abgeben. Die Functionen Sinus und Cosinus bewegen sich stets zwischen den Grenzen $-1$ und $+1$. Wenn das Argument von Null an wachsend die Werthe $\frac{\pi}{2}$, $\pi$, $\frac{3\pi}{2}$, $2\pi$ erreicht, so durchläuft der Sinus ebenfalls von Null an die Werthe $+1$, $0$, $-1$, $0$ u. s. w., während der Cosinus gleichzeitig von $+1$ anfangend die parallel gehenden Werthe $0$, $-1$, $0$, $+1$ annimmt. Die Functionen Tangente und Cotangente dagegen bewegen sich ebenso periodisch zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\infty$,

wie die Beziehungen $\text{tang} = \frac{\sin}{\cos}$ und $\text{cotang} = \frac{\cos}{\sin}$ dies andeuten. Irgend eine dieser vier Functionen eignet sich daher unmittelbar zur Darstellung einer periodischen Veränderung, sofern dieselbe nur wie beim Kreise eine gleichförmig zu- und abnehmende ist. Bewegt sich die Function zwischen der positiven und negativen Einheit, so wird sie durch den Sinus oder Cosinus dargestellt, durch den ersteren, wenn sie mit Null, durch den zweiten, wenn sie mit der Einheit beginnt. Bewegt sie sich zwischen entgegengesetzten unendlichen Werthen, so entspricht sie der Tangente oder Cotangente, der ersten, wenn sie mit Null, der zweiten, wenn sie im Unendlichen beginnt. Da nun die Einheit mit jedem beliebigen endlichen Werthe multiplicirt werden kann, so sind die vier genannten trigonometrischen Functionen überhaupt als die Repräsentanten aller gleichförmig veränderlichen periodischen Functionen zu betrachten, die sich zwischen beliebigen endlichen oder unendlichen Werthen bewegen.

Wie aber die Exponentialfunction bei den Veränderungen des Argumentes $x$ ein neues Zahlensystem liefert, welches dem durch die einzelnen Werthe von $x$ repräsentirten zugeordnet ist, so stellt jede der trigonometrischen Functionen ein der stetig veränderlichen Bogenlänge $x$ zugeordnetes Zahlensystem dar. Auch die trigonometrischen Functionen lassen daher, wenn man Argument und abhängig Variable vertauscht denkt, eine Umkehrung zu: es entstehen so die cyklometrischen Functionen, welche die Eigenschaft haben, dass, während das Argument zwischen endlichen oder unendlichen Werthen hin- und hergeht, die Function stetig in einer Richtung veränderlich ist. In Folge dessen können einem und demselben Werth des Argumentes unendlich verschiedene Werthe der Function entsprechen. So kann z. B. $\text{arc}\sin 0 = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \ldots$, $\text{arc}\sin 1 = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ldots$ sein. Die cyklometrischen Functionen sind also im allgemeinen vieldeutige Functionen. Hierdurch sind sie geeignet, überhaupt den Begriff der Vieldeutigkeit einer Function zum Ausdruck zu bringen. Es steht aber dieser Begriff, wie aus der obigen Entwicklung hervorgeht, mit dem der Periodicität in unmittelbarer Beziehung. Vieldeutig kann eine Function überhaupt nur dann sein, wenn sie in irgend einer Weise mit einer periodischen Veränderung zusammenhängt. So haben wir früher gesehen, dass die Functionen complexer Variabeln den Charakter vieldeutiger Functionen besitzen (S. 203). Nun kann aber diese

Vieldeutigkeit auch so dargestellt werden, dass man sich die complexe Variable $z = x + i y$ zwischen ihren beiden Endpunkten $a$ und $b$ hin- und hergehend denkt, wodurch sie successiv alle hier möglichen Wege beschreibt. Bei einem solchen Hin- und Hergehen findet nur eine wichtige Abweichung von der Beziehung der cyklometrischen Functionen zu ihren Argumenten statt: die Curven, welche zwischen den Punkten $a$ und $b$ beschrieben werden, fallen nicht zusammen, sondern sie wechseln fortwährend; ausserdem können diese Curven beliebig gekrümmt sein, mit andern Worten: das Problem der gleichförmigen verwandelt sich hiêr in dasjenige einer beliebigen ungleichförmigen Veränderung. Es ist aber klar, dass dieses Problem, abgesehen von dem hier besprochenen Specialfall, eine ganz allgemeine Bedeutung besitzt, da die gleichförmige Veränderung in gegebenen Perioden nur die einfachste Form unter den unendlich vielen überhaupt möglichen periodischen Veränderungen ist. Hier bietet nun der Umstand, dass jeder trigonometrischen Function eine andere von entgegengesetzter Periode zugeordnet ist, ein Hülfsmittel dar, um eine in beliebiger Weise ungleichförmige Veränderung darzustellen. In der einfachsten Weise kommt diese Ergänzung einander zugeordneter Functionen bei der Darstellung complexer Variabeln zum Ausdruck. Hier macht es die Einführung der trigonometrischen Functionen unmittelbar möglich, den Ausdruck $z = x + i y$ in die Form $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ überzuführen. Denkt man sich in dieser Gleichung sowohl den Radiusvector $r$ wie den Winkel $\varphi$ stetig veränderlich, so kann durch sie jeder beliebige Weg des Punktes $z$ zwischen zwei gegebenen Endpunkten $a$ und $b$ dargestellt werden. Nun zeichnet sich aber die Form $r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ vor der ursprünglichen $x + i y$ offenbar dadurch aus, dass in ihr die beiden Bestandtheile der complexen Variabeln nicht mehr völlig unabhängig von einander, sondern Functionen der nämlichen Grössen $r$ und $\varphi$ sind. Hierin tritt daher eine directe Beziehung der trigonometrischen Functionen zu den complexen Grössen zu Tage. Die Anwendung dieser Functionen macht es möglich, den imaginären Bestandtheil einer complexen Grösse durch eine Function der nämlichen Grösse auszudrücken, von der auch der reelle Bestandtheil eine Function ist. Der Grund dieses Verhältnisses liegt aber darin, dass die Beziehung einer trigonometrischen Function zu ihrer Ergänzungsfunction genau dieselbe ist wie die Beziehung des imaginären zum reellen Bestandtheil einer complexen Grösse, wenn die letztere geometrisch gedeutet wird. Geben wir dem Cosinus alle möglichen Werthe von

$+ 1$ bis $- 1$, so nimmt indessen der Sinus die hierzu gehörigen lateralen Werthe an. Setzt man daher den Radius $r$, von dessen Centriwinkeln die trigonometrischen Functionen abhängen, veränderlich, so stellt jeder beliebige Punkt der complexen Zahlenebene in Bezug auf seinen reellen Theil eine Cosinusfunction, in Bezug auf seinen imaginären Theil eine Sinusfunction dar. Vermöge der Beziehung der trigonometrischen Functionen zu den complexen Grössen führt dann aber auch die Betrachtung der algebraischen Functionen überall da zu dieser Form der transcendenten Functionen, wo sich als Factoren algebraischer Ausdrücke complexe Grössen ergeben. Solche treten z. B. dann auf, wenn in einer Function eine Summe von der Form $a^2 + b^2$ vorkommt, welche nur in die complexen Factoren $(a + b\,i) . (a - b\,i)$ zerlegbar ist (S. 212). Jeder solche Factor lässt sich leicht in einer Form darstellen, die den Bedingungen der trigonometrischen Functionen entspricht. Denn es ist offenbar

$$a + b\,i = \sqrt{a^2 + b^2} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\, i \right),$$

worin der in der Klammer enthaltene Theil, abgesehen von der imaginären Einheit $i$, die Eigenschaft hat, dass sein Quadrat der Einheit gleich ist, entsprechend der Gleichung $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Demnach lassen sich beide Glieder als Cosinus und Sinus eines Winkels $\varphi$ auffassen; nicht minder entsprechen $a$ und $b$ den Katheten eines rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse der Radiusvector $r$ ist, und man erhält daher die oben allgemein für den Ausdruck einer complexen Grösse mittelst trigonometrischer Functionen festgestellte Beziehung:

$$a + b\,i = r\,(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Der tiefere Grund dieses Zusammenhangs liegt darin, dass die algebraischen Functionen eben insoweit den Charakter periodischer Functionen gewinnen, als sie complexe Factoren enthalten. Sobald die Wurzeln einer Function $n$ ten Grades complex werden, so wird die Function periodisch, indem sie ebenso viele periodisch auf einander folgende Werthe annimmt, als ihr Grad beträgt. Diese Eigenschaft ist eine naturgemässe Folge der schon oben berührten Vieldeutigkeit der Functionen complexer Variabeln. Zu irgend einer reellen Zahl $x$ kann man, wenn ihr Vorzeichen bestimmt ist, nur in einer Weise und, wenn ihr Vorzeichen unbestimmt gelassen ist, nur auf zwei Weisen gelangen, da das System der reellen Zahlen

nach zwei entgegengesetzten Richtungen einfach ausgedehnt ist. Zu einer complexen Zahl $x + i\,y$ dagegen kann man auf vielfältige Weise gelangen, und die sämmtlichen Wege lassen sich, da ein und derselbe Punkt ihren Anfangs- und Endpunkt bildet, immer als Perioden einer zusammengesetzten Bewegung ansehen. In der Gleichung $x + i\,y = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ ist dies unmittelbar ausgedrückt, da $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ wegen der Beziehungen $\cos\varphi = \cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi + 4\pi) \ldots$, $\sin\varphi = \sin(\varphi + 2\pi) \ldots$ u. s. w. vieldeutige Grössen sind.

Wenn sich auf diese Weise die trigonometrischen Functionen unter bestimmten Bedingungen aus den algebraischen entwickeln, so ist es nun eine naheliegende Folgerung, dass sie auch, gleich ihnen, sich auf die allgemeine analytische Form zurückführen lassen. Nur ist dabei wegen der Periodicität der Functionen vorauszusetzen, dass die Glieder der Reihe abwechselnde Vorzeichen annehmen. In der That erhält man, wenn man erwägt, dass $\sin 0 = 0$ und $\cos 0 = 1$ ist, und wenn man aus den bekannten Beziehungen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ und $\sin 2x = 2 \sin x \,.\, \cos x$ Bedingungsgleichungen für die Coëfficienten entwickelt, für die beiden Grundfunctionen Sinus und Cosinus die Reihen:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5} - \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\,.\,2} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} - \ldots$$

Diese Reihen lassen sofort eine nahe Beziehung erkennen zwischen den trigonometrischen Functionen und der Exponentialfunction. Entwickelt man die letztere für ein imaginäres Argument $i\,x$, so erhält man

$$e^{i\,x} = 1 + i\,x - \frac{x^2}{1\,.\,2} - \frac{i\,x^3}{1\,.\,2\,.\,3} + \frac{x^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4} + \ldots,$$

woraus sich die Beziehung ergibt:

$$e^{i\,x} = \cos x + i \sin x.$$

Der letztere Ausdruck stimmt mit dem allgemein für eine complexe Grösse gefundenen Functionsausdruck $r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ überein, wenn in diesen der Radiusvector $r$ gleich der Einheit angenommen wird. Demnach lassen sich die trigonometrischen Functionen als Exponentialfunctionen imaginärer Argumente betrachten, und complexe Grössen sowie periodische Functionen können ebensowohl in

der Form der trigonometrischen Function wie in derjenigen der Exponentialfunction dargestellt werden. Wie wir die trigonometrische Function aus der algebraischen sich entwickeln sahen, sobald sich diese auf complexe Werthe bezieht, so geht sie aus der Exponentialfunction dann hervor, wenn in dieser die willkürlich Veränderliche imaginär wird. Auf diesen periodischen Eigenschaften beruht die Möglichkeit der Anwendung der trigonometrischen Functionen zum Ausdruck ganz beliebiger und beliebig wechselnder Beziehungen zwischen zwei Veränderlichen. Denn wenn man die trigonometrischen Functionen in solcher Weise combinirt, dass sie unregelmässig wechselnde und veränderliche Perioden darstellen, so kann auf die Form derselben jede willkürliche Function zurückgeführt werden (S. 206).

## 2. Der Differentialbegriff.

### a. Allgemeine Entwicklung des Differentialbegriffs.

Aus der Anwendung der Zahl auf stetige Grössen ist zunächst, wie wir sahen, die irrationale Zahl, aus dieser die algebraische Verallgemeinerung der arithmetischen Methoden und aus der letzteren endlich der Begriff der analytischen Function als der Abhängigkeitsbeziehung zwischen stetig veränderlichen Grössen hervorgegangen. So lange es sich nun allein darum handelt, aus einer durch ein bestimmtes Gesetz vorgeschriebenen Abhängigkeitsbeziehung diejenigen Werthe einer Veränderlichen abzuleiten, welche bestimmten Werthen anderer willkürlich veränderlicher Grössen entsprechen, so überschreitet diese Aufgabe im allgemeinen nicht die bisher eingehaltenen Grenzen der Analysis. Ist nur die Gleichung gegeben, welche die Function ausdrückt, so kann durch Einführung der speciellen Werthe des Argumentes auch die Aufgabe gelöst werden. Ebenso kann man zu der Aufstellung von Gleichungen für die Functionsbeziehungen mittelst der wiederholten Ausführung der gewöhnlichen arithmetischen Operationen gelangen, wenn sich eine zusammengesetzte Function in eine begrenzte Anzahl linearer Functionen zerlegen lässt, was bei den algebraischen Functionen immer zutrifft, oder wenn die Abhängigkeitsbeziehung für alle Werthe der Function einer bestimmten durch eine einfache Exponential- oder Kreisfunction gegebenen Regel folgt, wie dies bei den elementaren Formen der trans-

scendenten Functionen der Fall ist. Hier überall hat man es zwar nicht bloss mit veränderlichen Grössen, sondern auch mit veränderlichen Beziehungen zwischen ihnen zu thun; aber die Constanz des Gesetzes, welchem die Function folgt, gestattet für einen weiten Bereich von Aufgaben, von dieser Veränderlichkeit zu abstrahiren.

Dagegen ist dies nicht mehr möglich, sobald die constanten Beziehungen, die der analytische Ausdruck einer Function enthält, nicht ausreichen, um mit ihrer Hülfe auch veränderliche Beziehungen aufzufinden. So ist es zwar für einfachere algebraische Curven leicht, die Richtung der Tangente zu ermitteln, welche an irgend einen durch gegebene Coordinaten bestimmten Punkt gelegt werden kann, indem man aus der Gleichung der Curve analytisch die Gleichung derjenigen Geraden ableitet, die der Tangente entspricht. Bei den höheren algebraischen Curven wird aber diese Aufgabe sehr verwickelt, und bei den transcendenten ist sie auf algebraischem Wege nicht mehr zu lösen. Da sich die Richtung der Tangente stetig von Punkt zu Punkt verändert, so kann eine allgemeingültige Methode zur Lösung des Tangentenproblems in der That nur aufgefunden werden, wenn es gelingt, der stetig veränderlichen Richtung einer Curve in dem allgemeinen Ausdruck für die Tangente Rechnung zu tragen. Ebenso ist es in der Regel nicht möglich, durch die gewöhnlichen arithmetischen Hülfsmittel zu ermitteln, welche Werthe von $y$ in einer Function $y = f(x)$ Maximal- oder Minimalwerthe sind, die zwischen Aenderungen von entgegengesetzter Richtung liegen. Da solche ausgezeichnete Werthe der Function Wendepunkte zwischen vollkommen stetigen Aenderungen darstellen, so setzt ihre Ermittelung im allgemeinen ebenfalls die Berücksichtigung dieser stetigen Aenderungen voraus. Die nämliche Forderung pflegt sich endlich dann einzustellen, wenn es sich darum handelt, den gesammten Betrag aller der Werthe zu bestimmen, die eine Function annimmt, wenn ihre Argumente sich stetig zwischen gewissen Grenzen verändern. Hierher gehört also z. B. die Bestimmung der Länge einer Curve, des Flächeninhalts einer von einer Curve begrenzten ebenen Fläche, einer krummen Oberfläche u. s. w. Gerade hier übersteigen schon verhältnissmässig elementare Aufgaben, wie die Messung der Kreisperipherie, die Hülfsmittel der niederen Arithmetik. Aufgaben dieser Art sind es daher, durch die der Begriff der stetig veränderlichen Function Eingang in die analytische Untersuchung gefunden hat. Da aber unsere Vorstellungen ebenso wie die Dinge ausser uns in einem stetigen Flusse von Veränderungen

begriffen sind, so hat durch diese letzte Erweiterung erst der Functionsbegriff diejenige Form angenommen, in der er den Objecten seiner Anwendung vollkommen adäquat geworden ist. So schliesst mit den Grundbegriffen der Infinitesimalmethode der Kreis von Entwicklungen ab, welcher mit dem primitiven Begriff der positiven ganzen Zahl begonnen hat, und aus dem wir alle fundamentalen Methoden der Mathematik allmählich entspringen sahen.

Der Begriff der stetigen Aenderung einer Function bedarf jedoch einer angemessenen Fixirung, wenn er eine arithmetische Verwendung soll finden können. Eine solche kann nur darin bestehen, dass man sich die veränderliche Beziehung, die an sich die numerische Messung ausschliesst, in Elemente zerlegt denkt, in denen die Veränderung aufgehoben ist. So entsteht der Grundbegriff der Infinitesimalmethode, der Differentialbegriff. Zur näheren Begründung desselben kann man aber auf verschiedenen Wegen gelangen. Einerseits erwächst er mit innerer Nothwendigkeit aus den einzelnen Gebieten seiner Anwendung; anderseits ergibt er sich als eine unerlässliche Weiterbildung des allgemeinen Functionsbegriffs. Geht man von den in der Anschauung gegebenen Beziehungen aus, so verknüpft sich der Begriff der stetigen Aenderung am unmittelbarsten mit der Vorstellung der Bewegung: sie liegt der Fluxionsmethode Newtons zu Grunde. Eine zweite Quelle desselben von noch allgemeinerer Anwendbarkeit ist in der Betrachtung geometrischer Objecte gegeben: hieraus ist der Leibniz'sche Differentialbegriff hervorgegangen. Sodann führt der Grundbegriff der Arithmetik, die Zahl, auf einem allgemeineren Wege zu der nämlichen Auffassung. Der so entstandene Differentialbegriff Eulers nöthigt aber, sobald man das Differential in seinem Verhältniss zu den ursprünglichen Grössen unter dem Gesichtspunkte der Funktion auffasst, zu dem letzten und allgemeinsten Infinitesimalbegriff, zu Lagranges derivirter Function.

Diese verschiedenen Begründungen des Differentialbegriffs sind an sich vollkommen mit einander vereinbar. Doch bei der Aufstellung derselben sind ausserdem Gegensätze der Anschauungen wirksam gewesen, die theils mit den Schwierigkeiten des unteren und oberen Grenzbegriffs, theils mit der verschiedenen Auffassung der mathematischen Grundbegriffe zusammenhängen. (Vgl. oben S. 100 und 150.) Indem der mathematische Realismus das Element einer veränderlichen Beziehung als ein wirklich existirendes denkt, ist er geneigt, in dem Differential eine elementare Grösse zu sehen,

die einen ebenso fest bestimmten Werth besitze wie die endliche Grösse, von der sie sich nur dadurch unterscheide, dass sie nicht messbar sei. Diesem unteren steht das Unendliche als der obere absolute Grenzbegriff gegenüber. Dem mathematischen Nominalismus dagegen gilt das Differential lediglich als ein Hülfsbegriff des rechnenden Denkens. Eine wirklich momentane Veränderung gibt es nicht; denn jede noch so kleine Zeit-, Raum- oder Zahlgrösse lässt sich weiter getheilt denken. Wir begnügen uns daher, eine derartige Theilung als Forderung aufzustellen und in der weiteren Rechnung so zu verfahren, als wenn die Forderung erfüllt wäre. Diesem Postulat einer unteren Grenze wird dann das Unendliche als eine ähnliche Fiction einer oberen Grenze, die in beliebigen Annäherungen erreicht werden könne, gegenübergestellt. Auf diese Weise bemächtigen sich hier die entgegengesetzten mathematischen Anschauungen der verschiedenen Gestaltungen der beiden Grenzbegriffe. Der Realismus behandelt das Differential als eine transfinite, der Nominalismus als eine infinite Grösse. Dabei werden aber freilich die Standpunkte nicht immer folgerichtig festgehalten. So schwankt schon Leibniz zwischen beiden, obgleich ursprünglich sein philosophischer Gegensatz zu Newton gerade darin besteht, dass dieser den infiniten, er selbst den transfiniten Begriff vertritt. Unter den Nachfolgenden machte Euler den Versuch, den letzteren festzuhalten, während hauptsächlich d'Alembert und Lagrange die mathematische Folgerichtigkeit und Fruchtbarkeit des infiniten Grenzbegriffs ins Licht setzten. Trotzdem hat man noch in neuerer Zeit die Gleichberechtigung beider Standpunkte vertheidigt*). Nun haben wir in der That gesehen, dass die beiden Formen der Grenzbegriffe, die diesem Streit zu Grunde liegen, ihre logische Berechtigung besitzen. Aber es ist zugleich aus den für diese Begriffe gewonnenen Bestimmungen ersichtlich, dass innerhalb der Infinitesimalmethode nur die infiniten Grenzbegriffe zulässig und verwerthbar sind. Denn diese Methode ist aus der Untersuchung stetig

*) P. du Bois Reymond, Allgemeine Functionentheorie, I, S. 58 ff. Der Verf. ist, wie ich glaube, zu seiner Auffassung nicht bloss durch die Verkennung der beiden Formen des Unendlichkeitsbegriffs, sondern auch durch den Umstand geführt werden, dass er die Ansichten des Realismus und des Nominalismus über das Wesen der mathematischen Begriffe überhaupt für gleich berechtigt hält. Wir haben aber gesehen, dass in dieser Beziehung beide Standpunkte unhaltbar sind, weil sie die Natur der mathematischen Abstraction entweder übersehen oder unrichtig auffassen. Vgl. hierzu oben S. 100 ff.

veränderlicher Functionen hervorgegangen. Innerhalb dieser Untersuchung kann es sich nun immer nur um denjenigen Grenzbegriff handeln, welcher die Grenze einer veränderlichen Grösse bezeichnet. Wenn es hierfür noch eines Beweises bedarf, so wird derselbe durch die Entwicklung der Infinitesimalbegriffe geliefert. Denn so wenig man sich bei derselben auch des verborgenen Kampfes bewusst gewesen ist, den hier die beiden Unendlichkeitsbegriffe mit einander führten, so kann es doch keinem Zweifel unterliegen, dass die Auffassungen, die Newton in seiner Grenzmethode und Lagrange in seinem Functionencalcül zur Geltung gebracht, den Sieg behauptet haben. Dieser Sieg kann aber nicht als ein ephemerer Erfolg angesehen werden, sondern er ist daraus entsprungen, dass jene Auffassungen theils die naturgemässen Grundlagen für die allgemeine Anwendung der Methode abgeben, theils diese in die unmittelbarste Verbindung mit den sonstigen Entwicklungen des Zahl- und Functionsbegriffs bringen.

### b. Der phoronomische Differentialbegriff.

Die Vorstellung der Bewegung reicht zwar nicht aus, um den Differentialbegriff in seiner ganzen Allgemeinheit zu erschöpfen; aber für seine einfachsten Anwendungen liefert sie die anschaulichste Darstellung. Um den Begriff der Bewegung loszulösen von allem, was für ihn unwesentlich ist, müssen wir ihn beschränken auf die abstracte Auffassung einer Ortsveränderung in der Zeit, dagegen von der Form des zurückgelegten Weges vollkommen absehen. In dieser abstracten Auffassung enthält der Begriff der Bewegung Zeit und Raum als fortwährend fliessende Grössen oder Fluenten nach dem Ausdrucke Newtons, und zwar die Zeit als eine gleichförmig wachsende Grösse, den Raum als eine Grösse, die nach den verschiedensten Gesetzen mit dem Wachsthum der Zeit sich verändern kann. Denkt man sich die Zeitgrössen auf einer Abscissenlinie, die Ortsveränderungen als zu ihr senkrechte Ordinaten aufgetragen, so liefert die durch die Verbindung der letzteren gewonnene Curve ein Bild der Geschwindigkeit und ihres Wechsels in jedem Momente der Bewegung. Indem man nun jede beliebige Grössenänderung als eine Bewegung auffasst, die in einer gewissen Zeit sich vollzieht, gewinnt man in dem einzelnen Zeitmoment und in der demselben entsprechenden momentanen Geschwindigkeit oder in den von Newton so genannten Fluxionen elementare Begriffe, welchen die dem Begriff

der Veränderung mangelnde Constanz zukommt, während die Vorstellung eines stetigen Flusses, ohne welche keine Veränderung möglich ist, in ihnen erhalten blieb*). Die Schwierigkeiten des Differentialbegriffs sind dadurch nicht beseitigt, aber sie sind in den fundamentaleren Begriff der Bewegung zurückverlegt, und sie müssen darum auch zunächst durch die Zergliederung dieses Begriffes gelöst werden.

Nun ist es bekanntlich von dem Eleaten Zeno bereits als ein Widerspruch in dem Begriff der Bewegung angesehen worden, dass dieselbe in fortwährendem Flusse begriffen und doch in einzelne Momente zerlegbar sei, in denen der bewegte Körper bestimmte Orte im Raume einnehme. Herbart hat hier den Ausweg eingeschlagen, dass er die Zeit aus unveränderlichen Zeitpunkten bestehen lässt, so dass der Zenonische Satz wirklich seine Gültigkeit behält: das Bewegte ruht in jedem Punkte seiner Bahn. Die Bewegung selbst wird dann zu einem objectiven Schein, und der angebliche Widerspruch, der im Begriff der Bewegung liegt, verschwindet, weil es in der Welt des Realen weder eine stetige Aenderung noch überhaupt ein Continuum gibt**). Uns ist mit dieser Auskunft wenig geholfen. Denn der Differentialbegriff bezieht sich gerade auf jenen objectiven Schein Herbarts, in welchem nur stetige Aenderungen vorkommen. In Wahrheit fällt aber dem Eleatischen Widerspruch nicht eine Vermengung des Intelligibeln und Sinnlichen, sondern zunächst nur eine Verwechslung jener beiden Grenzbegriffe zur Last, denen wir arithmetisch den gleichen Werth Null beilegen, obgleich wir jedesmal mit diesem Werth einen verschiedenen Begriff verbinden. (Vgl. S. 150.) Die Bewegung des Pfeils in jedem Punkt seiner Bahn ist wirklich gleich Null, aber diese Null ist nicht die aufgehobene, sondern die verschwindende Grösse. Jene würde, auch wenn wir sie unendlich oft wiederholt dächten, immer gleich Null bleiben; diese ist das Resultat einer Zerlegung, die man sich ins Unendliche fortgesetzt denkt, und aus der, wenn der Zerlegungsprocess umgekehrt wird, nothwendig wieder endliche Grössen entstehen müssen. Diese Vertauschung der beiden Formen des Grenzbegriffs wird bei dem Zenonischen Beweis noch unterstützt durch den Schein der Wahrnehmung. Wenn man sich den einzelnen Moment der Bewegung für sich isolirt vorstellt, so entsteht das Bild

*) Newtoni Methodus Fluxionum, Opuscula I, p. 34.

**) Herbart, Metaphysik, II, §. 284 f. (Werke Bd. 4, S. 233).

des ruhenden Pfeils. Doch der Begriff der objectiven Bewegung verlangt, dass die einzelne Wahrnehmung mittelst der Ergebnisse der ihr vorangehenden und nachfolgenden Wahrnehmungen ergänzt werde. Nur auf diesem Wege lässt sich entscheiden, ob der momentane Ort des bewegten Körpers constant bleibt oder sich stetig verändert. So erweist sich der Unterschied der wirklichen und scheinbaren Ruhe nur als ein anschauliches Beispiel für den Unterschied der beiden Formen des Nullbegriffs. Da die Fluxionsmethode der Auffassung der veränderlichen Functionsbeziehung den Begriff der continuirlichen Bewegung substituirt, so hat in ihr der absolute Nullbegriff keine Stelle, sondern sie denkt sich die beiden Fluenten, welche den Begriff der Bewegung zusammensetzen, die Zeit und den Raum, in ihre Elemente, in Zeitmomente und geometrische Punkte, zerlegt. In charakteristischer Weise bezeichnet daher Newton die zu den Fluenten $x$ und $y$ gehörigen Fluxionen durch einen über die Buchstabensymbole gesetzten Punkt: $\dot{x}$ bedeutet zunächst den nach dem Ablauf der Zeit $x$ eintretenden Zeitpunkt, $\dot{y}$ den nach dem Durchlaufen des Raumes $y$ erreichten Raumpunkt. Aber da Zeit und Raum bei der Bewegung fliessende Grössen sind, so gewinnen $\dot{x}$ und $\dot{y}$ zugleich die Bedeutung der dem Zeitpunkt $x$ entprechenden Geschwindigkeit des Abflusses der Zeit und der dem Raumpunkt $y$ entsprechenden Geschwindigkeit der Ortsveränderung. Statt immerwährend auf die Grundbedeutung von $\dot{x}$ und $\dot{y}$ zurückzugehen, zieht Newton überdies im allgemeinen es vor, die Fluxionen unmittelbar als die momentanen Geschwindigkeiten des Wachsthums der beiden Coordinaten einzuführen, eine Uebertragung, durch welche die geometrische Verwendung der Methode erleichtert wird. Jene ursprüngliche Bedeutung der beiden Fluxionen kommt aber darin zur Geltung, dass stets die Geschwindigkeit $\dot{x}$ für alle Werthe der Fluenten $x$ als constant angesehen wird, während die zugehörige Geschwindigkeit $\dot{y}$ eine wechselnde sein kann. Da nun $\dot{x}$ und $\dot{y}$ momentane Geschwindigkeiten bedeuten, so muss, wenn man die Werthe des Verhältnisses $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ bestimmen will, die in einem gegebenen Moment stattfindende Bewegung mit der vorangegangenen und nachfolgenden in Beziehung gesetzt werden. Zu diesem Zweck sondert Newton die Begriffe des Zeitverlaufs und der Ortsveränderung wieder in je zwei Begriffe, indem er die Fluxionssymbole $\dot{x}$ und $\dot{y}$ bloss Geschwindigkeiten bedeuten lässt und die Zeit- und Raumwerthe, auf die sich diese Geschwindigkeiten beziehen, besonders bezeichnet. Insofern

nun Geschwindigkeiten bestimmter Zeit- und Raumgrössen zu ihrer Messung bedürfen, behandelt dann Newton $\dot{x}$ und $\dot{y}$ als messbare Zahlgrössen, welche erst dadurch gleich Null werden, dass man die Zeit und den Raum, innerhalb deren diese Geschwindigkeiten angenommen werden, gleich Null setzt. Die so entstehenden Producte $\dot{x} . 0$ und $\dot{y} . 0$ nennt er die Momente der Zeit- und der Raumgeschwindigkeit. Seine Methode, um zu den Differentialien bestimmter Functionen zu gelangen, besteht dann darin, dass er die Veränderlichen um diese Momente zunehmen lässt, in der Rechnung die Nullen wie wirkliche Zahlen behandelt, schliesslich aber alle Glieder hinweghebt, welche die Null als Factor enthalten. Ist z. B. die einfache Function $y = x^2$ gegeben, so setzt Newton $y + \dot{y}\, 0 = (x + \dot{x}\, 0)^2 = x^2 + 2\, x \dot{x}\, 0 + \dot{x}^2\, 0^2$, und schliesst daraus, da $(y + \dot{y}\, 0) - y = (x + \dot{x}\, 0)^2 - x^2$ sein muss:

$$\dot{y}\, 0 = 2\, x \dot{x}\, 0 + \dot{x}^2\, 0^2, \quad \dot{y} = 2\, x \dot{x} \text{ oder } \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2\, x.$$

Man sieht deutlich, dass diese Einführung der Momente $\dot{x}\, 0$ und $\dot{y}\, 0$ nur ein Kunstgriff ist, welcher dazu dienen soll, in der Gleichung $\dot{y}\, 0 = 2\, x \dot{x}\, 0 + \dot{x}^2\, 0^2$ das zweite Glied hinwegzuschaffen. In Wahrheit operirt man nur mit den Begriffen $\dot{x}$ und $\dot{y}$, der momentanen Zeitgeschwindigkeit und der momentanen Ortsveränderung. Der Hervorhebung, dass hier die Ausdehnung der Zeit und des Raumes gleich Null sei, bedarf es gar nicht: das liegt in den Begriffen von $\dot{x}$ und $\dot{y}$ schon eingeschlossen, daher auch in dem endlichen Ergebnisse die letzteren allein genügend sind. Hätte Newton einfach bemerkt, dass $\dot{x}$ und $\dot{y}$ gleich Null sind und deshalb, wo sie einzeln oder mit einander multiplicirt vorkommen, hinwegfallen, dass dagegen das Verhältniss $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ darum doch einen bestimmten Werth haben könne, so würde er ohne die Zwischenrechnung mit der Null zu seiner Fluxionsgleichung gelangt sein. Aber es wäre dann allerdings ein Hinausgehen über den Begriff der momentanen Bewegung erforderlich gewesen; denn der Nachweis, dass der Quotient $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ im allgemeinen einen bestimmten Werth besitzt, fordert eine Berücksichtigung des ganzen Verlaufs der Bewegung. Eine solche liegt nun zwar schon in der Natur der Aufgaben, welche die Fluxionenrechnung behandelt. Eine gegebene Gleichung $y = f\,(x)$ ist ja stets ein Ausdruck für den ganzen Verlauf der Function, und die Differentialgleichung, welche

für einen bestimmten Moment das Wachsthum der Veränderlichen bestimmt, kann eben darum nur aus der ursprünglichen Functionsgleichung abgeleitet werden. Sobald man aber bei der Ableitung des Fluxionsbegriffs sogleich auf die Beziehung der momentanen Veränderung zu der vorangehenden und nachfolgenden Rücksicht nimmt, so führt dies zur geometrischen Darstellung der Bewegung und damit zum geometrischen Differentialbegriff.

Noch in andern Beziehungen zeigt sich die Vorstellung der Bewegung ungenügend. Ein Mangel derselben liegt namentlich darin, dass sie, da der Begriff der Bewegung nur zwei Fluenten, die Zeit und den Raum, enthält, auf Functionen zwischen mehr als zwei Veränderlichen nicht anwendbar ist. Newton selbst hat daher für solche Zwecke zu geometrischen Veranschaulichungen gegriffen, welche dem Geist der Fluxionsmethode eigentlich fremd sind. So nöthigt der phoronomische Differentialbegriff von verschiedenen Seiten her zu einer Weiterbildung, die ihn in den geometrischen überführt.

### c. Der geometrische Differentialbegriff.

Eine Function von der Form $y = f(x)$ wird geometrisch dargestellt durch eine Curve, in welcher einem gleichförmigen Wachsthum der Abscissen ein Wachsthum der Ordinaten entspricht, dessen Gesetz durch jene Gleichung bestimmt ist. Wenn die Differenz $x_2 - x_1$ constant bleibt, so kann daher die zugehörige Differenz $y_2 - y_1$ im allgemeinen sehr verschiedene Werthe annehmen. Nur in einem Fall bleibt auch $y_2 - y_1$ constant, dann nämlich, wenn die Function $y = f(x)$ eine lineare ist. Auf diesen einfachsten Fall lässt sich nun eine jede Function zurückführen, wenn man die Voraussetzung macht, dass die Differenzen $x_2 - x_1$ und $y_2 - y_1$ unendlich kleine Grössen bedeuten. Denn ein unendlich kleines Stück einer beliebigen Curve kann immer als eine gerade Linie angesehen werden. Das betreffende Curvenstück fällt dann seiner Richtung nach vollständig mit der Tangente der Curve zusammen. Auf diesen Begriff unendlich kleiner Differenzen der Coordinaten gründete Leibniz die Bezeichnungen $dx$, $dy$ für die Differentiale der Veränderlichen. Geometrisch aber bedeuten $dx$ und $dy$ die Katheten eines unendlich kleinen rechtwinkeligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die Tangente ist. Die Seiten dieses „Triangulum characteristicum", wie Leibniz es nannte, sind, ebenso wie dessen Flächeninhalt, unendlich klein; dennoch besteht zwischen denselben ein bestimmtes Verhält-

niss, welches durch Zahlen ausgedrückt werden kann, und welches ungeändert bleibt, wenn man sich durch ein stetiges und gleichförmiges Wachsthum das unendlich kleine Dreieck in ein ihm ähnliches Dreieck von endlicher Grösse übergeführt denkt. Da nun die Tangente als Hypotenuse trigonometrisch durch das Verhältniss der beiden andern Seiten bestimmt wird, so misst dieses oder der Quotient $\frac{dy}{dx}$ die Richtung der Curve an dem betreffenden Punkte, und die nächste Aufgabe der Differentialrechnung ist gelöst, wenn es gelingt, aus der aufgestellten Functionsgleichung $y = f(x)$ den Werth jenes Quotienten in allgemeingültiger Weise zu gewinnen.

Man sieht sofort, dass der wesentliche Unterschied dieses geometrischen Differentialbegriffs von dem Fluxionsbegriff in der Einführung der unendlich kleinen Grösse besteht. Die Fluxion wurde als eine momentane Bewegung angesehen. Hier dagegen macht es der geometrische Ausgangspunkt unmöglich, von der Ausdehnung ganz zu abstrahiren. Die Seiten des charakteristischen Dreiecks verschwinden zwar im Vergleich mit jeder gegebenen Grösse, aber sie können niemals gleich Null werden. Dadurch hat man den Vortheil, dass die Beziehung der momentanen Aenderung zu der vorangegangenen und nachfolgenden, die bei der Fluxionsmethode Schwierigkeiten bereitet, hier von Anfang an schon in den Differentialbegriff aufgenommen ist. Dafür aber büsst dieser selbst seine Strenge ein. Die Annahme, dass ein unendlich kleines Stück einer Curve einer geraden Linie gleichkomme, genügt zwar vollkommen, um praktisch zu richtigen Resultaten zu gelangen, aber diese Resultate erscheinen nur als Annäherungen, ähnlich wie bei der in dieser Beziehung auf gleichem Boden stehenden so genannten Exhaustionsmethode des Archimedes. Leibniz selbst suchte dieser Schwierigkeit gelegentlich zu entgehen, indem er das Differential als das letzte untheilbare Element einer Grösse auffasste und erklärte, eine Differenz $x_2 - x_1$ sei $dx$, wenn $x_2$ und $x_1$ die zwei „einander nächsten" Werthe von $x$ bezeichneten. In gleicher Absicht verglich er das Verhältniss der Differentialien zu den ursprüngliehen Grössen mit dem Verhältniss arithmetischer Reihen von verschiedener Ordnung. Auf diese Weise hob er eben den Begriff der Stetigkeit, dessen Bedeutung für die Infinitesimalmethode er sonst mit Recht betonte, gerade bei dem Grundbegriff derselben wieder auf. Zugleich ist ersichtlich, dass dieser Versuch, aus absolut untheilbaren und darum eigentlich discontinuirlichen Elementen die stetige Grösse entstehen zu lassen, mit

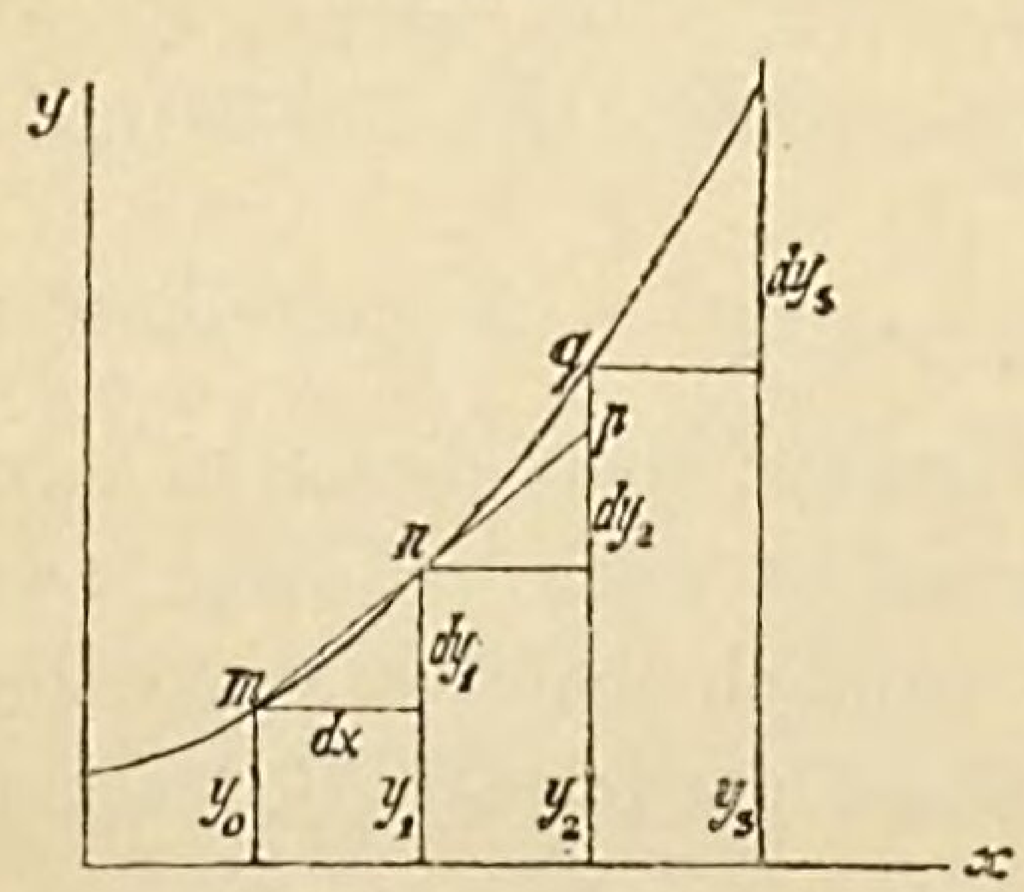
dem metaphysischen Begriff der Monade in einer gewissen Beziehung steht. Bekanntlich sind aber die Grundgedanken der Differentialrechnung älter als die Ausbildung der monadologischen Vorstellungen. Es mag sein, dass gerade die Widersprüche, in die sich Leibniz durch den Begriff der Stetigkeit zu verwickeln meinte, wenn er nicht letzte untheilbare Elemente voraussetzte, bei der Bildung des Monadebegriffs mitgewirkt haben. Dass jene Schwierigkeiten nicht durch eine solche absolute Bedeutung, die man dem Differential beilegt, gelöst werden können, dies zeigt nun aber sofort die Unterscheidung unendlich kleiner Grössen verschiedener Ordnung, zu der Leibniz selbst schon veranlasst wurde. In der That wird man auf rein arithmetischem Wege zu dieser Unterscheidung geführt, wenn man die Differentialausdrücke für bestimmte Functionen entwickelt; denn das Verfahren besteht hier immer darin, dass man die unendlich kleinen Grössen zweiter und höherer Ordnung gegen diejenigen erster Ordnung verschwinden lässt. So gewinnt man z. B. aus der Function $y = x^n$ das Differential $dy = nx^{n-1}\,dx$, indem man in dem Ausdruck $(x + dx)^n - x^n$ das Binomium in eine Reihe entwickelt, alle Glieder, welche eine höhere als die erste Potenz von $dx$ enthalten, weghebt, und dann $x^n$ subtrahirt. Nimmt man hier an, dass $dx$ aus einer Theilung $\frac{1}{\infty}$ hervorgegangen sei, so werden die höheren Potenzen $dx^2$, $dx^3$ . . . durch die Brüche $\frac{1}{\infty^2}$, $\frac{1}{\infty^3}$ . . . dargestellt werden können. Bei der Motivirung des Verschwindens dieser höheren Differentialen schwankt aber Leibniz selbst noch zwischen zwei verschiedenen Auffassungen. Einerseits nämlich meint er, dieselben hätten, ähnlich den imaginären Grössen, eine bloss formale Bedeutung, da das Element $dx = \frac{1}{\infty}$ nicht mehr weiter getheilt werden könne; anderseits gesteht er zu, dass zwischen den unendlich kleinen Grössen verschiedener Ordnung eine ähnliche Relation angenommen werden könne, wie zwischen einem unendlich Kleinen erster Ordnung und einer endlichen Grösse*). Erst in der Folgezeit ist diese letztere Auffassung und damit überhaupt die Anschauung, dass das unendlich Kleine keine absolute, sondern nur eine relative Bedeutung besitze, zur Herrschaft gelangt. Es mochte dabei wohl hauptsächlich

*) Leibniz' mathematische Werke, herausgegeben von Gerhardt, V. S. 389.

die bereits von Leibniz erkannte geometrische Bedeutung des zweiten Differentialquotienten mitwirken.

Im Sinne der Theorie des unendlich Kleinen bedeutet nun $dy$ die Differenz zweier einander unendlich nahe gelegener Ordinaten $y_1$ und $y_2$, und der Quotient $\frac{dy}{dx}$ als trigonometrische Tangente des Winkels, welchen das unendlich kleine Curvenstück mit der Abscissenlinie bildet, bestimmt die Richtung der Curve an der gegebenen Stelle. Bleiben für eine Reihe auf einander folgender unendlich kleiner Ordinatenunterschiede $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$, $y_3 - y_2$ die Werthe von $\frac{dy}{dx}$ die nämlichen, so ist die Richtung der Curve an der betreffenden Stelle constant, d. h. die Curve selbst ist hier eine gerade Linie. Sind dagegen jene unendlich kleinen Differenzen von einander verschieden, so erhält man auch für den ersten Differentialquotienten eine Reihe von einander verschiedener Werthe $\frac{dy_1}{dx}$, $\frac{dy_2}{dx}$ . . . Die Geschwindigkeit der Richtungsänderung wird dann offenbar gemessen durch die Differenzen $dy_2 - dy_1$, $dy_3 - dy_2$ . . ., welche je nach dem Sinn der Richtungsänderung positiv oder negativ sein können. Geometrisch lässt sich aber eine Differenz $dy_2 - dy_1$ darstellen, wenn man die Endpunkte der beiden Ordinaten $y_0$ und $y_1$ durch die Gerade $mn$ verbindet und diese Gerade bis zum Punkte $p$ der nächsten Ordinate $y_2$ verlängert. Es entspricht dann das Stück $pq$ der unendlich kleinen Differenz $dy_2 - dy_1$, welche symbolisch durch $d^2y$ bezeichnet wird. Führt man statt der absoluten Werthe $dy_2$, $dy_1$ ihre Verhältnisse zu den unendlich kleinen Zuwüchsen $dx$ ein, so erhält man

Fig. 15.




$$d^2y = \left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx}\right) dx.$$

Nun besteht der Begriff der Richtungsänderung darin, dass das Verhältniss dieser Differenz der Quotienten zu dem unendlich kleinen Zuwachs $dx$ bestimmt wird. Die Gleichung geht also über in die folgende:

$$d^2y = \frac{\frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx}}{dx} \cdot dx^2 = \frac{d\,\frac{dy}{dx}}{dx}\,dx^2,$$

oder

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\,\frac{dy}{dx}}{dx},$$

welche letztere Gleichung eben nichts anderes aussagt, als dass zur Bestimmung der Richtungsänderung einer Curve an einem gegebenen Punkte der erste Differentialquotient, welcher die Richtung angibt, noch einmal der Operation der Differentiation in Bezug auf die unabhängig Veränderliche unterworfen werden muss. Die nothwendige Folge davon ist, dass im Nenner des zweiten Differentialquotienten der Zuwachs des Argumentes im Quadrat erscheint. Es ist klar, dass sich diese geometrischen sofort in phoronomische Vorstellungen übertragen lassen. Wie die Richtung oder der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ der Geschwindigkeit, so entspricht hier die Richtungsänderung oder der zweite Differentialquotient $\frac{d^2x}{dx^2}$ der Geschwindigkeitsänderung. Unter Befolgung des Permanenzprincips kann nun aber die nämliche Operation, durch welche aus dem ersten der zweite Differentialquotient hervorgegangen ist, beliebig wiederholt werden, und man gewinnt so die unbegrenzte Reihe der höheren Differentialquotienten $\frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4} \dots \frac{d^ny}{dx^n}$. Kann für dieselben auch eine anschauliche geometrische oder mechanische Bedeutung nicht mehr gefunden werden, so haben sie doch jedenfalls eine arithmetische Bedeutung, da, sobald man die Differentiation als eine reine Zahlenoperation auffasst, ihrer beliebigen Wiederholung keine Schranken gesetzt sind.

Mit dem so erweiterten Begriff des Differentials ist nun jene absolute Bedeutung, welche Leibniz demselben beizulegen geneigt war, nicht mehr zu vereinigen, sondern auf dem Boden der bisherigen geometrischen Betrachtungen bleibt nur noch der Begriff eines relativ unendlich Kleinen möglich, welcher zugleich die arithmetisch postulirte beliebige Wiederholung der Differentiation gestattet, da die Reihe der relativen Unendlichkeiten an und für sich keine Grenzen hat. Aber es gewinnt damit auch die Infinitesimalmethode jenen schon

oben berührten Charakter eines blossen Annäherungsverfahrens, welcher um so unbefriedigender ist, als die Voraussetzungen, aus denen er entspringt, offenbar der Richtigkeit entbehren. Denn eine Curve ist in Wirklichkeit nicht aus geraden Linien, eine veränderliche Bewegung nicht aus gleichförmigen Bewegungen von irgend einer wenn auch noch so geringen Ausdehnung zusammengesetzt. Dazu kommt, dass die Auffassung des zweiten und der höheren Differentialquotienten als unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung brauchbar ist, so lange es sich darum handelt, dieselben bloss gegen den ersten Differentialquotienten verschwinden zu lassen, dass aber diese Deutung ungenügend wird, sobald sie eine reale Bedeutung gewinnen. Der Begriff der Richtungsänderung zum Beispiel setzt zwar den der Richtung voraus, sicherlich aber wird durch die Annahme unendlich kleiner Grössen verschiedener Ordnung das Verhältniss beider Begriffe nicht zureichend bestimmt.

Diese Schwierigkeiten, welche die geometrische Deutung des unendlich Kleinen herbeiführt, sind nun auf das glücklichste vermieden in der eigenthümlichen Umgestaltung, die der geometrische Differentialbegriff in der in ihren Grundgedanken zuerst von Newton in seinen „mathematischen Principien der Naturphilosophie“ angegebenen und dann hauptsächlich durch Maclaurin und d'Alembert ausgebildeten so genannten Grenzmethode erfahren hat*). Der glückliche Griff dieser Umgestaltung des Leibniz'schen Verfahrens besteht darin, dass man bei ihr von einer beliebigen endlichen Differenz der Veränderlichen durch continuirliche Abnahme derselben auf den Grenzfall zurückgeht, wo die Differenz null wird, und dass man das Differential als diesen Grenzfall betrachtet. Geometrisch lässt sich auch dieser Betrachtung das charakteristische Dreieck zu Grunde legen; aber die Hypotenuse desselben ist die zwischen den Punkten $m$ und $n$ der Curve gezogene Sehne, und die trigonometrische Tangente des Winkels, welchen diese Sehne mit der Abscissenaxe bildet, wird durch den Differenzquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ bestimmt. Denkt man sich jetzt den Punkt $n$ dem $m$ näher und näher rücken und schliesslich mit demselben zusammenfallen, so geht für diesen Grenzfall die Sehne in die Tangente und der Differenzquotient in den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ über. Auch der zweite

*) Newton, Principia, liber I, sect. 1. Uebersetzung von Wolfers, S. 46.

Differentialquotient gewinnt auf diesem Wege unmittelbar seine geometrische Bedeutung, ohne dass es nöthig wird, die Annahme von unendlich kleinen Grössen einzuführen. Denn der zweite Differenzquotient $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ bezeichnet nun die für einen bestimmten endlichen Unterschied $\Delta x$ stattfindende Richtungsänderung der Curve. Lässt man wiederum den Punkt $n$ mit $m$ zusammenfallen, so stellt der für diesen Grenzfall zurückbleibende Differentialquotient $\frac{d^2 y}{dx^2}$ die Richtungsänderung der Curve im Punkte $m$ dar, ebenso wie der erste Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ die Richtung in diesem Punkte bedeutet hat.

Hiernach besteht die Grenzmethode theilweise in einer Umkehrung der Methode des unendlich Kleinen. Während man bei der letzteren die Veränderlichen von null an um eine unendlich kleine Grösse wachsen lässt, die gerade zureicht, um das Verhältniss ihres Wachsthums zu bestimmen, geht die Grenzmethode von einer beliebigen endlichen Zunahme der Veränderlichen aus, die sie allmählich bis auf null herabsinken lässt. Dadurch wird der Begriff des unendlich Kleinen umgangen. Es wird möglich, mit der nämlichen Strenge wie bei der Fluxionsmethode den Begriff der momentanen Aenderung festzuhalten, und es wird doch die für die Messung dieser Aenderung unerlässliche Vergleichung mit den vorangehenden oder nachfolgenden Zuständen ermöglicht. Die Grenzmethode vereinigt darum die Vortheile der Methoden von Newton und Leibniz, die begriffliche Strenge der ersteren und die grössere Allgemeinheit und praktische Brauchbarkeit der letzteren. Sie ist, wenn man von den Anwendungen des Differentialbegriffs ausgeht, die exacteste Begründung desselben. Denn sie wird den beiden Forderungen, dass die elementare Grössenänderung als eine streng momentane aufgefasst, und dass zur Bestimmung des Gesetzes derselben der gesammte Verlauf der Veränderung berücksichtigt werde, gleichmässig gerecht. Diesen Vorzügen verdankt die Grenzmethode den Sieg, den sie allmählich über alle andern Begründungsweisen des Differentialbegriffs davongetragen hat. Jenes Verfahren des Zurückgehens von einer gegebenen Differenz auf den Grenzfall, wo dieselbe null wird, das die Grenzmethode im Anschluss an geometrische Vorstellungen einschlägt, lässt nun aber eine Verallgemeinerung zu, indem man den nämlichen Vorgang in arithmetischer Form auffasst.

d. Der arithmetische Differentialbegriff.

Lässt man in einer Function $y = f(x)$ das Argument $x$ um endliche Intervalle wachsen, so dass es successiv die Werthe $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, $x + 3\Delta x \dots$ annimmt, so erscheint jene Gleichung als Ausdruck für das allgemeine Glied einer arithmetischen Reihe. Die Differenzen der einzelnen Glieder dieser Reihe bilden eine Differenzreihe, deren allgemeines Glied mit $\Delta y$ bezeichnet werden kann. Aus dieser lässt sich eine zweite Differenzreihe entwickeln mit dem allgemeinen Glied $\Delta^2 y$, u. s. w. Die Zahl der Differenzreihen und der ihnen entsprechenden abgeleiteten Functionen $\Delta y$, $\Delta^2 y \dots$ ist von der Beschaffenheit der ursprünglichen Function $y = f(x)$ abhängig. Ist diese z. B. vom ersten Grade, so wird schon $\Delta y$ constant, und demgemäss wird dann die zweite Differenz $\Delta^2 y$ und mit ihr jede höhere gleich null. Lässt man nun den Zuwachs $\Delta x$ des Arguments zu null werden, und bezeichnet man diese zum Verschwinden gebrachte Differenz $\Delta x$ mit $dx$, so gehen die abhängigen Differenzen $\Delta y$, $\Delta^2 y \dots$ ebenfalls in die verschwindenden Grössen $dy$, $d^2 y \dots$ über. Obgleich sie sämmtlich ihrem absoluten Werthe nach null sind, so werden doch die Verhältnisse, in denen sie zu einander stehen, im allgemeinen einen bestimmten numerischen Werth besitzen, da sie aus endlichen Grössen durch eine Operation von der Form $\frac{a}{\infty}$ hervorgegangen sind. (Vgl. S. 150.) Euler definirt daher die Differentiale als Grössen, deren arithmetisches Verhältniss stets gleich null sei, deren geometrisches Verhältniss aber jeden beliebigen Werth erreichen könne*).

Euler hat hierdurch zum ersten Mal klar darauf hingewiesen, dass von der Messung einer Differentialgrösse immer nur dann die Rede sein kann, wenn dieselbe zu andern Differentialgrössen in irgend ein Verhältniss gebracht wird. Von dieser Bemerkung datirt der vorwiegende Gebrauch des Differentialquotienten. Gleichwohl ist die Behauptung, dass das arithmetische Verhältniss aller Differentialgrössen dasselbe, nämlich gleich null sei, keine völlig correcte. Die Null ist ein Rechnungssymbol, welches jede beliebige verschwindende Grösse bezeichnen kann. Nur aus diesem Grunde ist es mög-

---

*) Leonhard Euler, Institutiones calculi differentialis, Petrop. 1755, Cap. I—IV.

lich, dass ein Quotient $\frac{dy}{dx}$, obgleich er nach dem absoluten Werth seines Zählers und Nenners in der That durch den Bruch $\frac{0}{0}$ ausgedrückt wird, dennoch einen bestimmten endlichen Werth annehmen kann. Das Wahre von Eulers Bemerkung liegt also darin, dass die Division die einzige Operation ist, durch welche die Beziehungen verschwindender Grössen zu einander bestimmt werden können. Aber der Umstand, dass solche Beziehungen von verschiedener Art existiren, beweist eben zugleich, dass arithmetisch die Bedeutung der verschwindenden Grössen eine verschiedene ist, oder dass mit andern Worten diejenige Null, die eine verschwindende Grösse $a$ repräsentirt, eine andere Bedeutung hat als die Null, die als Resultat einer Operation $a - a$ zurückbleibt. Im ersteren Fall kann daher nicht bloss ein Quotient $\frac{0}{0}$ einen bestimmten Werth, sondern auch eine Gleichung $0 = 0$ einen bestimmten Sinn haben.

Der arithmetische Differentialbegriff führt nun von selbst zu einer neuen Auffassung, sobald man den Gesichtspunkt, auf den derselbe gegründet ist, verallgemeinert. Betrachtet man nämlich die auf einander folgenden Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3} \ldots$ als die Werthe, in welche die Differenzquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}, \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}, \frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} \ldots$ übergehen, wenn $\Delta x = 0$ wird, so muss auch das Verhältniss jener Differentialquotienten zu einander conform sein dem Verhältniss dieser Differenzquotienten. Nun lassen sich aber $\Delta y, \Delta^2 y, \Delta^3 y$ . . als Functionen betrachten, welche von der ursprünglichen Function $y = f(x)$ abhängen, insofern dieselben die allgemeinen Glieder derjenigen Differenzreihen bezeichnen, die zu der durch die Function $y = f(x)$ ausgedrückten Hauptreihe gehören. Demnach haben auch die Differenzquotienten und die Differentialquotienten die Bedeutung abgeleiteter Functionen, und speciell die letzteren bilden denjenigen Specialfall, wo in der ursprünglichen Function ein stetiges Wachsthum der Veränderlichen vorausgesetzt wird. Auf diese Weise führt die arithmetische Betrachtung, sobald man an die Stelle des Begriffs der Operation den allgemeinen der Function treten lässt, direct über zu der letzten Gestaltung des Differentialbegriffs, zu der derivirten Function.[1]

### e. Der Begriff der derivirten Function.

Geht man von dem allgemeinsten Begriff der Analysis, von dem Begriff der Function aus, so lässt sich die Aufgabe der Infinitesimalmethode dahin feststellen, dass sie die stetigen Veränderungen der Function $y = f(x)$ für jede beliebige Veränderung des Argumentes ermittelt, dass sie also, wenn allgemein die letztere durch $\Delta x$ bezeichnet wird, die Umwandlung feststellt, die sich mit der Function $f(x)$ vollzieht, wenn dieselbe in die Function $f(x + \Delta x)$ übergeht. Da $\Delta x$ alle möglichen Werthe von null an bis zu jeder beliebigen endlichen Grösse bedeuten kann, so sind, wenn diese Aufgabe auf analytischem Wege lösbar ist, alle Schwierigkeiten vermieden, welche bei den sonstigen Begründungen des Differentialbegriffs entweder die Annahme einer bloss momentanen Aenderung oder der Uebergang von einer endlichen zu einer verschwindenden Differenz bereitet. Lagrange ist es nun gelungen, jene Aufgabe zu lösen, indem er sich dabei des allgemeinen Satzes der Analysis bedient, dass jede Function in der Form einer Reihe dargestellt werden kann, die nach aufsteigenden Potenzen der Veränderlichen fortschreitet*). Wir haben früher gesehen, dass dieser Satz aus der Zerlegung der Function in die arithmetischen Operationen, durch die sie entstanden ist, hervorgeht, und dass, da die Zahl dieser Operationen nur unter gewissen beschränkenden Bedingungen eine begrenzte ist, als die allgemeinste Functionsform eine unendliche Reihe von der angegebenen Beschaffenheit angesehen werden muss (S. 209). Im gegenwärtigen Falle handelt es sich nun darum, zu bestimmen, wie die Function $f(x)$ sich verändert, wenn sie durch ein bestimmtes Wachsthum der Veränderlichen in eine Function $f(x + \Delta x)$ übergeht. Da hier nicht mehr $x$ selbst, sondern der Zuwachs $\Delta x$ als die willkürlich Veränderliche betrachtet wird, so ist es offenbar gerechtfertigt, diese Function nach aufsteigenden Potenzen von $\Delta x$ in eine Reihe zu entwickeln, welche die Form annimmt

$$A + B\Delta x + C\Delta x^2 + D\Delta x^3 \ldots$$

Hierin bezeichnen $A$, $B$, $C$ . . . unbestimmte Coëfficienten, welche Functionen von $x$ sind. Die von $\Delta x$ freie Grösse $A$ ist aber offenbar $= f(x)$, weil, wenn $\Delta x = 0$ wird, auf der rechten Seite alle

*) Lagrange, Leçons sur le calcul des fonctions. Nouv. Édit. Paris 1806. Théorie des fonctions analytiques. Paris an V. Prem. part.

Glieder ausser dem ersten verschwinden und die Gleichung $f(x) = A$ übrig bleibt. Da die weiteren Coëfficienten $B, C, D \ldots$ ebenfalls irgend welche Functionen von $x$ sind, so erhält man demnach für die ursprüngliche Reihe die Form

$$f(x) + \Delta x \,.\, \varphi(x) + \Delta x^2 \,.\, \psi(x) + \Delta x^3 \,.\, \chi(x) \ldots$$

worin $\varphi, \psi, \chi \ldots$ die Bedeutung von Functionszeichen besitzen. Um das Verhältniss dieser abgeleiteten Functionen zu einander festzustellen, bedient sich Lagrange des Kunstgriffs, dass er in die Function $f(x + \Delta x)$ einen neuen Zuwachs $\delta$ einführt und die so entstehende neue Functionsform $f(x + \Delta x + \delta)$ in doppelter Weise entwickelt, einmal nämlich unter der Voraussetzung, dass $\delta$ ein Zuwachs von $x$, und sodann unter der Voraussetzung, dass es ein Zuwachs von $\Delta x$ sei. Da die Coëfficienten gleicher Glieder in beiden Reihen einander gleich sein müssen, so ergeben diese Entwicklungen eine Anzahl von Coëfficientengleichungen, aus denen sich das gesuchte Verhältniss der Functionen $\varphi(x), \psi(x), \chi(x) \ldots$ bestimmen lässt. Dieses Verhältniss findet seinen Ausdruck in der schliesslich für die Function $f(x + \Delta x)$ gewonnenen Reihe

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \,.\, f'(x) + \frac{\Delta x^2}{1 \,.\, 2} f''(x) + \frac{\Delta x^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} f'''(x) + \ldots,$$

in welcher die Functionen $f'(x), f''(x), f'''(x) \ldots$ dem Gesetze folgen, dass jede aus der ihr vorangegangenen in übereinstimmender Weise gebildet ist. Dieses Gesetz für die auf einander folgenden derivirten Functionen ist aber das nämliche, welches die Bildung der Differentialquotienten beherrscht. Denn es ist, wie wir sahen, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\frac{dy}{dx}}{dx}$ oder allgemein $\frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}}{dx}$. Die derivirten Functionen erster, zweiter, dritter ... Ordnung sind also mit den Differentialfunctionen entsprechender Ordnung identisch.

Der Werth dieser Ableitung besteht in dem unmittelbar mit Hülfe des Functionsbegriffs geführten Nachweis, dass der Differentialbegriff selbst ein Functionsbegriff ist, der sich überall da mit Nothwendigkeit ergibt, wo in die Function der Begriff der stetigen Veränderung eingeführt wird. Bei den vorangegangenen Begründungen des Differentialbegriffs ergibt sich diese Bedeutung desselben immer erst indirect, insofern man die geometrischen oder arithmetischen Beziehungen dem Begriff der Function unterordnet. Vor allem aber wird durch diese Ableitung das Verhältniss der Differentialien ver-

schiedener Ordnung zu einander in exacter Weise bestimmt. Das Wesen der Infinitesimalmethode besteht jetzt darin, dass eine stetig veränderliche Function in die ursprüngliche Function und in eine an sich unbegrenzte Zahl aus ihr abgeleiteter Functionen zerlegt wird, die nach einem und demselben Gesetze successiv aus einander hervorgehen. Es tritt hierdurch sofort die nahe Beziehung hervor, in welcher der Infinitesimalbegriff zu dem Begriff des Irrationalen steht, der aus den nächstliegenden Anwendungen der Zahl auf stetige Grössen hervorgegangen ist. Wie die stetige Grösse nur durch eine unbegrenzte Anzahl von Divisionen arithmetisch gemessen werden kann, so ist die stetig veränderliche Function nur durch die Ableitung einer an sich unbegrenzten Anzahl von derivirten Functionen zu erschöpfen. Auf diese Weise gewinnen sofort die Differentialquotienten höherer Ordnung ihre berechtigte Bedeutung, während die phoronomische und die geometrische Begründung des Differentialbegriffs allein dem ersten und zweiten einen bestimmten Sinn unterzulegen im Stande sind. Nur die arithmetische Auffassung der Differentiale als verschwindender Differenzen verschiedener Ordnung erreicht in dieser Beziehung die Methode der Derivation an Allgemeinheit, da sie in der That nichts anderes als eine Umkehrung derselben ist, die von den Operationen, welche die Function erzeugen, statt von dieser selbst ausgeht. In Folge der rein arithmetischen Auffassung der Operationen leidet aber jene Methode an dem Uebelstand, dass sie nur das quantitative Verhältniss der Differentialquotienten verschiedener Ordnung zur Geltung bringt, indem sie dieselben analog den Differenzen verschiedener arithmetischer Reihen behandelt. Auch diesen Mangel beseitigt der Begriff der derivirten Function. Er vereinigt in sich die qualitative und die quantitative Bedeutung, die dem Differentialquotienten beigelegt werden kann. Die Richtung der Tangente an dem Punkt einer Curve ist abhängig von dem Gesetz, welches den allgemeinen Verlauf derselben angibt, d. h. sie ist eine aus der ursprünglichen Function, die durch die Curve repräsentirt wird, abgeleitete Function; ihrem arithmetischen Werthe nach betrachtet ist aber die letztere zugleich eine verschwindende Grösse. Die Richtungsänderung ferner ist zunächst abhängig von der Richtung, also eine aus der ersten derivirten Function abermals derivirte, und ihrem arithmetischen Werthe nach eine verschwindende Grösse zweiter Ordnung*).

---

*) Lagrange, Théorie des fonctions analytiques, p. 118.

Ist auf diese Weise der Begriff der derivirten Function die correcteste Gestaltung des Infinitesimalbegriffs, so entbehrt dagegen die ursprüngliche Begründung desselben theils der Anschaulichkeit, theils der leichten Anwendbarkeit. Zur vollständigen Erfassung des Wesens der Infinitesimalmethode ist daher seine Verbindung mit den eigentlichen Differentialbegriffen, namentlich mit dem arithmetischen und dem auf geometrische Anschauungen gestützten Grenzbegriff erforderlich. Wie überhaupt die Einsicht in das Wesen einer Function durch die Erkenntniss der arithmetischen Operationen, die zu ihr geführt haben, vermittelt wird, so bildet die arithmetische Ableitung der Differenzquotienten den angemessensten Weg für die Entwicklung der Differentialquotienten verschiedener Ordnung. Die Anwendung dieser Operationen auf räumliche Grössen liefert sodann ein anschauliches Bild der Bedeutung, welche die gewonnenen Begriffe besitzen können, und der Nachweis, dass die Resultate der arithmetischen Operationen dem Functionsbegriff unterzuordnen sind, stellt schliesslich diese Bedeutung in einer allgemeingültigen Form fest.

## 3. Das Princip der Integration.

In dem Wesen einer jeden mathematischen Operation liegt es begründet, dass sie eine Umkehrung zulässt. Denn bei jeder Operation werden gegebene Grössen oder Grössenverbindungen nach einem bestimmten Gesetz in andere übergeführt. Vermöge der Constanz der befolgten Regel muss aber ein solches Verfahren umkehrbar sein. Kann irgend ein mathematischer Ausdruck $A$ durch eine Operation $f_1$ in einen andern Ausdruck $B$ übergehen, so gibt es also stets eine umgekehrte Operation $f_2$, durch welche $B$ wieder in $A$ übergeht. Doch muss dabei sogleich bemerkt werden, dass, wenn auch die erste Operation ein eindeutiges Resultat ergibt, darum das Ergebniss der zweiten nicht nothwendig ebenfalls eindeutig ist, sondern dass es von der Beschaffenheit jener Regel abhängt, welche die beiden Ausdrücke mit einander verknüpft, ob man aus $B$ nothwendig $A$ wieder gewinnen muss, oder ob man dasselbe nur neben einer unbestimmten Anzahl anderer Resultate wiedergewinnen kann.

Von den einfachsten arithmetischen Operationen an ist uns dieses Verhältniss der Umkehrbarkeit immer wieder begegnet. In der Analysis hat sich dasselbe in der wechselseitigen Beziehung ge-

wisser Functionsformen, der Exponentialfunctionen und Logarithmen, der trigonometrischen und der cyklometrischen Functionen, erneuert, und in dem letzteren Fall ergab sich bereits, dass die Umkehrung zu einem vieldeutigen Resultate führen kann. Da nun, wie die Entwicklung des Differentialbegriffs gelehrt hat, die Operation des Differenzirens stets aus einer gegebenen Function eine neue erzeugt, die mit der ursprünglichen nach einem bestimmten Gesetze zusammenhängt, so muss auch hier eine inverse Operation existiren, die aus den abgeleiteten Functionen die ursprünglichen wieder herstellt. Diese inverse Operation ist die Integration.

Die nähere Bestimmung des Begriffs der Integration ist durchaus von der Anschauung abhängig, von welcher man bei der Bildung des Differentialbegriffs ausgeht. Indem die Fluxionsmethode die veränderliche Grösse unter dem Bild der abstracten Bewegung darstellt, werden ihr der Differential- und der Integralbegriff zu den einander entgegengesetzten Formen des Bewegungsproblems. Das Differenziren einer Function entspricht der Aufgabe: aus dem Raum, der bei einer nach einem bestimmten Gesetz erfolgten Bewegung zurückgelegt wurde, für jeden Zeitpunkt die momentane Geschwindigkeit zu finden; die Integration löst die umgekehrte Aufgabe: wenn die momentane Geschwindigkeit für jeden Zeitpunkt gegeben ist, den Raum zu finden, welcher durchlaufen wurde. Indem auf diese Weise die Fluxionsmethode nur die Verschiedenheiten der Veränderlichen betont, um deren Bestimmung im einen und im andern Fall es sich handelt, kommen bei ihr die fundamentalen Gegensätze der Operationen selbst nicht zur hinreichenden Geltung; sie verbergen sich hinter der nebenhergehenden Bemerkung, dass die Geschwindigkeit eine momentane, der Raum dagegen eine ausgedehnte Grösse ist.

Von diesem letzteren Gegensatze geht nun die Methode des unendlich Kleinen aus. Ihre Auffassung der beiden Operationen ist daher zunächst von dem Werth der Grössen bestimmt, welche aus diesen Operationen hervorgehen. Bedeutet das Differential eine unendlich kleine Grösse, so entspricht das Integral einer endlichen Grösse, und da man sich vorstellt, dass aus der Verbindung einer unendlich grossen Zahl unendlich kleiner Grössen eine endliche Grösse entstehen kann, so wird der Process der Integration zu einer speciellen Form der Summation, von der gewöhnlichen Summenbildung nur durch die beiden Bedingungen verschieden, dass die einzelnen Elemente keinen messbaren Werth besitzen, und dass die Zahl der

Verbindungen keine begrenzte ist. In so anschaulicher Weise aber auch diese Auffassung von den einfachsten Anwendungen der Integralrechnung Rechenschaft gibt, so leidet sie doch an der Ungenauigkeit des Differentialbegriffs, auf den sie sich stützt, und sie schiebt deshalb der Differentiation und Integration in Wirklichkeit andere Operationen unter, nämlich die Subtraction und die Addition.

Diese trotz der nützlichen Symbolik, welche von ihnen ausgegangen ist, unzureichenden Anlehnungen an die arithmetischen Elementaroperationen werden nun durch die Grenzmethode und die ihr verwandte exactere Fassung des arithmetischen Differentialbegriffs unmöglich gemacht. Bezeichnet der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ das Verhältniss der Function $y = f(x)$ zu ihrem Argumente $x$ für den Fall, dass Function und Argument beide verschwinden, entspricht darum jener Quotient stets einem Bruch $\frac{0}{0}$, so kann der Rückgang zu der ursprünglichen Function unmöglich ein Verfahren der Addition sein. Es muss vielmehr die Integration ebenso gut als eine Operation von specifischer Beschaffenheit angesehen werden wie die Differentiation, deren Umkehrung sie ist. Aus diesem Grunde hat Euler in der That geglaubt, die Definition der Integration dahin beschränken zu sollen, dass sie eine Umkehrung der Differentiation sei. Auf keinen Fall aber, meinte er, sei der Begriff der Summe zulässig, denn eine Summe von Nullwerthen müsse ebenfalls gleich null sein. Auch dieser Einwand steht jedoch unter dem Vorurtheil der unmittelbaren Anlehnung an die arithmetischen Elementaroperationen, und er vermengt überdies die zwei specifisch verschiedenen Bedeutungen des Nullbegriffs. Gehen wir von der geometrischen Bedeutung des Grenzbegriffs aus, so wird, da man bei demselben die Distanz zwischen zwei Punkten $m$ und $n$ einer Curve zu null werden liess, die Umkehrung des Verfahrens darin bestehen, dass man jene Distanz von null an bis zu einem gegebenen endlichen Werthe wiederum wachsen lässt. Will man ein solches Wachsthum als eine Addition auffassen, so ist diese von der gewöhnlichen doch insofern wesentlich verschieden, als die zu bildende Summe durch das stetige Durchlaufen aller möglichen Zwischenwerthe erreicht wird. Es bleibt eben in dem Integral der Begriff der Summe in dem nämlichen Sinne als ein Grenzbegriff erhalten, in welchem auch das Differential als Grenze der Differenz erscheint. Das Integral ist nicht eine Summe von Grenzwerthen, sondern vielmehr der Grenzwerth einer Summe

von Differenzen. Obgleich daher auch diese Auffassung die Integration an die Summation anlehnt, so bietet sie doch den Vorzug, dass sie zugleich die wesentlichen Unterschiede von der arithmetischen Addition hervorhebt. Diese Unterschiede bestehen einerseits in dem stetigen Wachsthum des Integrals, anderseits darin, dass jedes Integral ein bestimmtes Gesetz des Wachsthums einer Function repräsentirt. Beide Unterschiede sind so tiefgreifend, dass nur noch die quantitative Zunahme als der wesentliche Punkt der Uebereinstimmung zurückbleibt. Sie führen zugleich auf die allgemeinste Bedeutung des Integralbegriffs. Diese besteht aber darin, dass die Integration die Herstellung der ursprünglichen aus einer abgeleiteten Function ist.

Eine jede Function enthält den mathematischen Ausdruck eines Gesetzes, welches verschiedene theils veränderliche, theils constante Grössen mit einander verbindet. Das Integral und der Differentialausdruck, da sie beide unter den Begriff der Function fallen, stellen daher Gesetze dar, die einander so zugeordnet sind, dass, wenn das eine gegeben ist, das andere gefunden werden kann. Für die nähere Beschaffenheit dieses Verhältnisses der Zuordnung ist aber die Thatsache bezeichnend, dass die Differentialfunctionen sich darauf beschränken, die Abhängigkeitsbeziehungen zwischen den veränderlichen Grössen, die in dem Functionsausdruck vorkommen, festzustellen, während die Integralfunction ausser den veränderlichen noch constante Grössen als wesentliche Bestandtheile enthält. Hiernach hat die Differentialfunction eine allgemeinere, die Integralfunction eine speciellere Bedeutung: in dieser wird durch den Hinzutritt der constanten Grössen das in dem Differentialausdruck enthaltene Gesetz näher determinirt. Eine nothwendige Folge dieser Determination ist es dann, dass auch die veränderlichen Grössen bestimmte absolute Werthe annehmen, während der Differentialausdruck nur das Gesetz ihrer relativen Aenderungen angibt und sie darum ihrem absoluten Werthe nach als verschwindende Grössen behandelt. Somit kehrt hier die logische Beziehung zwischen den beiden Infinitesimalbegriffen in gewissem Sinne im Vergleich mit den vorangegangenen Ableitungen sich um. Bei der Grenzmethode erscheint das Auftreten der Constanten im Integralausdruck als eine Consequenz des stetigen Wachsthums der Veränderlichen. Ein solches Wachsthum kann nur dann einem bestimmten Mass unterworfen werden, wenn es sich zwischen gewissen Grenzen vollzieht, und diese Grenzen sind es daher, die den Werth der Constanten bestimmen. Betrachtet man

dagegen den Differential- und den Integralausdruck als Functionsformen, denen ein übereinstimmendes Gesetz zu Grunde liegt, so erscheint die Thatsache, dass in der ersten dieser Formen die absoluten Werthe der Veränderlichen unbestimmt sind oder verschwinden, erst als eine Folge der Allgemeinheit des Functionsverhältnisses. Beide Auffassungen stehen natürlich nicht im Widerspruch, sie ergänzen einander, und zu einer erschöpfenden Bestimmung dieser Functionsbegriffe sind sie darum beide erforderlich. Die Differentiation und die Integration sind, von diesem allgemeinsten Standpunkte aus aufgefasst, Functionsoperationen von entgegengesetzter Richtung. Die Differentiation ist diejenige Operation, durch die zu einer gegebenen Function die allgemeine Function gesucht wird, welche die der ersteren entsprechende Beziehung zwischen dem Wachsthum der veränderlichen Grössen losgelöst von jeder Anwendung auf bestimmte einzelne Fälle angibt. Die Integration dagegen ist diejenige Operation, durch welche aus einem abstracten bloss das Gesetz des Wachsthums der Veränderlichen enthaltenden Ausdruck der Werth der Function gesucht wird, die in irgend welchen einzelnen Fällen jenem Wachsthumsgesetz der Veränderlichen entspricht.

Die von Lagrange gewählten Namen der primitiven und der derivirten Function bezeichnen nun das Verhältniss beider Functionsformen insofern zutreffend, als sie andeuten, dass zwar die Differentiation, die Herstellung der derivirten Function, ein nach selbständigen Regeln vor sich gehendes Verfahren ist, nicht aber ihre Umkehrung, die Integration. Denn die Integrale gegebener Differentialfunctionen können nur mittelst der Beziehungen gegebener Functionen zu ihren Differentialformeln gefunden werden. In dieser letzteren Eigenschaft gleicht die Integration den inversen Operationen der Arithmetik. Da jede Zahl nur durch eine Addition definirbar ist, welche schliesslich auf die Addition von Einheiten zurückführt, so folgt von selbst, dass die Subtraction keine selbständige Operation ist. Sie wird es auch dann nicht, wenn sich durch sie negative Zahlen ergeben. Denn die Verbindungen dieser sind wiederum bloss Additionen unter geänderten Vorzeichen. Aehnlich ist das Verhältniss der Multiplication zur Division, der Potenzirung zur Radicirung und der Exponentialfunctionen zu den Logarithmen. Nur in dem einen Punkte unterscheiden sich die Infinitesimalfunctionen, dass bei ihnen nicht die synthetische Operation als die selbständige erscheint und die analytische als die von ihr abhängige Ergänzung, sondern umgekehrt. Obgleich also

die Differentiation das der Subtraction und Division, die Integration das der Addition und Multiplication analoge Verfahren ist, so besitzt gleichwohl in diesem Falle nur die analytische Operation einen selbständigen Algorithmus, auf dessen Resultate auch die synthetische angewiesen ist. Dieser Unterschied hat seinen Grund in dem Problem der stetigen Aenderung, von dem die Infinitesimalmethode ausgeht. Indem ihre nächste Aufgabe darin besteht, diesen Begriff der stetigen Aenderung zu fixiren, kann sie hierzu nur durch ein analytisches Verfahren gelangen, welches so zur Grundlage aller weiteren Methoden wird. Der analytische Ausgangspunkt wird aber hier ausserdem dadurch ermöglicht, dass die Infinitesimalrechnung ein Functionencalcul ist, der die Existenz der verschiedenen elementaren Functionsformen voraussetzt, während diese durch die niederen arithmetischen Operationen erst erzeugt werden müssen.

Wir sahen, dass der Differentialausdruck, da er nur die Beziehung zwischen den Veränderlichen enthält und überdies von bestimmten Werthen der letzteren ganz abstrahirt, stets eine allgemeinere Bedeutung besitzt als die Function, aus der er abgeleitet ist. Aus diesem Grunde kann aus verschiedenen der nämlichen Functionsform angehörenden Gleichungen ein und derselbe Differentialausdruck erhalten werden, und es gewinnt so das Integral, das man aus einem solchen Differentialausdruck durch Umkehrung ableitet, zunächst eine unbestimmte Bedeutung. Das äussere Zeichen der letzteren ist die willkürliche Constante, die dem allgemeinen Integral beigefügt werden muss. Indem dieser Constanten jeder beliebige Werth gegeben werden kann, repräsentirt das unbestimmte Integral eine unendliche Zahl von Gleichungen einer und derselben Functionsform, die sämmtlich unter dem nämlichen Differentialausdruck enthalten sein können. Wo die Integration auf concrete Probleme angewandt wird, da muss deshalb entweder vermöge der Natur des Problems von vornherein der Werth der unbestimmten Constanten fixirt sein, oder es muss die Aufgabe der Integration dadurch beschränkt werden, dass man das durch einen allgemeinen Differentialausdruck $f(x)\,dx$ angegebene Gesetz der Veränderung nur zwischen gewissen Grenzen $x_0$ und $x_n$ des Argumentes $x$ bestimmen will. Es geht dann das unbestimmte Integral $\int f(x)\,dx$ in das bestimmte Integral $\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$ über. Für die Anwendungen des Integrationsverfahrens sind die bestimmten Integrale von überwiegender Wichtigkeit, theils weil man durch

concrete Aufgaben in der Regel auf sie geführt wird, theils weil gewisse ausgezeichnete Formen derselben als Hülfsfunctionen Verwendung finden, welche die Lösung ganzer Classen von Problemen vermitteln helfen.

## 4. Die Anwendungen der Infinitesimalmethode.

Das Gebiet der Anwendungen der Infinitesimalmethode reicht so weit, als stetige Veränderungen, die bestimmten Gesetzen folgen, der mathematischen Untersuchung gegeben sind. Da dem nämlichen Gebiet zugleich die wichtigsten Anwendungen des Functionsbegriffs angehören, so empfängt dieser erst durch die Entwicklungen der Infinitesimalmethode seine Vollendung. Das Kriterium der Stetigkeit einer Function besteht darum auch in der Regel in ihrer Differenzirbarkeit oder in der Möglichkeit, die Beziehungen des Wachsthums der Veränderlichen in der Form von Differentialgleichungen darzustellen. Eine solche Differentialgleichung pflegt die veränderlichen Grössen und ihre Differentialverhältnisse in irgend welchen Verbindungen zu enthalten. Die Differentialgleichung erster Ordnung einer Function zwischen zwei Veränderlichen $x$ und $y$ hat daher die allgemeine Form

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Die Aufgabe ihrer Auflösung besteht regelmässig darin, dass dieselbe in eine Gleichung zwischen dem Differentialquotienten einerseits und den Veränderlichen anderseits übergeführt wird, so dass sie in eine Gleichung von der Form

$$\frac{dy}{dx} = \varphi\,(x, y)$$

übergeht. Ersteres ist die unentwickelte, letzteres die entwickelte Form. Alle Differentialformeln der einfachen Functionen gehören dieser entwickelten Form an, und die Aufgabe der Auflösung der Differentialgleichungen besteht darum allgemein in der Zurückführung auf einfache Differentialformeln und ihre Verbindungen. Die einfachste Deutung, welche einer solchen Differentialformel gegeben werden kann, ist die geometrische. Es bezeichnet dann jede Differentialgleichung zwischen zwei Veränderlichen das allgemeine Gesetz einer ebenen Curve, welches ein ganzes System einzelner Curven unter

sich begreift, für die sämmtlich die Relation $\frac{dy}{dx}$, d. h. das beziehungsweise Wachsthum der Coordinaten für einen beliebigen Punkt der Curve, wie es durch die Richtung der Tangente angegeben wird, ein übereinstimmendes ist. Aehnlich hat eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen zwei Veränderlichen allgemein die Form

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0,$$

und sie fordert als Lösung die entwickelte Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Auch durch sie wird ein Gesetz ausgedrückt, welches einer unendlichen Zahl ebener Curven gemeinsam ist. Denn sie stellt das Gesetz fest, nach welchem für ein gewisses System von Curven die Gestalt derselben in jedem einzelnen Punkt abhängig ist einerseits von dem beziehungsweisen Wachsthum der Coordinaten und anderseits von der Richtung der Curve oder ihrer Tangente an dem betreffenden Punkte. Es ist klar, dass dieses Gesetz von noch allgemeinerer Natur ist als das vorangegangene. Denn unter der unendlichen Zahl von Curven, für welche die Differentialgleichung erster Ordnung ein gemeinsames Richtungsgesetz angibt, wird sofort eine einzelne vollständig bestimmt, wenn für einen einzelnen Werth von $x$ der zugehörige Werth von $y$ angegeben, d. h. wenn irgend ein einzelner Punkt der Curve seiner absoluten Lage nach festgestellt wird. Dagegen wird aus der ebenfalls unendlichen Zahl von Curven, für welche die Differentialgleichung zweiter Ordnung ein gemeinsames Krümmungsgesetz angibt, eine einzelne Curve erst dann vollständig determinirt, wenn nicht nur ein Punkt der Curve durch die betreffenden Werthe von $x$ und $y$, sondern auch ihre Richtung an diesem Punkte in der Form des Quotienten $\frac{dy}{dx}$ bekannt ist. Auf diese Weise gelangt man mit dem Uebergang zu Differentialgleichungen höherer Ordnung zu Gesetzen von immer grösserer Allgemeinheit. Es hängt aber selbstverständlich ganz und gar von der Bedeutung der Veränderlichen ab, bis zu welcher Stufe der Allgemeinheit überhaupt fortgeschritten werden kann. Eine ebene Curve lässt ein allgemeineres Gesetz als dasjenige der Richtungsänderung, das durch die Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen den beiden Coordinaten dargestellt wird, überhaupt nicht mehr zu. Nehmen wir jedoch an, es

sei irgend ein Substrat gegeben, welches, analog der Ebene, nach zwei von einander unabhängigen Richtungen wachsen kann, und welches ausserdem in jedem Punkt qualitative Differenzen verschiedener Ordnung in sich schliesse, so dass für jeden Punkt ein stetiger Wechsel verschiedener Qualitäten möglich sei, für jede dieser Qualitäten wieder ein solcher, u. s. w., so würden offenbar je nach der Zahl qualitativer Unterordnungen für die erschöpfende Feststellung der Gesetze eines solchen Continuums Differentialgleichungen dritter, vierter und selbst noch höherer Ordnung erforderlich werden können. Begrifflich hat demnach dieser Fortschritt überhaupt keine Grenzen. Doch bringen es die Bedingungen unserer Raumanschauung mit sich, dass bei den Anwendungen der Infinitesimalmethode Differentialgleichungen höherer Ordnung nur in gewissen Ausnahmefällen vorkommen.

Wenn wir hier das Verhältniss der Differentialgleichungen verschiedener Ordnung als ein solches der aufsteigenden Begriffsallgemeinheit bezeichnet haben, so darf übrigens dasselbe nicht als äquivalent einer logischen Ueber- und Unterordnung von Gattungs- und Artbegriffen gedacht werden. Die Richtungsänderung lässt sich nicht schlechthin als der allgemeinere Begriff zu demjenigen der Richtung auffassen. Denn es trifft zwar zu, dass ein und dasselbe Gesetz der Richtungsänderung gültig bleiben kann, auch wenn man die Richtung, deren Aenderung bestimmt wird, mannigfach wechseln lässt, aber dabei sind doch beide Begriffe gerade dadurch verschieden, dass sich das charakteristische Element, das den höheren Begriff auszeichnet, in dem engeren nicht wiederfindet. Die Verschiedenheit der Begriffsallgemeinheit, um die es sich hier handelt, entspringt daher nicht aus einer einfachen Begriffssubsumtion, sondern sie gründet sich auf den Umfang der Geltung des in der Differentialgleichung formulirten Gesetzes. Wir nennen ein Gesetz dann allgemeiner, wenn die Zahl der Fälle, auf die es sich erstreckt, grösser ist. Unzweifelhaft ist darum ein solches Gesetz, welches ein anderes in sich schliesst, im Verhältniss zu diesem stets das allgemeinere, obgleich es neue Begriffselemente enthalten kann, welche in dem engeren Gesetz durchaus nicht vorgesehen sind.

Eine fernere Erweiterung erfährt die Bedeutung der Differentialgleichungen, wenn sie sich auf mehr als auf zwei veränderliche Grössen beziehen. Dieser Fall ist mathematisch dadurch ausgezeichnet, dass er eine unmittelbare Zurückführung auf die Differentialformeln einfacher Functionen nicht gestattet, weil das vollständige Differential

einer solchen zusammengesetzteren Function stets nur durch eine Summe von Theildifferentialen sich darstellen lässt. Gehen wir nämlich von der Function zwischen drei Veränderlichen $x$, $y$ und $z$ aus, so wird der Werth irgend einer der letzteren immer erst dann eindeutig bestimmt sein, wenn die zugehörigen Werthe der beiden andern gegeben sind. Es können darum in solchen Fällen stets zwei der Veränderlichen, z. B. $x$ und $y$, als gleichzeitige Argumente betrachtet werden, deren Function die dritte Veränderliche $z$ ist. Die Differentialgleichung einer solchen Function muss dann aber offenbar zwei Differentialquotienten enthalten, einen ersten, welcher die Veränderung von $z$ in Beziehung auf $x$, und einen zweiten, welcher die Veränderung in Beziehung auf $y$ bestimmt. Diese Quotienten $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$, bei denen nach dem Vorgang von Jacobi das Zeichen $\partial$ statt des für die vollständigen Differentiale gebrauchten $d$ eingeführt ist, sind die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung der Function $z = f(x, y)$, Dem vollständigen Differential dieser Function wird daher auch die Form gegeben:

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy.$$

Geometrisch bezeichnet die ursprüngliche Functionsbeziehung zwischen $x$, $y$ und $z$ eine Fläche im Raum, die man sich durch $x$ und $y$ als horizontale Abscissen und durch $z$ als verticale Ordinate bestimmt denken kann. Die partielle Differentialgleichung erster Ordnung, in welcher $\partial z$ als der Zähler, $\partial x$ und $\partial y$ als die Nenner der Differentialquotienten erscheinen, bezeichnet demnach das allgemeine Gesetz der Richtung einer solchen Fläche, wie sie durch die an jeden Punkt gelegte tangirende Ebene bestimmt ist; die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung aber bezeichnet die von Punkt zu Punkt stattfindende Richtungsänderung dieser Fläche. In Folge der räumlichen Bedeutung, die sich den partiellen Differentialgleichungen zwischen drei Veränderlichen beilegen lässt, bilden diese das allgemeine Hülfsmittel zur Darstellung der Naturvorgänge und als solches eines der wichtigsten Werkzeuge der mathematischen Physik*).

Auch in Folge der steigenden Zahl der Veränderlichen, welche die Differentialgleichungen enthalten, erweitert sich ihre Allgemein-

*) Vgl. Riemann, Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. Einl.

heit. Die Differentialgleichung mit $n$ Veränderlichen enthält diejenige mit $n - 1$ Veränderlichen als einen speciellen Fall in sich, welcher dann aus ihr hervorgeht, wenn irgend eine der Veränderlichen als constant angenommen wird. Aber die hier sich ergebende Begriffsallgemeinheit ist von anderer Beschaffenheit als diejenige, die aus der verschiedenen Ordnung der Differentialgleichungen entspringt. Während im letzteren Fall das Gebiet des Gesetzes dasselbe bleibt, aber der Umfang seiner Bedeutung und demzufolge auch sein logischer Inhalt sich verändert, ist es umgekehrt das Gebiet der Anwendungen des Gesetzes, das mit der steigenden Anzahl der Veränderlichen zunimmt. So verwandelt sich das nämliche Gesetz, welches in der Form einer Differentialgleichung zwischen zwei Veränderlichen die Tangente einer ebenen Curve bestimmt, in ein Gesetz für die tangirende Ebene einer krummen Oberfläche, wenn es auf drei Veränderliche ausgedehnt wird. Auch hier trägt aber diese wachsende Begriffsallgemeinheit einen durchaus specifischen Charakter an sich, durch den sie sich von sonstigen logischen Ueberordnungen unterscheidet. Ein $n$-fach ausgedehntes Gebiet ist dem Gebiet von der Ausdehnungszahl $n - 1$ übergeordnet, weil sich dieses in jenem construiren lässt, während keine Möglichkeit vorliegt, ohne die Hinzunahme weiterer Hülfsmittel aus dem zweiten in das erste zu gelangen. Hier lässt sich also das Gebiet niederer Ordnung stets als ein Specialfall betrachten, der aus dem Gebiet höherer Ordnung durch beschränkende Bedingungen hervorgeht. Die letzteren bestehen aber nicht, wie bei dem Uebergang von der Gattung zur Art, in der Einführung determinirender Merkmale, die dem Gattungsbegriff fehlen, sondern im Gegentheil in der Abstraction von weiteren Bestimmungen, die dem höheren Begriff eigen sind.

In der Aufstellung von Differentialgleichungen besteht immer die nächste Aufgabe bei den Anwendungen der Infinitesimalmethode. In gewissen Fällen können die vorgelegten Probleme schon durch die Untersuchung dieser Gleichungen gelöst werden. Dies findet regelmässig dann statt, wenn der logische Charakter des Problems nur die Kenntniss jener allgemeinsten Gesetzmässigkeit verlangt, welche in der Differentialgleichung ihren Ausdruck findet. Die Bestimmung der Tangente und der Krümmung einer Curve, der Maxima und Minima der Functionen, die Formulirung der allgemeinen Bewegungsgesetze sind Aufgaben solcher Art. Bei einer zweiten Reihe von Problemen dagegen ist die Aufstellung der Differentialgleichungen nur ein vorbereitendes Geschäft, indem die eigentliche Lösung eine

einfache oder mehrfache Integration voraussetzt. Dies ist überall da der Fall, wo es sich darum handelt, die Beschaffenheit der ursprünglichen Function zu kennen, deren Differentialgleichung gegeben ist, oder wo das in der Differentialgleichung aufgestellte Gesetz auf Messungen, für welche specielle Bedingungen gegeben sind, angewandt werden soll, wie auf die Messung der Zeit einer Bewegung, der Länge einer Curve, des Inhalts einer Fläche oder eines Körperraumes. Die Integralformeln, zu denen man bei der Lösung solcher Aufgaben gelangt, bilden eine Art Zwischenglied zwischen der in der Differentialgleichung ausgedrückten derivirten und der primitiven Function. Die Integralformel, die sich lediglich durch das Integrationssymbol und unter Umständen durch hinzutretende Constanten von dem Differentialausdruck unterscheidet, bezeichnet die Herstellung der primitiven Function zunächst nur als eine Aufgabe. Es ist aber um so wichtiger, diese Aufgabe symbolisch ausdrücken zu können, als erstens zahlreiche Fälle vorkommen, in denen eine exacte Lösung derselben unmöglich ist und dennoch ein Ausdruck nothwendig wird, der für den Zusammenhang des mathematischen Gedankengangs diese Lösung als vollzogen postulirt, und als es zweitens andere Fälle gibt, in denen eine Integralformel der allgemeine Ausdruck für eine grosse Zahl einzelner Functionen ist, die sämmtlich dem durch die erstere repräsentirten Gesetze unterworfen sind. In Folge dessen ist der Geltungsbereich eines unbestimmten Integrals ein ebenso weiter, wie derjenige der zugehörigen Differentialgleichung. Der Uebergang auf die speciellen Functionen, den dasselbe vermittelt, wird durch die willkürlichen Constanten nur angedeutet, indem diese dem Ausdruck einen Bestandtheil hinzufügen, dessen Fixirung sofort das allgemeine in ein concretes Gesetz umwandelt. Darum richtet sich auch die Zahl dieser Constanten nach dem Umfang des durch die Differentialgleichung repräsentirten Gesetzes. Einer Differentialgleichung $n$ter Ordnung entsprechen $n$ Integrationen, deren jede die Bestimmung einer andern willkürlichen Constanten voraussetzt. Diese sämmtlichen Constanten finden sich daher in dem Integral, und sie verleihen demselben die nämliche Allgemeinheit, wie sie die Differentialgleichung besitzt. Erst durch die successive Ausführung der Integrationen, durch welche die Constanten eine nach der andern determinirt werden, gewinnt die Integralformel allmählich eine concretere Bedeutung. Ausserdem besteht ein wichtiges Hülfsmittel, durch das von vornherein der Geltungsbereich der Integralformeln verengert wird, in der Voraus-

setzung gewisser Grenzen für die Argumente der Functionen, wodurch die unbestimmten in bestimmte Integrale übergehen. Die einzelnen Methoden, die zur Berechnung der Functionen aus den Integralformeln befolgt werden, sind von ausschliesslich mathematischem Interesse. In logischer Beziehung bedürfen nur noch die Anwendungen, welche gewisse Integralformeln zur Lösung bestimmter Classen von Problemen finden, einer kurzen Hervorhebung.

In dem bestimmten Integral wird zwar die Allgemeinheit des unbestimmten beschränkt, aber zwischen den für dasselbe eingeführten Grenzen bleibt immer noch eine Mannigfaltigkeit einzelner Functionsformen möglich. Es kann nun die Aufgabe gestellt werden, aus ihnen gewisse einzelne Functionen zu finden, die einen ausgezeichneten Charakter besitzen. Ein solcher ist aber dann gegeben, wenn die Function im Vergleich mit den ihr benachbarten einen Maximal- oder Minimalwerth erreicht. Concrete Beispiele, die unter diese Aufgabe fallen, ergeben sich nicht selten bei den geometrischen und physikalischen Anwendungen der Infinitesimalmethode. Hierher gehört z. B. die Ermittelung der kürzesten Linie, welche auf einer gegebenen Fläche zwischen zwei gegebenen Punkten gezeichnet werden kann, oder die Bestimmung derjenigen Curve, in der ein Körper, wenn er sich unter dem Einfluss der Schwere zwischen zwei gegebenen Punkten bewegt, in der kürzesten Zeit fällt u. dergl. Diese Aufgaben besitzen eine vollständige Analogie mit denen, welche die Differentialgleichung in der Theorie der Maxima und Minima erledigt; sie unterscheiden sich nur darin, dass es sich bei ihnen nicht um die Vergleichung einzelner ausgezeichneter Punkte der eine Function repräsentirenden Curve oder Oberfläche mit den benachbarten Punkten, sondern um eine Vergleichung der ganzen Form jener Curven oder Oberflächen, welche durch eine bestimmte Integralformel repräsentirt werden, handelt. Wie man also bei dem entsprechenden Problem der Differentialrechnung von einem gegebenen Punkt einer Curve zu dem ihm benachbarten gelangt, so hier von einer gegebenen Curve zu derjenigen, die in der Schaar stetig in einander übergehender Curven, welche dem nämlichen allgemeinen Gesetze folgen, ihr benachbart ist. Es ist klar, dass diese Aufgabe gleichzeitig der Integral- und der Differentialrechnung angehört, insofern die Differentialmethode, die zur Bestimmung der Maxima und Minima einer Function dient, auf gegebene Integralformeln angewandt werden muss. Eine solche Differentiation in Bezug auf bestimmte Integrale ist von Lagrange als Variation bezeichnet worden.

Der Algorithmus der Variation ist hiernach an sich nicht verschieden von dem der Differentiation, und seine Anwendung ist immer dann gefordert, wenn eine Function $V$ in der Form eines bestimmten Integrals gegeben ist, dessen Werth so bestimmt werden soll, dass $\partial V = 0$ wird, während $\partial^2 V$ im allgemeinen einen von null verschiedenen Werth annimmt, worin $\partial$ das von Lagrange eingeführte Symbol der Variation bedeutet. Die nähere Ausführung der Methode beruht wesentlich darauf, dass die Variation der Function $V$ in die Variation ihrer Bestandtheile, der abhängig Veränderlichen und ihrer Differentialquotienten verschiedener Ordnung zerlegt wird. Logisch ist der Variationscalcül hauptsächlich deshalb bemerkenswerth, weil er die Fruchtbarkeit der Integrationssymbolik in ein helles Licht setzt, denn gerade die Allgemeinheit der durch ein Integral repräsentirten Function macht es möglich, auf dasselbe jene Regeln der Differentialmethode anzuwenden, die zur Ermittelung ausgezeichneter Werthe einer Function dienen.

Auf der nämlichen Allgemeinheit der Integralformeln beruht eine zweite Anwendung derselben, die noch von grösserer Tragweite ist als die eben besprochene. Sie besteht darin, dass gewisse bestimmte Integrale und die ihnen entsprechenden transcendenten Functionen die Bedeutung von Hülfsfunctionen übernehmen, welche den einfachen transcendenten Functionen und ihren Umkehrungen entsprechen, aber zur Darstellung complicirterer Gesetze als diese sich eignen. Diese Aufgabe erfüllen die höheren transcendenten Functionen, die sich im allgemeinen an bestimmte Integralformeln anlehnen. Auch in dieser Beziehung bilden die einfachen Functionen ihr Vorbild. So ist nach den elementaren Regeln der Differentiation

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

und deshalb, wenn man Grenzen einführt, welche die willkürliche Constante des Integrals zu beseitigen gestatten,

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

d. h. die Kreisfunction lässt sich entstanden denken aus dem Integral einer gebrochenen algebraischen Function zweiten Grades. Demgemäss darf man von vornherein voraussetzen, dass ein Integral von der Form

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

also ein Integral einer gebrochenen algebraischen Function vierten Grades, ebenfalls dem Bogen einer Curve entspricht, und dass man durch die Umkehrung dieser Bogenfunction eine dem Sinus analoge Function erhalten wird. Auf diese Weise gewinnt man in der That trigonometrische Functionen höherer Art, die so genannten elliptischen Functionen, welche zugleich eine allgemeinere Bedeutung besitzen, da sie sowohl die einfachen trigonometrischen Functionen wie die Exponentialfunctionen als specielle Fälle in sich schliessen. Denn setzt man in dem allgemeinen elliptischen Integral die Constante $k = 0$, so geht dasselbe in das Integral für arc sin $x$ über, und setzt man $k = 1$, so verschwindet im Nenner das Wurzelzeichen, und man erhält $\int_0^x \frac{dx}{1-x^2}$, welches Integral der logarithmischen Function $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$ entspricht. Da die trigonometrischen Functionen eine reelle, die ihnen entsprechenden Exponentialfunctionen eine imaginäre Periodicität besitzen (S. 222), so vereinigen die elliptischen Functionen beide Eigenschaften in sich: sie sind doppelperiodische Functionen. Die logische Bedeutung dieser durch die Vermittelung algebraischer Integrale gewonnenen neuen Hülfsfunctionen besteht demnach darin, dass sie den mathematischen Ausdruck für den Begriff der periodischen Veränderung verallgemeinern und so eine genaue Darstellung solcher Vorgänge gestatten, für welche die einfachen periodischen Functionen nicht zureichen. In der nämlichen Richtung, in der aus den trigonometrischen die elliptischen Functionen hervorgegangen sind, lässt sich nun weiter fortschreiten, indem man zu Functionen sechsten, achten Grades u. s. w. übergeht. So entstehen die verschiedenen Ordnungen der so genannten hyperelliptischen Integrale. Entsprechend der Beschränkung der complexen Grössen auf die Darstellung in einer Ebene zeigt sich übrigens, dass eindeutige Functionen von mehr als zwei Perioden unmöglich sind. In logischer Beziehung bieten diese Entwicklungen nur noch zu zwei Bemerkungen Anlass. Erstens sehen wir, dass alle höheren transscendenten Functionen aus den einfachen analytisch durch die Anwendung des Permanenzprincips hervorgehen, wobei aber dieses nicht direct auf die Function selbst, sondern zunächst auf die arithmeti-

schen Operationen, die zu ihr führen, angewandt werden muss; eben darum bilden gewisse Integralformen, in denen diese Operationen in einem geschlossenen Ausdruck zusammengefasst werden, die Uebergangsglieder. Zweitens zeigt es sich, dass die Allgemeinheit der Function mit ihrer Ordnung, bez. mit der Ordnungszahl des algebraischen Ausdrucks, welchen das ihr entsprechende Integral enthält, zunimmt. Diese Allgemeinheit bezieht sich aber lediglich auf die umfassende Natur des durch die Function repräsentirten Gesetzes. Jede Function höherer Ordnung schliesst die Functionen niederer Ordnung, aus denen sie durch die Anwendung des Permanenzprincips hervorgegangen ist, als Specialfälle in sich. Doch gehen diese Specialfälle auch hier aus der allgemeineren Form nicht durch den Hinzutritt determinirender Bedingungen hervor, sondern im Gegentheil dadurch, dass bestimmte Elemente, die in der allgemeineren Form enthalten sind, zum Verschwinden kommen. So lässt sich denn überhaupt diese wachsende Determination der Begriffe in aufsteigender Richtung als der specifische Charakter mathematischer Ueberordnung betrachten.

Schliesslich liegt die Bemerkung nahe, dass auf dem angedeuteten Wege, vermöge der auch in diesem Fall unbeschränkten Anwendbarkeit des Permanenzprincips, die Ableitung neuer Functionen von zunehmender Allgemeinheit eine unbegrenzte ist. Aber es ist ebenso gewiss, dass man gerade in Folge dieser zunehmenden Allgemeinheit an eine Grenze kommen muss, wo die Verwendbarkeit der so entwickelten Functionen in der Form von Hülfsfunctionen fraglich wird. Diese Grenze wird namentlich dann erreicht, wenn die Functionen einen vieldeutigen Charakter gewinnen. In der Fähigkeit, neue Functionsformen zu erzeugen, bekundet übrigens die Integration wiederum ihre Verwandtschaft mit den inversen Operationen der Arithmetik. Aus diesen sahen wir successiv neue Zahlsysteme entspringen, aus der Subtraction die negativen, aus der Division die gebrochenen und irrationalen, aus der Radicirung die complexen Zahlen, und aus den beiden letzteren Operationen ausserdem die gebrochenen und die complexen Functionen. Im Gegensatze zu dieser principiellen Entwicklung waren die einfachen Formen transcendenter Functionen zunächst aus zufälligen Betrachtungsweisen hervorgegangen, denen nur mittelst der Uebertragung auf alle möglichen analogen Grössenverhältnisse eine allgemeinere Bedeutung beigelegt werden konnte. Auf eine solche wies überdies die Beziehung der Exponentialfunctionen und trigonometrischen Functionen zu einander und der letzteren zu

den Functionen complexer Variabeln hin. Erst durch die Infinitesimalmethode wird nun der vollständige Zusammenhang der transcendenten und der algebraischen Functionen aufgeklärt. Auch die Grössensysteme der transcendenten Functionen können unmittelbar aus den ursprünglichen Zahlen und den aus ihnen gebildeten algebraischen Functionen durch eine inverse Operation abgeleitet werden; diese Operation ist die Integration. Wie die Aufgaben, jeden beliebigen Bruch und jede Wurzel aus einer negativen Grösse in einer einfachen Zahl darzustellen, durch die irrationalen und complexen Zahlen gelöst werden, so führt das Problem, aus derivirten Functionen von algebraischer Form die ursprünglichen Functionen, von welchen sie abgeleitet sind, zu finden, unter gewissen Bedingungen direct zu der Aufstellung der transcendenten Functionen. Dieser Weg ist aber auch insofern der allgemeinere, als sich auf ihm mit den niederen zugleich die höheren Formen dieser Functionen ergeben.

Dritter Abschnitt.

# Von der Logik der Naturwissenschaften.

Erstes Capitel.

## Die allgemeinen Grundlagen der Naturforschung.

### 1. Die Entwicklung und Gliederung der Naturwissenschaften.

a. Die Entwicklung der Naturwissenschaften.

So innig die Beziehungen sind, die Mathematik und Naturforschung verbinden, so weit entfernen sich beide von einander in den Bedingungen ihrer Entwicklung. Vermöge der einfachen Natur der Erfahrungen, die den Begriffen von Zahl und Ausdehnung zu Grunde liegen, hat die Mathematik in dem Augenblick, wo sie in das Licht der Geschichte trat, den Gang einer gesicherten Wissenschaft eingeschlagen. Die Naturforschung dagegen erscheint von Anfang an als ein Schauplatz des Kampfes widerstreitender Weltanschauungen. Spät erst und zunächst bloss auf beschränkten Gebieten hat in ihr durch die Sicherstellung allgemein anerkannter Ergebnisse eine friedlichere Entwicklung beginnen können. Allmählich sind dann die methodischen Gesichtspunkte, denen man solche Ergebnisse verdankte, auch auf andere Gebiete übertragen worden. Doch die Nachwirkungen jener Kämpfe werden in der Unsicherheit der Grundbegriffe heute noch überall fühlbar; sie verrathen sich in dem Zweifel über die Bedeutung der einfachsten Principien der Mechanik ebenso gut wie in den wechselnden Anschauungen über den Ursprung der verwickeltsten Lebenserscheinungen.

Die Aufgabe der Naturwissenschaften besteht in der methodischen Erforschung der einzelnen Naturerscheinungen. Diese Aufgabe

ist allmählich aus andern, älteren Formen der Naturbetrachtung entstanden. Den Banden mythologischer Weltanschauung entwand sich in den ersten Anfängen der Wissenschaft die philosophische Betrachtung des Weltganzen, und aus ihr sind in viel späterer Zeit erst die einzelnen Naturwissenschaften hervorgegangen. Dieses Verhältniss hat auf die gesammte Entwicklung der letzteren seine Schatten geworfen. Während das System der Mathematik aus speciellen Ergebnissen und Verfahrungsweisen in stetiger Entwicklung zu einem Ganzen sich fügte, fand die naturwissenschaftliche Forschung bereits als sie begann zusammenhängende Naturanschauungen vor, die sich jede neu gefundene Thatsache dienstbar zu machen strebten, und die auf die Methoden, die man zur Auffindung der Thatsachen benützte, einen beherrschenden Einfluss ausübten. Uns erscheint dies jetzt als eine Umkehrung der naturgemässen Verhältnisse. Wir verlangen, dass der Philosophie überall durch die Erfahrungswissenschaften der Boden bereitet werde. Gleichwohl wäre es unbillig, wenn man der alten Naturphilosophie vorwerfen wollte, dass ihr diese Ansicht fremd war. Mag auch in Folge seines der Erkenntniss vorauseilenden Strebens der menschliche Geist die grössten Schwierigkeiten sich selbst schaffen, — das Interesse an der Frage nach dem Ursprung und dem Wesen der Dinge ist ein so ungeheures, dass sich jede Zeit damit abfinden muss.

Es liegt nahe, als den wichtigsten Grund, weshalb die Naturwissenschaft der Griechen so weit hinter ihren Leistungen auf andern Gebieten zurückblieb, ihren gänzlichen Mangel an methodischen Hülfsmitteln anzusehen. Welchen Erfolg konnte eine Naturforschung haben, die auf Zeitbestimmungen ohne Uhr, Temperaturvergleichungen ohne Thermometer, astronomische Beobachtungen ohne Fernrohr vertrauen musste?*) Man vergisst aber bei dieser Frage, dass die mangelnde Erfindung solcher Hülfsmittel selbst schon eines der lautesten Zeugnisse für den Mangel der richtigen Methode naturwissenschaftlicher Forschung ist. Ueberdies, ein Hipparch und Archimedes hatten ohne vollkommenere Instrumente, jener die Grundlagen der exacten Astronomie gelegt, dieser die allgemeinsten Gesetze der Statik fester und flüssiger Körper aufgefunden. Sogar die schiefen Rinnen und die primitiven Wasseruhren, deren sich Galilei bei seinen Fallversuchen bediente, hätten nöthigenfalls schon dem Aristoteles zur Verfügung gestanden. Nicht die äusseren

*) Vgl. E. Zeller, Die Philosophie der Griechen, 3. Aufl., II, 2, S. 250.

Hülfsmittel sind es, die der Methode der neueren Naturforschung ihr charakteristisches Gepräge verleihen, sondern die in ihr herrschende Form der Naturbetrachtung. Und diese war es zugleich, welche die Werkzeuge exacter Beobachtung mit der nämlichen inneren Nothwendigkeit schaffen musste, mit der die Aristotelische Naturphilosophie niemals zu ihnen führen konnte.

An solche tiefer liegende Gegensätze mochte man denken, wenn die Ursachen des Misserfolgs antiker Naturforschung in die kurze Formel gefasst wurden, es habe den Alten weder an Thatsachen noch an Ideen gemangelt, ihre Ideen seien aber zu unbestimmt und zu wenig angemessen den Thatsachen gewesen*). Mit grösserem Rechte könnte man vielleicht sagen: die ihnen bekannten Thatsachen waren zu unbestimmt, und sie wurden dadurch verführt, an die Stelle der Thatsachen ihre eigenen Ideen zu setzen. Aber alle diese Erklärungen, die mehr auf äussere Unterschiede als auf Ursprung und Bedeutung der verschiedenartigen Naturanschauungen Rücksicht nehmen, vergleichen was im Grunde unvergleichbar ist. Die Alten besassen eine Naturphilosophie, aber keine irgend nennenswerthe Naturwissenschaft. Als diese ihre ersten Schritte zu machen begann, fand sie darum keineswegs freies Feld vor, sondern ihr Gebiet war im Besitz einer philosophischen Weltbetrachtung, die mit ihren allgemeinen Antworten auch dem Einzelnen seine bestimmte Bedeutung anwies. So kommt es, dass die Geschichte der Naturforschung von ihren ersten Anfängen an den Charakter eines Besitzstreites hat, und dass sie diesen Charakter bis in unsere Tage herab jedesmal von neuem annimmt, sobald für ein neues Gebiet festere Beziehungen zu den bereits sicher begründeten Zweigen der exacten Wissenschaft gewonnen werden. Bei diesem Besitzstreit tritt regelmässig eine neue Betrachtungsweise, die jede Erscheinung in ihre einfachsten empirischen Bestandtheile zu zerlegen sucht, einer älteren bis dahin herrschenden gegenüber, welche die Unterordnung jeder einzelnen Thatsache unter gewisse allgemeine Begriffe als ihre Aufgabe ansieht. Wenn wir die erste dieser Betrachtungsweisen die naturwissenschaftliche, die zweite die naturphilosophische nennen, so soll damit nicht die wirkliche Aufgabe der Naturphilosophie, sondern nur die historische Stellung angedeutet sein, die sie bis dahin eingenommen. Diese historische Stellung ist aber wesent-

*) Whewell, Geschichte der inductiven Wissenschaften. Deutsch von Littrow. I, S. 69 f,

lich dadurch bedingt, dass die Naturphilosophie der naturwissenschaftlichen Forschung vorausging und daher in ihren Anfängen ganz und gar auf die gemeine Erfahrung gegründet war. Indem sich diese einem hoch ausgebildeten logischen Denkvermögen gegenüber befand, konnte kaum ein anderes Resultat zu Stande kommen als dasjenige, das in der Naturphilosophie der Griechen niedergelegt ist. In die unendliche Fülle mannigfach verketteter Erscheinungen, welche die Naturbeobachtung darbietet, muss eine erste wissenschaftliche Auffassung vor allem durch eine nach logischen Gesichtspunkten unternommene Classification eine gewisse Ordnung zu bringen suchen. Stets hat daher die tiefer eindringende Forschung gegen einen logischen Schematismus zu kämpfen, der in voreiliger Weise ein Wissensgebiet systematisch abschliesst, und der die Dinge zu erklären meint, indem er sie eintheilt. Eine so gewonnene Naturanschauung kann auf lange hinaus das wissenschaftliche Bedürfniss befriedigen. Darum verdanken auch die ersten Regungen der exacten Naturforschung im Alterthum nicht dem theoretischen Interesse, sondern praktischen Bedürfnissen ihren Ursprung. Dem theoretischen Interesse an den Himmelserscheinungen war durch die unbestimmten Vorstellungen über den Umschwung der Gestirnsphären, wie sie sich bei Plato und Aristoteles finden, Genüge geleistet; aber zum Zweck einer exacten Jahreseintheilung bedurfte man quantitativer Bestimmungen, die schliesslich in einer für die Hülfsmittel der Alten erreichbaren Genauigkeit in dem astronomischen System eines Hipparch und Ptolemäus ihren Abschluss fanden. Durch das Problem, den Silbergehalt einer goldenen Krone zu bestimmen, wurde Archimedes, wie man erzählt, zu seinen hydrostatischen Entdeckungen veranlasst. Wie ein Körper von gegebener Form zu unterstützen sei, um seinen Fall zu verhindern, wie eine gegebene Kraft in Bewegung zu setzen, wie die Spannung einer Bogensehne zunehmen müsse, wenn die erzielte Kraft um ein bestimmtes Mass wachsen solle: diese und ähnliche praktische Aufgaben haben einen Archimedes und Heron von Alexandrien zu ihren mechanischen Untersuchungen geführt.

Unter allen Naturerscheinungen sind nun die Bewegungen schwerer Körper vermöge der Einfachheit der zu ihrer Beobachtung erforderlichen Methoden am leichtesten einer exacten Untersuchung zugänglich. Die Mechanik ist daher die einzige Naturwissenschaft, deren Anfänge bis in das Alterthum zurückreichen. Indem sich die Mechanik des Archimedes auf statische Probleme beschränkte,

bedurfte sie nur einer kleinen Zahl physikalischer Voraussetzungen; ihr wesentlicher Inhalt aber bestand in der statischen Verwerthung geometrischer Sätze. Selbst bei Stevinus und Galilei sind noch die Nachwirkungen dieser Abhängigkeit von der Geometrie zu erkennen. Aber die Behandlung der Bewegungsprobleme musste mit innerer Nothwendigkeit die selbständige Entwicklung der Mechanik und zugleich ihre Rückwirkung auf die übrigen Gebiete der Naturlehre herbeiführen. In dem nämlichen Zeitalter, welches die Fundamente der rationellen Mechanik entstehen sah, wurden in der That durch Mersenne und Snell die einfachsten Grundgesetze der Akustik und Optik entdeckt, durch Gilbert die Eigenschaften des Magnetes zum ersten Mal genauer erforscht, und gelang es endlich Kepler, auf der Grundlage der Copernikanischen Weltanschauung, die Bewegungen der Planeten auf die Gesetze zurückzuführen, die noch jetzt seinen Namen tragen. Ihren Abschluss fand diese Entwicklung der Physik und Astronomie in der folgenden Zeit durch die Gravitationstheorie Newtons, welche der physikalischen Untersuchung auf allen Gebieten den Weg zeigte, indem sie die Deduction aus den allgemeinen Principien der Mechanik als das Ziel einer jeden physikalischen Theorie hinstellte.

Langsam folgten die übrigen Naturwissenschaften dem Beispiel das ihnen durch die Astronomie und die einfacheren Gebiete der Physik gegeben war. Zur selben Zeit, als bereits die Fallversuche Galileis eine tiefere Erkenntniss der Schwerkraft erschlossen und die Kepler'schen Gesetze die Bewegungen der Himmelskörper einfachen Massbeziehungen unterworfen hatten, lag die chemische Forschung noch in den Händen abergläubischer Goldköche, und bekämpften sich mit wechselndem Glück die Lehren des Aristoteles und Paracelsus über die Elemente. Erst als Robert Boyle gegen Ende des 17. Jahrhunderts dem Begriff des Elementes die Bedeutung eines erfahrungsmässig nicht weiter zerlegbaren und durch constante Eigenschaften sich unterscheidenden Stoffes anwies, begann die Chemie den nämlichen Forschungsprincipien zu folgen. Die Menge der Elemente, ihre Beziehungen und ihre Verbindungen richteten sich nun nicht mehr nach irgend welchen mystischen Zahlsymbolen und andern Vorstellungen, die von aussen an die Erscheinungen herangebracht oder höchstens aus einigen wenigen Thatsachen abstrahirt und ungebührlich verallgemeinert waren, sondern zur einzigen Richterin über Thatsachen und Hypothesen wurde auch hier die Erfahrung.

Um einige Jahrzehente früher als die Chemie hatte die Physiologie durch William Harveys Entdeckung des Blutkreislaufs den ersten Schritt auf der Bahn der exacten Forschung gethan. So wichtig aber dieser Schritt auch war, so musste er doch für die nächste Folgezeit in gewisser Art um so verhängnissvoller werden, je weiter noch die übrigen Zweige biologischer Forschung zurückstanden. Denn allzu gross ward nun die Versuchung, auf beliebige Lebensvorgänge von unbekannter Natur die nämlichen mechanischen Principien anzuwenden. Von Cartesius und den iatromechanischen Schulen des 17. Jahrhunderts an dauert diese Tendenz bis in unsere Tage. Der mechanischen Auffassung stellen sich aber mit wechselndem Glück teleologische Anschauungen entgegen. Findet die mechanische Physiologie stets an dem Vorbilde der Physik und an gewissen einfachsten Lebensvorgängen ihren Rückhalt, so stützen sich die animistisch-vitalistischen Lehren auf das Hereingreifen psychischer Factoren in die höheren Lebensvorgänge und vor allem auf die eine Zweckerklärung herausfordernde Beschaffenheit der Entwicklungserscheinungen. Dieser Kampf ist noch nicht beendet, und noch mehr als die Physiologie selber stehen die von ihr abhängigen Zweige der organischen Naturgeschichte unter dem Einflusse desselben.

### b. Das System der Naturwissenschaften.

Die einzelnen Zweige der Naturwissenschaft haben sich zunächst aus praktischen Bedürfnissen, nicht aus systematischen Rücksichten getrennt. Dennoch entspricht diese Gliederung ihrem thatsächlichen Erfolg wie ihrem zeitlichen Eintritte nach in hohem Grade zugleich den logischen Eigenthümlichkeiten der verschiedenen Wissenschaften, sowie den besonderen Gestaltungen der Methodik, die in ihnen herrschend ist. Das System der Naturwissenschaften, welches sich in der wirklichen Entwicklung derselben dargelegt hat, ist darum auch in logischer Beziehung im ganzen den künstlichen Eintheilungen überlegen, die man zuweilen nach Bacons Vorbild auszuführen versuchte. Nur an einzelnen Stellen, namentlich da, wo specielle Bedingungen, wie sie aus der vielseitigen Verknüpfung der verschiedenen Gebiete hervorgehen, auf eine einzelne Disciplin fördernd oder hemmend eingewirkt haben, entfernt sich die historische Entwicklungsfolge von dem systematischen Zusammenhang*).

*) Vgl. hierzu meine Abhandlung über die Eintheilung der Wissenschaften, Philos. Studien, VI, S. 1 ff.

Anfang und Grundlage aller erklärenden Naturwissenschaften ist die Mechanik. Sie ist die allgemeinste Naturwissenschaft, insofern man auf die Erscheinungen, mit denen sie sich beschäftigt, auf die Bewegungen der Körper und ihrer Theile, alle der äussern Wahrnehmung gegebenen Naturerscheinungen vermöge des Grundsatzes der Unveränderlichkeit der materiellen Substanz zurückzuführen sucht. Sie bildet ausserdem das Bindeglied zwischen Mathematik und Naturforschung. Denn nicht nur besitzen diejenigen ihrer Principien, die sich auf die reine Bewegungsvorstellung beziehen, völlig den Charakter abstracter mathematischer Allgemeinheit, sondern selbst jene mechanischen Sätze, bei denen die empirisch gegebenen Eigenschaften der Körper eine wesentliche Rolle spielen, pflegen diese Eigenschaften auf eine ideale Form zurückzuführen, der sich die Körper unserer Erfahrung immer nur annähern können. In Folge dieses Uebergewichts mathematischer Abstraction besitzt die Mechanik in höherem Grade als irgend eine andere Naturwissenschaft einen speculativen Charakter. Zugleich können in ihr mit grosser Schärfe die Annahmen von den Folgerungen, sowie unter den ersteren diejenigen Voraussetzungen, die in allgemeingültigen Anschauungen ihre Quelle haben, von jenen unterschieden werden, die auf einzelnen Erfahrungen beruhen. In Folge der vollkommen bindenden Schlussweisen endlich, durch welche sich aus einer kleinen Anzahl allgemeiner Voraussetzungen das System der rationellen Mechanik entwickelt, ist diese auch in methodischer Beziehung das vollendete Vorbild einer exacten Naturwissenschaft.

An die Mechanik schliesst sich zunächst die Physik an. Während die Mechanik ihren Betrachtungen abstracte Hypothesen zu Grunde legt, die in keiner Erfahrung vollständig verwirklicht sind, hat die Physik den besonderen Bedingungen Rechnung zu tragen, die für die Geltung der mechanischen Gesetze aus den speciellen Eigenschaften und Verbindungen der Naturobjecte entstehen. Mit Rücksicht hierauf und in Anwendung des Grundsatzes, dass wegen der qualitativen Unveränderlichkeit der Materie alle Naturvorgänge in letzter Instanz Bewegungen sind, betrachtet man als das Ziel der Physik ihre vollständige Ueberführung in eine angewandte Mechanik. Dabei bleibt jedoch der Physik eine unermessliche Fülle eigenthümlicher Aufgaben in der Erforschung der concreten Bedingungen des Geschehens, insbesondere in der Gewinnung haltbarer Voraussetzungen über die Eigenschaften der Materie und in der Deduction der verschiedenen Naturerscheinungen aus denselben.

Gerade dadurch, dass die Physik verpflichtet ist, ihre Annahmen den in der Erfahrung gegebenen Naturerscheinungen auf das genaueste anzupassen, entfernt sie sich weiter als die Mechanik von dem Charakter einer mathematischen Wissenschaft, die von der empirischen Gültigkeit ihrer Voraussetzungen unabhängig ist. In Folge der verwickelten Beschaffenheit der Erscheinungen und der Unsicherheit ihrer Hypothesen verliert sie zudem sogar theilweise den Charakter einer exacten Wissenschaft, indem sie sich vielfach genöthigt sieht, an Stelle einer strengen Deduction der Erfahrungen aus gewissen allgemeinen Voraussetzungen eine Beschreibung der durch Beobachtung und Versuch festzustellenden Thatsachen treten zu lassen. Dieses Verhältniss hat im Verein mit pädagogischen Rücksichten die Trennung in experimentelle und theoretische oder mathematische Physik herbeigeführt. Es ist aber unrichtig, wenn man hierbei die experimentelle Physik als die ursprüngliche Wissenschaft bezeichnet, aus der sich die theoretische allmählich entwickelt habe, eine Ansicht, die mit der geläufigen und im ganzen ebenso unrichtigen Unterscheidung eines inductiven und deductiven Stadiums einer jeden Wissenschaft zusammenhängt. Schon der Umstand, dass die Ausbildung der Mechanik derjenigen der Physik vorangegangen ist, widerspricht dem. In Wirklichkeit ist darum auch eine strenge Trennung jener beiden Disciplinen nicht durchzuführen, sondern wie die mathematische Physik der experimentellen eine Menge thatsächlicher Bestimmungen entnehmen muss, so pflegen anderseits in die letztere zahlreiche Abstractionen und Deductionen der ersteren einzugehen. Die mathematische Physik nähert sich übrigens nicht bloss durch ihren streng deductiven Charakter, sondern auch darin der Mechanik, dass sie mit abstracten Voraussetzungen operirt, von denen von vornherein zugestanden wird, dass sie nur annähernd verwirklicht sein können. Aber sie sucht diese Voraussetzungen so lange umzugestalten, bis es ihr gelingt, eine völlige Uebereinstimmung mit gewissen numerischen Daten der Beobachtung herbeizuführen. Auf diese Weise stellt sie im Verein mit der Mechanik die Vermittlung her zwischen mathematischer Speculation und empirischer Forschung.

In ihrem weitesten Sinne umfasst die Physik das Gesammtgebiet des Naturgeschehens. Dieses trennt sich dann aber zunächst in zwei Theile, deren Inhalt von den verschiedenen Gesichtspunkten abhängt, unter denen das hypothetische Substrat der Naturerscheinungen, die Materie, der wissenschaftlichen Betrachtung zugänglich ist. Eine Reihe allgemein verbreiteter Naturerscheinungen weist

nämlich auf die allgemeinen Eigenschaften zurück, welche der Materie ohne Rücksicht auf jene specifischen Verschiedenheiten zukommen, die den charakteristischen Unterschieden der einzelnen Naturkörper zu Grunde liegen. Die Erscheinungen der Schwere, der Wärme, des Lichtes u. s. w. sind Naturerscheinungen, für deren Gestaltungsweise zwar die Unterschiede der Naturkörper nicht gleichgültig sind, bei deren Erklärung aber doch ein Zurückgreifen auf specifische Stoffunterschiede schon deshalb ausgeschlossen ist, weil sie an Körpern von sehr verschiedenen materiellen Eigenschaften in übereinstimmender Weise auftreten. Die Betrachtung dieser allgemeinen Naturerscheinungen ist nun die Aufgabe der eigentlichen Physik, während die Untersuchung jener Eigenschaften der Körper, deren Erklärung die Annahme irgend welcher specifischer Stoffunterschiede erheischt, der Chemie anheimfällt.

Ein hiervon verschiedener Gesichtspunkt hat noch zu einer weiteren Spaltung der Physik den Anlass geboten. Der Biologie bleiben alle Naturerscheinungen vorbehalten, die, unter dem Gesichtspunkt des Zweckes zusammengefasst, als Lebenserscheinungen bezeichnet werden. Damit sollen diese keineswegs der allgemeineren physikalischen und chemischen Betrachtung entzogen sein, sondern es wird bloss der eigenthümliche Charakter angedeutet, den bestimmte zusammengesetzte Ergebnisse physikalischer und chemischer Fundamentalerscheinungen annehmen. In diesem Sinne betrachtet erscheint die Biologie als ein Anwendungsgebiet der Physik und Chemie, das zu diesen seinen Mutterwissenschaften in einem ähnlichen Verhältnisse steht wie die theoretische Maschinenkunde zur allgemeinen Mechanik. Die Biologie beschäftigt sich mit der Anwendung der physikalischen und chemischen Principien auf gewisse natürliche Substanzcomplexe, die Organismen, die mit Rücksicht auf ihre zweckmässige Beschaffenheit den Charakter natürlicher Maschinen besitzen. Diese Betrachtungsweise reicht aber nicht mehr zu, sobald es sich um das Verständniss jener physischen Erscheinungen handelt, die, wie insbesondere die Entwicklungs- und Bewegungsvorgänge, mit dem geistigen Leben in Beziehung stehen. Hier bedarf vielmehr die Biologie der Psychologie zu ihrer Ergänzung, mit der vereinigt sie das verbindende Glied ist zwischen den Natur- und den Geisteswissenschaften.

Physik, Chemie und Biologie bilden dergestalt die drei aus der Physik hervorgegangenen Hauptzweige der theoretischen Naturlehre. Jeder dieser Hauptzweige lässt aber wieder einzelne An-

wendungen auf die verschiedenen Naturobjecte zu, und hieraus entspringt dann eine grössere Anzahl von Sondergebieten der Naturwissenschaft, deren jedes aus der Anwendung irgend einer der drei Hauptdisciplinen oder mehrerer von ihnen auf einen besonderen Gegenstand der Natur hervorgeht.

Der allgemeinen Physik, die sich mit den Naturerscheinungen ohne specielle Rücksicht auf bestimmte räumliche nnd zeitliche Bedingungen beschäftigt, ordnet sich so die kosmische Physik unter als eine Wissenschaft, welche die Ableitung der uns gegebenen Weltordnung aus den allgemeinen physikalischen Gesetzen zu ihrem Gegenstande hat. Sie zerfällt wieder in zwei Gebiete: in die Astronomie, deren Aufgabe in der Darlegung der wechselseitigen Beziehungen der Weltkörper besteht, und in die Astrophysik, welche die physikalischen Eigenschaften der einzelnen Weltkörper zergliedert, und der daher auch die Geophysik als ein wesentlicher Bestandtheil zuzurechnen ist. Die wechselseitigen Beziehungen der Weltkörper finden zunächst in den relativen Stellungen und Bewegungen derselben ihren Ausdruck. Die Astronomie bildet daher eines der wichtigsten Anwendungsgebiete der Mechanik schwerer Körper, ausgezeichnet zugleich durch die verhältnissmässig einfachen Bedingungen, unter denen die Bewegungen stattfinden. Von den sonstigen physischen Eigenschaften der Weltkörper fallen nur diejenigen, die im Stande sind auf die Entstehung der gegenwärtigen Weltordnung Licht zu werfen, der Mitberücksichtigung der Astronomie anheim. Hier ist dann die letztere ganz und gar auf die Verwerthung der Resultate angewiesen, welche die Astrophysik bei der Untersuchung der einzelnen Weltkörper gewonnen hat. Die nämlichen Ursachen aber, die eine frühzeitige Ausbildung der astronomischen Wissenschaft möglich machten, bedingen eine sehr langsame Entwicklung der astrophysischen Kenntnisse. Diese beschränken sich naturgemäss auf die durch die Hülfsmittel des Gesichtssinns wahrzunehmenden Erscheinungen und auf die Schlüsse, die aus denselben gezogen werden können. So vollständig nun auch diese Hülfsmittel zum Aufbau der Mechanik des Himmels genügen, ebenso unzureichend sind sie im allgemeinen zur Erforschung der übrigen physikalischen Eigenschaften der Gestirne. Nur ein einziger Weltkörper macht in dieser Beziehung eine Ausnahme, unsere eigene Erde. Die Geophysik ist daher derjenige Zweig der Astrophysik, welcher der vollkommensten Ausbildung fähig ist, so dass hier das praktische Bedürfniss zu einer Theilung in verschiedene Zweige

geführt hat. Unter ihnen nimmt die physikalische Geographie die Stelle einer allgemeinen Geophysik ein, indem sie von den allgemeinsten Eigenschaften des Erdkörpers und ihren wechselseitigen Beziehungen Rechenschaft zu geben sucht. Sie stützt sich dabei theils auf die specielleren Theile der Geophysik, die sich nach einzelnen Seiten hin mit den physischen Eigenschaften der Erde beschäftigen, wie Meteorologie und Klimatologie, Chorologie und Geologie; theils verbindet sie sich mit der organischen Naturgeschichte und bildet so die besonderen Disciplinen der Pflanzen-, Thier- und Anthropogeographie. Hier berührt sich aber wieder die Geologie mit der Chemie, die Pflanzen- und Thiergeographie mit der Biologie, und die Anthropogeographie tritt in ein näheres Verhältniss zu den Geisteswissenschaften, insbesondere zur Geschichte und Völkerkunde. Es findet hierin das allgemeine Gesetz seinen Ausdruck, dass die wissenschaftlichen Gebiete um so mehr in einander eingreifen, je mehr sie sich auf concrete Naturgegenstände und nicht auf allgemeine Erscheinungen beziehen.

Von verschiedenartigen Motiven ist die Gliederung der Chemie bestimmt worden. Bei der Eintheilung in jene beiden Hauptzweige, welche die wenig angemessenen Namen der unorganischen und der organischen Chemie tragen, haben hauptsächlich zwei Gesichtspunkte zusammengewirkt. Auf der einen Seite schien es wünschenswerth, die fundamentalen Eigenschaften der chemischen Elemente und ihrer Verbindungen in einem grundlegenden Theile zu behandeln, dem dann die systematische Beschreibung der einzelnen Verbindungen in einer besonderen Disciplin zu folgen habe. Auf der andern Seite forderten die Kohlenstoffverbindungen durch ihre Zahl und ihre Eigenschaften eine abgesonderte Behandlung heraus. In Folge dieser heterogenen Motive trägt die Eintheilung in unorganische und organische Chemie fast mehr das Gepräge einer praktischen Arbeitstheilung als einer aus den inneren Eigenschaften des Gegenstandes erwachsenen Trennung. Waltet auch in der unorganischen Chemie, insofern sie es mit den allgemeinen Grundlagen der chemischen Wissenschaft zu thun hat, im ganzen mehr der Versuch theoretischer Erklärung, in der organischen der Standpunkt systematischer Classification vor, so hat sich doch theils in Folge der Hereinziehung eines grossen Theils des Systems der chemischen Verbindungen in die unorganische Chemie, theils in Folge der Verwerthung gerade der Kohlenstoffverbindungen zu theoretischen Speculationen dieses Verhältniss mannigfach verschoben. Auch hat

wohl hauptsächlich dieser Umstand zur Abzweigung einer allgemeinen oder physikalischen Chemie Anlass gegeben. Indem man in ihr alle diejenigen Untersuchungen vereinigt, die irgend eine directe Beziehung zur Erklärung der chemischen Fundamentalerscheinungen besitzen, bereitet sich hier eine Trennung vor, die in dem bisherigen chemischen System noch nicht zur Durchführung gelangt ist, die Trennung nämlich in eine theoretische und in eine systematische Chemie. Davon würde der ersteren die theoretische Erklärung der chemischen Erscheinungen, der zweiten die systematische Classification und Beschreibung der chemischen Verbindungen zufallen.

Abermals von andern Gesichtspunkten aus hat sich die Gliederung der Biologie vollzogen. Zunächst erwies sich hier eine eingehende Kenntniss des Baues und der Structur der Organismen als unerlässliche Bedingung des Studiums der Lebenserscheinungen. Es schieden sich daher zunächst die Anatomie und die Physiologie der Pflanzen und der Thiere. Bildet als bloss descriptive Disciplin betrachtet die Anatomie die Vorbereitung zur Physiologie, so ist sie als erklärende Untersuchung der Formentwicklung oder als Entwicklungsgeschichte ein integrirender Bestandtheil derselben. Die Physiologie trennt sich sodann nach der durchgreifenden Verschiedenheit der Lebenserscheinungen in die Physiologie der Pflanzen und in die Physiologie der Thiere. Aus beiden hat sich die allgemeine Physiologie als diejenige Wissenschaft abgesondert, welche die allgemeinen Eigenschaften der Organismen und den Zusammenhang der gesammten Lebenserscheinungen zum Object ihrer Untersuchungen nimmt.

Von den in den einzelnen Gebieten der Naturlehre zur Geltung gelangten Principien aus werden nun durchgängig die Anschauungen bestimmt, die für die systematische Erkenntniss der einzelnen Naturobjecte gültig sind. Der alte Name der Naturgeschichte deutet vollkommen treffend dieses Verhältniss an. Denn er bezeichnet als die eigentliche Aufgabe einer systematischen Beschreibung der Gegenstände die Ableitung ihrer Eigenschaften aus den Bedingungen ihrer Entstehung, d. h. ihre Erklärung aus bestimmten physikalischen, chemischen oder biologischen Gesetzen. Für den jeweiligen Zustand der systematischen Naturwissenschaften ist nun aber ausserdem die Thatsache bestimmend, dass das Bedürfniss nach einer geordneten Uebersicht der Objecte schon in den Anfängen der wissenschaftlichen Erkenntniss fühlbar wird, lange bevor in dem entsprechenden Gebiet

der Naturlehre die zu einem genetischen Verständniss erforderlichen Vorbereitungen gewonnen sind. Die Naturgeschichte sucht daher zunächst durch provisorische, meist auf die äussere Form der Gegenstände gegründete Eintheilungen eine vorläufige Ordnung zu schaffen, und erst in der weiteren Entwicklung ihres Systems kommen allmählich bestimmte theoretische Anschauungen zur Geltung. Von da an reflectirt sich dann in dem Wechsel der systematischen Principien die Entwicklung der gesammten Naturanschauung. (Vgl. Abschn. I, S. 47 ff.) Doch ist bei der thatsächlichen Trennung der einzelnen Zweige des naturwissenschaftlichen Systems von einander der eigenthümliche Umstand nicht zu übersehen, dass die Classification der chemischen Verbindungen nicht getrennt zu werden pflegt von der Theorie der chemischen Erscheinungen. Dies entspringt theils aus dem verhältnissmässig unvollkommenen Zustand der chemischen Wissenschaft, bei welchem die Aufgaben der Beschreibung und Erklärung noch nicht hinreichend auseinandergehalten werden, theils aus den eingewurzelten Traditionen der Naturgeschichte, nach denen nur die natürlich vorgefundenen Objecte, nicht die künstlich erzeugten, als Gegenstände besonderer systematischer Wissenschaften behandelt werden.

## 2. Heuristische Principien der Naturforschung.

### a. Causale und teleologische Naturbetrachtung.

Alle Naturforschung geht aus von der Sinneswahrnehmung. So sehr aber schon für das naive Bewusstsein die Sinneserscheinungen in Beziehungen zu einander treten und dadurch Versuche zusammenhängender Naturerklärung herausfordern, so widersetzen sich doch die Vorstellungen der einzelnen Sinnesgebiete durch ihre verschiedenartige Beschaffenheit einer durchgängigen Verbindung der Erscheinungen. Da nun gleichwohl das Erkenntnissbedürfniss zu einer solchen drängt, so wird das einzige Auskunftsmittel ergriffen, das hier möglich ist: man ordnet die Erscheinungen unter gewisse allgemeine Begriffe, die aus der Wechselwirkung unseres eigenen Denkens und Handelns mit der Aussenwelt hervorgegangen sind. Die Principien, die hierbei zur Anwendung kommen, können wir heuristische nennen, weil sie nicht als Resultate, sondern als leitende Maximen der Forschung auftreten. Der Gebrauch dieser Principien findet seine Begründung darin, dass das denkende Subject

niemals von den Erkenntnissformen abstrahiren kann, welche sich durch die Beziehungen, in die es zu den Objecten seines Denkens tritt, entwickelt haben. Der berechtigten Anwendung derselben muss darum stets die sorgfältige Untersuchung der Frage vorangehen, ob sie nothwendige Erkenntnissbedingungen sind, und ob die Objecte, in ihrem rein erfahrungsmässigen Zusammenhang betrachtet, ihnen wirklich entsprechen. An der Prüfung dieser Frage lässt es nun die ursprüngliche Naturphilosophie fehlen. Sie überträgt ohne weiteres gewisse Allgemeinbegriffe auf die Naturgegenstände. Aber weder weist sie deren specifische Berechtigung noch überhaupt die Zulässigkeit des ganzen Verfahrens nach; daher denn auch ihr Gebäude skeptischen Angriffen niemals Stand halten kann.

Naturgemäss sind die Einflüsse, welche die Gestaltung bestimmter Grundanschauungen hervorrufen, von Anfang an doppelter Art: einerseits gibt es bestimmte Naturerscheinungen, die vor andern die Aufmerksamkeit fesseln, anderseits subjective Begriffe und Gefühlsrichtungen, die als das Bewusstsein beherrschende Mächte zugleich die Auffassung der Aussenwelt lenken. Diese beiden Einflüsse greifen stets in einander ein: nach den Ideen, die uns lenken, richtet sich unsere Apperception der Objecte, und an diesen wirken wieder gewisse durch ihre Constanz ausgezeichnete Eigenschaften auf unsere Ideen zurück.

Schon in der frühesten Naturphilosophie treten uns auf diese Weise zwei Grundanschauungen entgegen, die sich in vielfach veränderten Gestalten innerhalb der physikalischen Forschung bis zum Beginn der Neuzeit bekämpfen. Auf der einen Seite ist die antike Atomistik beherrscht von dem Begriff der mechanischen Causalität. Indem sich die Bewegungserscheinungen, vor allem die beim Stoss der Körper eintretenden Uebertragungen der Bewegung, als ein unmittelbar anschauliches Bild causaler Beziehung darbieten, entsteht die Forderung, alle andern Formen der Naturcausalität auf dieses Urbild zurückzuführen und so einen einheitlichen Zusammenhang der Naturerscheinungen zu Stande zu bringen, welcher zugleich der Forderung der Nothwendigkeit jedes einzelnen Geschehens genüge. Die atomistische Hypothese erkennt an, dass zahlreiche Erscheinungen jenem Bild des Stosses und der Bewegung nicht unmittelbar entsprechen, und sie betrachtet demgemäss, um gleichwohl das Postulat der mechanischen Naturerklärung aufrecht zu erhalten, alle sonstigen Erscheinungen als einen sinnlichen Schein, hinter dem als reales Substrat ein der Wahrnehmung unzugänglicher

mechanischer Vorgang verborgen sei. Der letztere fordert dann unsichtbare, also unmessbar kleine Körperelemente, die Atome, die, ähnlich den wahrnehmbaren Körpern, durch Zwischenräume getrennt sind, um gleich ihnen in mechanische Wechselwirkungen treten zu können. Ebenso sind alle weiteren Sätze der antiken Atomistik, insbesondere die Ueberzeugung von der absoluten Constanz der Materie, unmittelbare Folgen des in dieser Lehre zum Ausdruck gelangten mechanischen Causalitätsbegriffs.

Einer Annahme gegenüber, für die das denkende Subject selbst in dem Mechanismus der Körperwelt verloren geht, erhebt sich nun um so energischer eine Anschauung, die ein zusammenhängendes Bild der Natur zu gewinnen sucht, indem sie die ethischen Motive des menschlichen Handelns auf die Aussenwelt überträgt. Der Begriff, der hier zum herrschenden wird, ist der Zweck. Unter den Naturvorgängen, nach deren Vorbild man alle andern zu beurtheilen sucht, fesseln hier gerade diejenigen hauptsächlich die Aufmerksamkeit, deren Realität der Atomistiker leugnet: die Erscheinungen des Werdens und Vergehens und die auf sie zurückführenden qualitativen Veränderungen. Denn wie der Mensch da in eminentem Sinne zwecksetzend auftritt, wo er schöpferisch gestaltet, so erscheint auch die Natur vor allem dann von Zwecken bewegt, wenn sie neue Bildungen hervorbringt; das Vergehen aber ist ein nothwendiges Correlat des Werdens. Nirgends tritt dieses zweckvolle Werden und Vergehen so augenfällig hervor wie in der organischen Natur. Der organisirte Körper hat zu jeder Zeit den Vergleich mit einem Kunstwerk herausgefordert, und die Aufeinanderfolge seiner Entwicklungszustände legt den allgemeineren Gedanken einer zweckmässigen Weltentwicklung nahe. Zu einer derartigen Anschauung sind daher mannigfache Ansätze schon bei den älteren Philosophen, einem Heraklit, Anaxagoras, Empedokles, zu finden. Eine klarere Gestaltung aber gewinnt sie sammt ihren Motiven erst in der Platonisch-Aristotelischen Philosophie. Während bei Plato die ethische Quelle dieser ganzen Richtung offen zu Tage tritt, ist es Aristoteles, der zuerst dem Zweckbegriff seine allgemeinere Bedeutung gibt und in Verbindung damit den Entwicklungsgedanken vollständiger durchführt. Theils hierdurch, theils durch die Fülle seiner Einzelkenntnisse ist Aristoteles für diese teleologische Richtung der Physik auf lange Zeit massgebend geblieben.

Es ist ein Irrthum, wenn man zuweilen die Gegensätze mechanischer und teleologischer Physik zu den Gegensätzen von Empirie

und Speculation in Beziehung bringt, indem man den ersten Standpunkt aus einer objectiven Bearbeitung der Erfahrung, den zweiten aus einer durch subjective Begriffe gefälschten Ordnung derselben zu erklären sucht. Vielmehr sind beide Anschauungen von objectiven und von subjectiven Motiven bestimmt worden, und beide sind überwiegend speculativen Ursprungs. Der mechanische Causalitätsbegriff eines Demokrit war in der That ebenso gut ein durch die thatsächliche Erfahrung nur unzureichend unterstütztes Postulat wie der Entwicklungsgedanke des Aristoteles, und hinter jenem stand nicht minder wie hinter diesem als subjective Grundlage das menschliche Handeln; nur ging der Atomistiker ebenso einseitig von dem äusseren Effect, der bewegenden Wirkung auf umgebende Körper, aus, wie der teleologische Physiker von dem inneren Motiv der Handlung, der sie bestimmenden Zweckvorstellung.

Was uns heute vor allem als das Ungenügende aller dieser Bestrebungen erscheint, ist der vollständige Verzicht auf jede Begründung ihrer Voraussetzungen. Durch einen Machtspruch wird von den alten Naturphilosophen die Idee eines allgemeinen Substrates der Erscheinungen eingeführt. Man denkt weder daran nachzuweisen, warum überhaupt die Annahme eines solchen nothwendig sei, noch warum es die vorausgesetzte Beschaffenheit haben, also z. B. aus Atomen und leeren Zwischenräumen bestehen müsse. Nicht minder treten in der Physik des Aristoteles die allgemeinen Begriffe des Stoffs, der Form und des Entblösstseins, die verschiedenen Arten der Formbestimmung, die vier Elemente u. s. w. ohne jede Rechtfertigung als thatsächliche Bestimmungen des natürlichen Seins auf; namentlich aber die Grundanschauung, dass der Zweck die höchste und letzte Formbestimmung sei, gilt als eine durchaus selbstverständliche Annahme. Liesse sich auch denken, einem Demokrit habe seine Anschauung nur als eine hypothetische Form einheitlicher Naturbetrachtung gegolten, ähnlich wie dies bei dem späteren Erneuerer der Atomistik, bei Epikur, der Fall war, so liegt doch im allgemeinen eine solche Auffassung nicht im Charakter der antiken Naturphilosophie, und bei Aristoteles ist sie ganz und gar ausgeschlossen. Mit Rücksicht auf das Verhältniss der zu Grunde gelegten Principien und der auf sie gegründeten Erklärungsversuche bewahrt also die antike Naturphilosophie in allen ihren Richtungen einen überwiegend speculativen Charakter. Aus einer geringen Anzahl von Inductionen und Abstractionen, welche von der Oberfläche der Erscheinungen geschöpft sind, und aus bestimmten Begriffs-

postulaten gewinnt sie ihre Voraussetzungen. Da jene Inductionen und Abstractionen im wesentlichen schon der allverbreiteten vorwissenschaftlichen Erfahrung angehören, so gelten sie als selbstverständliche Wahrheiten, bei denen man sich jeder Nachweisung meint entschlagen zu können. Wie wäre es auch nöthig zu beweisen, dass der Stoss den Körper bewegt, oder dass alles Existirende aus Stoff und Form besteht? Gibt man sich gleich auf einem Standpunkte reiferer Reflexion einigermassen schon darüber Rechenschaft, dass Begriffe wie Stoff und Form erst in unserem Denken entspringen, so führt dies doch höchstens zu der Ueberzeugung, welche die Aristotelische Metaphysik beherrscht, dass die Begriffe Abbilder des substantiellen Seins der Objecte, oder dass, was damit übereinstimmt, die Objecte realisirte Begriffe seien. Noch weniger ist daran zu denken, dass man die objective Berechtigung jener Begriffspostulate, durch welche die Erfahrungsbegriffe überall erst ihre bestimmte Gestaltung gewinnen, anzweifelt. Eben darum, weil Causalität und Zweck Postulate sind, bleibt ihre Gültigkeit ursprünglich ausser Frage. Doch besteht hier allerdings ein bemerkenswerther Unterschied zwischen der causalen und der teleologischen Naturanschauung, der sich schon in ihren frühesten Gestaltungen äussert. Wenn diese den Zweck als den letzten Grund des Geschehens ansieht, so ist sie weit davon entfernt, gleichzeitig die Causalität leugnen zu wollen, sondern sie ist im Gegentheil der Meinung, damit nur den Causalbegriff selber vertieft zu haben. Dagegen verbindet sich schon der Atombegriff eines Demokrit mit der energischen Leugnung der Zwecke, und diese Tendenz ist seitdem der mechanischen Naturanschauung im allgemeinen erhalten geblieben.

Dies führt uns auf einen Unterschied beider Grundanschauungen, der für ihre historische Bedeutung massgebend geworden ist. Die mechanische Ansicht hat die Vorzüge der Folgerichtigkeit und der Einfachheit für sich. Aber eben deshalb setzt sie sich zunächst in Widerspruch mit der Vielgestaltigkeit der Erscheinungen, die verschiedenartige Principien der Erklärung zu fordern scheint. Dieser Forderung wird die teleologische Physik mehr gerecht, und sie ist daher schon mit Rücksicht auf die äussere Erfahrung ursprünglich einleuchtender, auch wenn man von ihren ethischen Beweggründen absieht. Keine Naturlehre hat aber wohl so sehr wie die Aristotelische allen den Bedürfnissen Rechnung getragen, die dem Standpunkte der unmittelbaren, wissenschaftlich noch nicht ausgebildeten Erfahrung entsprechen. Schon die Methode, deren sich der Stagirite über-

wiegend bedient, erscheint vollkommen geeignet, das nächste Wissensbedürfniss zu befriedigen. Sie besteht, gemäss dem Charakter der Aristotelischen Logik, in der Begriffssubsumtion und in der dialektischen Verknüpfung der Allgemeinbegriffe. Diese sind theils, wie die Gegensätze der Elemente, der natürlichen und der gezwungenen Bewegung, des Stoffs und der Form, dem unmittelbaren Eindruck der sinnlichen Objecte, theils, wie der Zweck, die Vollkommenheit, den nächstliegenden subjectiven Erfahrungen entnommen. Nachdem die Begriffssubsumtion dem ersten Ordnungsbedürfniss des Geistes Genüge geleistet, empfängt dann durch die dialektische Verarbeitung der Begriffe der speculative Trieb seine Befriedigung. Durch eine scharfsinnige Benützung der logischen Technik werden hier, indem der Philosoph die verschiedenen Begriffe zu einander in Beziehung setzt und namentlich von den Verfahrungsweisen der Eintheilung nach Gegensätzen und der Ausschliessung Gebrauch macht, allgemeine Begriffe gewonnen, die in der Aristotelischen Physik die Rolle von Naturgesetzen übernehmen. Jede Veränderung, so wird z. B. deducirt, ist entweder ein Werden oder ein Vergehen; Werden und Vergehen ereignen sich aber nur zwischen entgegengesetzten Dingen. Nun gibt es eine Bewegung, die nicht zwischen Gegensätzen stattfindet, die kreisförmige; also ist die kreisförmige Bewegung des Himmels ewig und unveränderlich*). Auf diese Weise gelangt Aristoteles zu dem seine ganze Naturlehre beherrschenden Satze, dass der gleichförmige Umschwung des Himmels der Ursprung aller Bewegungen und Veränderungen in der Natur sei. Diese Methode gewährt zugleich den Vortheil, dass sie gestattet, mehrere parallel laufende Beweisführungen zu entwickeln, in denen aus verschiedenen Vordersätzen der nämliche Schluss abgeleitet wird. So wird für den oben angeführten Satz noch eine grosse Anzahl anderer Beweise beigebracht, in denen successiv fast alle Grundbegriffe dieser Physik zur Verwendung kommen, so dass die verschiedenen Deductionen theils gegenseitig sich stützen, theils die festere Verbindung des speculativen Gebäudes vermitteln helfen. Zugleich hat diese teleologische Physik in dem „Zufälligen“, worunter sie alles versteht, was sich ihrem allgemeinen Zweckzusammenhang nicht fügen will, einen die Lücken ihrer Erklärung überall ausfüllenden, ebenfalls dem Anschauungsbereich des vorwissenschaftlichen Denkens entnommenen Hülfsbegriff zur Verfügung.

*) Aristoteles, Physik, VIII, 7.

Zu diesen scheinbaren Vorzügen der Methode tritt die vielseitigste Berücksichtigung der verschiedenen Erfahrungsgebiete. Nirgends wird an das Bewusstsein die harte Zumuthung gestellt, von den ihm selbst innewohnenden Motiven des Geschehens völlig abzusehen oder bestimmte äussere Naturvorgänge, die sich der unmittelbaren Beobachtung aufdrängen, schlechthin zu negiren. Neben der qualitativen Veränderung findet die mechanische Bewegung ihre Stelle, und der teleologische Grundcharakter seiner Physik hindert den Aristoteles keineswegs an der richtigen Erkenntniss einfacher mechanischer Sätze, wie des Hebelgesetzes*). So ist die Aristotelische Naturphilosophie ein dem Standpunkte unmittelbarer Erfahrung vollkommen angemessenes und demselben zugleich durch die unverhältnissmässige Ausbildung der dialektischen Hülfsmittel im höchsten Masse imponirendes System. Darum hat sie denn auch nicht nur während einer langen Zeit die Herrschaft behauptet, sondern der Entwicklung anderer Anschauungen als eines der mächtigsten Hindernisse im Wege gestanden. Je begreiflicher aber jene Herrschaft erscheint, um so mehr drängt sich die Frage auf, welche Ursachen schliesslich das Uebergewicht der mechanischen Naturansicht herbeiführten.

### b. Das Postulat der Anschaulichkeit.

Die gewöhnliche Antwort auf die obige Frage besteht darin, dass man auf die Uebereinstimmung der auf der Grundlage der Mechanik unternommenen Erklärungen mit der Erfahrung hinweist. Aber man übersieht hierbei, dass diese, übrigens nie mit absoluter Vollständigkeit und immer nur unter mancherlei hypothetischen Annahmen zu erreichende Uebereinstimmung das späte Product einer langen Entwicklung ist, und dass niemals der Nachweis der Durchführbarkeit der mechanischen Naturansicht gelungen wäre, wenn man diese nicht lange vorher als Forderung an die Interpretation der Erscheinungen herangebracht hätte. Nicht bloss die antike Atomistik war ein rein speculatives Gebäude, sondern auch im Zeitalter Galileis, als die mechanische Physik ihren Kampf um die Herrschaft begann, waren die Voraussetzungen derselben zumeist noch fragwürdig und lückenhaft. In der That ist der Grundgedanke der mechanischen Physik ebenso wenig unmittelbar und ausschliesslich der Erfahrung entnommen, wie die Begriffe der Dynamis und Energie

*) Aristoteles, Quaestiones mechanicae, cap. 4.

bei Aristoteles, sondern jener Gedanke ist zunächst als eine logische Forderung entstanden und hat dann erst in der fruchtbaren Anwendung, die er zuliess, seine Rechtfertigung gefunden. Jede wissenschaftliche Erklärung der Natur strebt, gemäss dem logischen Trieb des Bewusstseins, nach Einheit und Zusammenhang der Erscheinungen. Die teleologische Physik sucht diese Einheit in dem Zweck als demjenigen Allgemeinbegriff, der aus dem eigenen Handeln des Bewusstseins entspringt, und dem sie daher die durch die unmittelbare Erfahrung gewonnenen Reflexionsbegriffe unterordnet. Dem gegenüber besteht das treibende Motiv, das die mechanische Physik und schon die antike Atomistik beseelt, in der vollkommenen Anschaulichkeit der Vorgänge. Die Bewegungen der Körper und ihre Wechselwirkungen im Stoss sind ein anschauliches Geschehen, bei dem zugleich der Zuschauer von seiner eigenen Anwesenheit abstrahiren kann, so dass hierin eine Bürgschaft dafür zu liegen scheint, dass in Folge der Ableitung aus Bewegungen die Erscheinungen auf ihren objectiven Gehalt zurückgeführt werden. Wie die teleologische Physik unter dem Postulat der subjectiven Begreiflichkeit, so handelt daher die mechanische unter dem der objectiven Anschaulichkeit des Geschehens, und dieses erst führt zu jener streng causalen Betrachtung, welche dann durch den dem Causalitätsprincip eigenen Vorzug logischer Folgerichtigkeit ihrerseits das Uebergewicht der mechanischen Naturansicht verstärken hilft. Der Hauptgegensatz, der in dem Kampfe teleologischer und mechanischer Physik entscheidend wird, dreht sich demnach um die Frage, ob die Natur als ein begrifflicher, oder ob sie als ein anschaulicher Zusammenhang aufgefasst werden solle. Im ersteren Sinne entscheidet sich das Aristotelische System und jedes, das nach ihm von analogen dialektischen Voraussetzungen ausgeht, wie z. B. die Naturphilosophie Schellings und Hegels; im Sinne der Anschaulichkeit hat die neuere wissenschaftliche Physik die Frage beantwortet, und sie hat damit in Bezug auf die allgemeine Richtung seiner Bestrebungen dem Demokrit gegen Aristoteles und seine verspäteten Nachfolger Recht gegeben.

Die innere Nothwendigkeit dieser Entscheidung liegt aber im Wesen der äusseren Erfahrung begründet. Die Natur ist die Gesammtheit der in der Anschauung gegebenen Erscheinungen. An die Bedingungen der Anschauung bleibt daher alle Erkenntniss der Natur gebunden. Niemals kann sich eine solche Erkenntniss anders vollziehen, als indem sie das anschaulich Gegebene auf ein anderes

anschaulich Gegebenes und so die Gesammtheit der Naturerscheinungen schliesslich auf eine gewisse Anzahl primitiver Thatsachen der Anschauung zurückführt. Auch die Begriffe, die zur Ordnung dieser Thatsachen dienen, bedürfen der anschaulichen Verwirklichung; niemals können sie als leere Formen über der Welt der Erscheinungen schweben. Dies ereignet sich aber bei jenen Kategorien der teleologischen und dialektischen Naturphilosophie, die theils aus den Erscheinungen abstrahirt, theils aus gewissen logischen und ethischen Motiven an sie herangebracht werden, ohne in bestimmten allgemeinen Eigenschaften der äusseren Anschauung unmittelbar objectivirt zu sein. Freilich sind auch die Causalität und der im richtigen Sinne verstandene Zweckbegriff, der lediglich eine Umkehrung der causalen Beziehung enthält (vgl. Bd. I, S. 642), Kategorien, die unser Denken an die Erfahrung heranbringt; aber diese Begriffe sind eben nur insofern von physikalischer Anwendung, als sie in einfachsten Thatsachen der Anschauung unmittelbar verwirklicht sind. Dies geschieht für das Gesammtgebiet der Naturlehre in dem mechanischen Causalbegriff, welcher als Ursache und als Wirkung nur anschaulich gegebene äussere Bewegungen anerkennt, indem er lediglich in die regelmässige Beziehung dieser Bewegungen das Causalverhältniss verlegt.

Ohne sich dieser logischen Motive ihres Thuns im allgemeinen bewusst zu sein, geht die mechanische Physik von der Voraussetzung aus, dass der einzige wirkliche Gegenstand ihrer Untersuchung die Objecte der Anschauung in ihren anschaulich gegebenen Beziehungen seien. Wenn sie sich gewisser Allgemeinbegriffe, wie der Substanz und Causalität, bedient, so bedeuten diese nichts, was zu den Anschauungsobjecten hinzukäme oder ausserhalb derselben eine selbständige Wirklichkeit besässe, sondern es sollen durch sie nur gewisse Existenz- und Beziehungsformen des Wirklichen ausgedrückt werden, zu deren Gestaltung unser Denken durch die sinnliche Wahrnehmung angeregt wird. Indem nun aber jene Beziehungsformen als constante Elemente der Wahrnehmungen wiederkehren, neben denen sich veränderliche und darum für die begriffliche Auffassung zufällige Bestandtheile bemerklich machen, erhebt sich die Forderung, diese letzteren zu eliminiren und so die äussere Erfahrung ausschliesslich auf die constanten Elemente zurückzuführen, mit deren Aufhebung die anschauliche und die begriffliche Auffassung der Welt gleichzeitig verschwinden würden. Diese constanten Elemente aller Erfahrung sind die zeitlichen und räumlichen

Formen des Geschehens, losgelöst von den qualitativen Elementen der Wahrnehmung, die in der einzelnen Vorstellung niemals fehlen, und von denen wir daher auch nur absehen können, indem wir ihren Inhalt als einen gleichgültigen auffassen. Von jenen beiden Elementen der Erfahrung sind aber die räumlichen wieder diejenigen, die bei allen quantitativen Bestimmungen der Naturerscheinungen die allein massgebende Bedeutung besitzen, da alle Zeitmasse auf räumliche Masse zurückführen. Die letzten Elemente aller Messung der Naturerscheinungen sind auf diese Weise die geometrischen: die gerade Linie und der Winkel. Durch sie wird das räumliche Verhalten der Erscheinungen direct, das zeitliche indirect gemessen, indem auf das Postulat eines durchgängig gesetzmässigen Verhaltens der Vorgänge die Voraussetzung gegründet wird, dass die unter übereinstimmenden Bedingungen verflossene Zeit stets der Linien- oder Winkelgrösse einer Bewegung von gleichem Werthe entspreche. (Vgl. Bd. I, S. 490 und unten Cap. II, 2.)

Die grundlegende Bedeutung, die auf solche Weise der Raum für die Verknüpfung der Naturerscheinungen gewinnt, wirkt nun weiterhin auch auf die Vorstellungen über das Substrat jener Erscheinungen zurück, indem hieraus die an einer früheren Stelle bereits besprochene Tendenz der Naturerklärung entspringt, zunächst der materiellen Substanz die abstracten Eigenschaften des Raumes, vor allem seine Constanz, beizulegen und sodann von hier aus auch den ursprünglich regellos schweifenden Causalbegriff auf die räumliche Wechselbeziehung unveränderlicher Gebilde zu beschränken. (Bd. I, S. 543.) Erst indem diese näheren Bestimmungen des allgemeinen Postulates der Anschaulichkeit, welche die Grundvoraussetzungen der mechanischen Naturlehre bilden, hinzutreten, wird nun jenes Postulat selbst in der vollkommensten Weise erfüllt. Denn durch die Reduction der Beziehungen aller Wahrnehmungsobjecte auf die rein geometrischen Beziehungen räumlicher Gebilde wird in eminentem Sinn dem Streben nach Anschaulichkeit entsprochen. Eine Verstärkung erhält ausserdem diese Richtung aus dem praktischen Wunsche, die sich immer vollkommener entwickelnden Hülfsmittel der Mathematik der physikalischen Forschung dienstbar zu machen. Hier treffen vollständig die Entwicklungsbedingungen der Naturwissenschaft mit denen ihrer abstracten Grundlage, der Mechanik, zusammen. Wie diese durch jene mathematische Tendenz dazu getrieben wird, ihre Deductionen an geometrische Abstractionen zu knüpfen, denen keine Wirklichkeit in der Erfahrung zukommt, so

überträgt hinwiederum die Physik diese Abstractionen der Mechanik so viel als möglich auf ihr Gebiet, um erst nachträglich an ihnen die Veränderungen anzubringen, die durch die einzelnen Erfahrungen gefordert werden. Die Voraussetzungen über die letzten Substrate von Substanz und Causalität müssen aber in Folge dessen einen begrifflich abstracten Charakter bewahren, der ganz jenen abstracten Formbegriffen entspricht, welche die Mechanik ihren einfachsten Deductionen zu Grunde legt.

Auf diese Weise findet das Postulat der Anschaulichkeit in gewissem Sinne an den Voraussetzungen über das Substrat der Naturerscheinungen, das niemals selbst in der Anschauung gegeben ist, seine Grenze. Die Annahmen über dieses Substrat müssen so beschaffen sein, dass die Wirkungen desselben dem Postulat der Anschaulichkeit genügen, und dies schliesst nur ein, dass das Substrat selbst die abstracten zeitlich-räumlichen Elemente der Anschauung enthalte. Aber diese Elemente brauchen keineswegs irgend welchen wirklichen Objecten der Anschauung zu gleichen. Wie sich vielmehr die Mechanik mit vollem Recht der Abstractionen eines physischen Punktes, eines absolut starren oder absolut elastischen Körpers u. dergl. bedient, ohne darauf Anspruch zu machen, dass diese mechanischen Gebilde wirklich in der Natur vorkommen, ebenso sind die letzten Voraussetzungen über die Materie Begriffsbildungen, die zum Behuf der Verknüpfung der in der Anschauung gegebenen Erscheinungen gemacht werden, die aber darum selbst keineswegs irgend welchen Objecten der Anschauung zu gleichen brauchen. Wir werden sehen, dass die Nichtbeachtung dieser abstracten Natur der hypothetischen Hülfsbegriffe der Naturwissenschaft von frühe an das Problem der Materie in Verwirrung gebracht hat, indem man gerade vom Standpunkte der mechanischen Physik aus geneigt war, dem Postulat der Anschaulichkeit den Sinn zu geben, dass dasselbe die durchgängig anschauliche d. h. mit den Objecten der wirklichen Anschauung übereinstimmende Natur der Begriffe verlange. (Vgl. Cap. II, 3.) Man übersah hierbei, dass diese Annahme sogar mit der Forderung, alle Naturerscheinungen auf Mechanik zurückzuführen, in Widerspruch stand, da die Mechanik ihrerseits alle ihre Erklärungen auf abstracte Begriffspostulate gründet, die in keiner wirklichen Anschauung gegeben sind. Dieser Widerspruch blieb aber deshalb unbeachtet, weil man zwar zugab, dass die letzten Abstractionen der Mechanik, wie der physische Punkt, der absolut starre Körper, gänzlich hypothetischer Natur seien, dagegen glaubte, den Voraussetzungen

über das Substrat der Naturerscheinungen eine nicht bloss hypothetische Bedeutung oder eine solche doch nur in dem Sinne zuschreiben zu sollen, als der Widerstreit der Meinungen über diese Voraussetzungen noch nicht ganz ausgeglichen sei. Hierbei blieb ausser Acht, dass die letzteren ihrer Natur nach zu den definitiven Hypothesen gehören. (Vgl. Bd. I, S. 458.) Zugleich hängen aber in diesem Fall der definitive und der abstract begriffliche Charakter der Hypothesen enge mit einander zusammen: da das letzte Substrat der Erscheinungen nie unserer Anschauung gegeben sein kann, so sind alle Annahmen über dasselbe ein für allemal hypothetisch, und sie sind zugleich, eben weil sie niemals anschaulich sein können, von abstract begrifflicher Art.

Hiernach sind es bei allen diesen Begriffsentwicklungen logische Motive, die der naturwissenschaftlichen Erfahrung in dem Sinne als speculative Beweggründe gegenübertreten, als sie nicht erst die Begründung durch die Erfahrung abwarten, sondern von vornherein die Gesichtspunkte abgeben, unter denen man dieselbe beurtheilt. Hier beginnt nun aber zugleich der tiefgreifende Unterschied zwischen den älteren Anticipationen der mechanischen Naturanschauung und ihrer Verwirklichung in der neueren Physik. Dort bleibt diese Anschauung eine speculative Forderung, hier gilt sie nur deshalb als gesichert, weil sie nicht bloss Voraussetzung, sondern auch Resultat der wissenschaftlichen Erfahrung ist. Es wird zugestanden, dass alle speculativen Gründe nicht zureichen würden, die Voraussetzungen der mechanischen Physik festzuhalten, wenn sie sich nicht fortwährend brauchbar erwiesen zu einer wahren Interpretation der Natur.

### c. Der kritische Zweifel.

Hiermit kommen wir auf den entscheidenden Grund, dem die mechanische Naturansicht ihren Sieg über die ältere teleologische Physik verdankt. Dieser Grund, der im historischen Sinne der letzte, an sich aber der wichtigste ist, besteht in dem Verhalten des erkennenden Subjects zur Erfahrung. Ein naiver Glaube an die unmittelbare Wirklichkeit der Erfahrung ist der Standpunkt der älteren Naturphilosophie. Mag auch aus speculativen Bedürfnissen, die mit einzelnen Erfahrungseinflüssen zusammentreffen, eine Substanz, die nicht unmittelbar wahrgenommen werden kann, als Grundlage der thatsächlichen Erfahrung gefordert werden, so ge-

schieht dies doch nur, um Einheit und Zusammenhang in die vielgestaltige Wahrnehmung zu bringen, an deren objectiver Realität nicht gezweifelt wird. In dieser Beziehung stehen die Demokritische und die Aristotelische Physik auf gleichem Boden. Wohl hat auch die Wissenschaft des Alterthums den Zweifel gekannt. Weist doch schon Protagoras auf die Subjectivität der sinnlichen Erfahrung hin. Aber dieser Zweifel ist hier das Erzeugniss einer rein logischen Reflexion, und er bleibt darum für die positive Wissenschaft unfruchtbar, der er den Weg eher zu verlegen als zu ebnen sucht. Ganz anders verhält es sich mit demjenigen Zweifel, der die Triebfeder der neueren Naturforschung ist. Hier ist man weit entfernt an der Erkennbarkeit der Dinge überhaupt zu zweifeln; im Gegentheil, die Forderung einer solchen bildet die Voraussetzung aller Naturwissenschaft. Aber mit ihr verbindet sich die Annahme, dass die unmittelbare Wahrnehmung erst der wissenschaftlichen Prüfung bedürfe, ehe bestimmt werden könne, was als das reale Substrat der Erscheinungen anzunehmen sei. Dieser kritische Zweifel beseelt die neuere Naturforschung von ihren ersten Anfängen an, und er hat sie von Stufe zu Stufe bei ihrer Entwicklung begleitet. Seine Wirkung aber war vielleicht um so grösser, je weniger sich die Forscher, die unter seinem Antriebe handelten, desselben deutlich bewusst wurden. Ein solches Bewusstsein wäre nicht möglich gewesen ohne allgemeinere logische Reflexionen, und diese führen zunächst nur allzu leicht die Gefahr jenes absoluten Zweifels mit sich, der die Voraussetzung der physikalischen Wissenschaft, das Postulat der Begreiflichkeit der Welt, aufhebt.

Mit den logischen Principien, die zur wissenschaftlichen Untersuchung erfordert werden, sind die Alten im allgemeinen hinreichend bekannt gewesen; aber es hat ihnen der kritische Zweifel gefehlt, der den Antrieb zu einer von richtigen Grundsätzen geleiteten Naturforschung hervorbringt. Wie sehr in diesem Punkte der entscheidende Unterschied der älteren und neueren Wissenschaft liegt, das tritt deutlich hervor, sobald man die Behandlung irgend eines einzelnen Problemes vergleicht. In der Untersuchung der Farben stützt sich z. B. Aristoteles so gut wie Newton auf die Voraussetzung, dass die Mannigfaltigkeit der Erscheinungen auf einen einheitlichen Grund zurückgeführt werden müsse. Aber dem Aristoteles kommt kein Zweifel daran, dass Weiss, Schwarz und jede einzelne Farbe so, wie sie von uns empfunden werden, auch objectiv existiren; für ihn besteht daher die Aufgabe nur darin, die Gesammt-

heit der Lichterscheinungen unmittelbar einem einheitlichen Begriff unterzuordnen. Dieser ist ihm die „Thätigkeit des Durchsichtigen“, welche die Bedingung aller Lichterscheinungen sein soll; die Farben gelten ihm demnach als unmittelbare Eigenschaften der Objecte, die aber erst durch das Licht, die Thätigkeit des Durchsichtigen, actuell werden. Die Wahrnehmbarkeit des Lichts und der Farben wird endlich darauf zurückgeführt, dass das Durchsichtige sowohl innerhalb wie ausserhalb des Auges vorkomme*). In dieser Theorie ist offenbar der unmittelbare Inhalt der sinnlichen Wahrnehmung, dem ohne weiteres objective Realität zugeschrieben wird, einfach unter gewisse allgemeine Begriffe gebracht, die dem System conform sind. Newton ging aus von den Erscheinungen der Farbenzerstreuung. Da er entdeckt hatte, dass ein Sonnenstrahl durch das Prisma vollständig in divergirende Farben zerlegt wird, so begannen sich ihm Zweifel an der selbständigen Existenz des weissen Lichtes zu regen, und er wurde so zu Untersuchungen veranlasst, deren Zweck zunächst in der Prüfung jenes Zweifels bestand, und die ihn schliesslich, hauptsächlich in Folge der gelungenen Wiedervereinigung der Farben zu Weiss, zu dem Ergebnisse führten, dass das Sonnenlicht aus farbigen Strahlen von verschiedener Brechbarkeit zusammengesetzt sei. Auch die hierauf von Newton gegründete Emanationstheorie hielt aber dem kritischen Zweifel nicht auf die Dauer Stand. Zunächst waren es die Bedenken über die weiteren Schicksale des angenommenen Lichtstoffs, die hier als skeptische Elemente wirkten. Nachdem schon Huygens die Erscheinung der Doppelbrechung entdeckt und gezeigt hatte, dass sie sich nicht aus den Emanationsvorstellungen, wohl aber aus der Annahme einer Wellenbewegung herleiten lasse, neigte sich endlich in Folge von Fresnels Untersuchung der Interferenzerscheinungen dieser Annahme der Sieg zu. In dem nun folgenden Kampfe zwischen diesen Hypothesen haben dann die von beiden Seiten beigebrachten kritischen Bedenken zur Vervollkommnung der endgültig siegenden Theorie beigetragen. Führte die Undulationstheorie Interferenz, Doppelbrechung und Polarisation als gewichtige Argumente gegen die Emanationslehre auf, so konnte sie dagegen nur langsam die Schwierigkeiten beseitigen, die sich ihrer Erklärung der Beugung und Farbenzerstreuung in den Weg stellten.

*) De anima, cap. 5—7. Vgl. ausserdem die (unechte) Schrift: De coloribus.

In vielen Fällen ist, wie in dem hier angeführten, der kritische Zweifel durch Beobachtungen und Experimente angeregt worden, und seine Verfolgung hat dann in wachsendem Masse den Anstoss zu neuen Untersuchungen gegeben. In andern Fällen sind es speculative Voraussetzungen gewesen, die zuerst die Bestreitung gewisser naiver Vorstellungen veranlassten. Das hervorragendste Beispiel dieser Art ist die Copernikanische Hypothese. Das Ptolemäische Weltsystem war auf die Ueberzeugung von der unmittelbaren Realität der wahrgenommenen kosmischen Bewegungen gegründet, und es hatte den Zusammenhang dieser Bewegungen durch eine grosse Zahl sinnreich ausgedachter Hülfsannahmen hergestellt. Der Zweifel an der Wahrheit dieses Systems entsprang bei Copernikus lediglich aus dem Gedanken, dass es die wünschenswerthe Symmetrie und Regelmässigkeit vermissen lasse*). Erst der Kampf beider Systeme um die Herrschaft führte in der Beobachtung der Jupitermonde und der Lichtgestalten der Venus durch Galilei zu entscheidenden Erfahrungen.

Das Copernikanische Weltsystem hat dann mehr als irgend eine andere Thatsache dem kritischen Zweifel vorgearbeitet. Waren einmal die sichtbaren Bewegungen der Sternenwelt als ein sinnlicher Schein nachgewiesen, so erschien jeder Zweifel an der Realität der unmittelbaren Wahrnehmung berechtigt. Bald waren es, wie in diesem Fall, speculative Gründe, bald zufällige Beobachtungen, die den Zweifel anregten, bald hat derselbe von einem bestimmten Erfahrungsgebiet aus auf andere sich ausgebreitet. In letzterer Beziehung ist es bedeutungsvoll, dass die Entwicklung der neueren Physik durch die grossen geographischen und kosmologischen Entdeckungen vorbereitet wurde. Bei diesen wurde der menschliche Geist durch Thatsachen, die sich mit zwingender Gewalt der Wahrnehmung aufdrängten, genöthigt eingewurzelte Vorstellungen zu berichtigen, und er trat nun von selbst auch den Erscheinungen seiner unmittelbaren Umgebung mit kritischen Bedenken gegenüber. Da diese aber willkürlichen Eingriffen leicht zugänglich sind, so war damit zugleich der Gedanke der experimentellen Untersuchung nahegelegt.

### d. Das Princip der Einfachheit.

Die Methode jener naturphilosophischen Behandlung der Erscheinungen, für die uns die Aristotelische Physik als typisches

---

*) Copernicus, De revolutionibus orbium coelestium, lib. I, cap.1—10.

Beispiel gilt, ist hinreichend gekennzeichnet durch die bereits angedeuteten Eigenschaften, dass sie aus dem Ganzen das Einzelne construirt, dass sie in die Mannigfaltigkeit der Naturerscheinungen durch einen festgefügten logischen Begriffsschematismus Ordnung zu bringen sucht, und dass die Begriffe, die diese Ordnung bewirken sollen, unbedenklich aus allen dem Denken zugänglichen Gebieten aufgenommen und in andere übertragen werden, dass insbesondere aber ethische Begriffe oder überhaupt solche, die der Sphäre menschlicher Willensthätigkeit entlehnt sind, in der Naturerklärung eine wichtige Rolle spielen. Dem gegenüber erscheint die gewöhnliche Angabe, dass die exacte Naturforschung überall mit dem Einzelnen beginne, weder genügend noch in dieser Allgemeinheit überhaupt richtig. Denn oft genug muss ein allgemeiner Gedanke erst der einzelnen Forschung den Weg zeigen: so das Copernikanische System den Beobachtungen und Rechnungen Keplers oder das Beharrungsprincip den mechanischen Versuchen Galileis. Der Mythus, dass Baco von Verulam der grosse Gesetzgeber naturwissenschaftlicher Methodik gewesen, ist zwar allmählich im Verschwinden begriffen. Aber die durch diesen Mythus lebendig gewordene Vorstellung, dass die Induction das logische Instrument der Naturforschung sei, dem sie alle ihre Erfolge verdanke, ist noch vielfach geblieben. Dass Baco, wenn auch wenig vertraut mit der Naturwissenschaft seiner Zeit, doch von dem Geiste derselben mächtig erfasst war, lässt sich freilich fast aus jeder Zeile seiner Schriften herauslesen. Aber ebenso offenkundig ist es, dass nicht die von der Naturforschung geübte Methode ihn mit sich fortriss, sondern die von ihr herbeigeführte und durch sie geahnte Erweiterung des Horizonts der Erfahrung. Ihn erfüllt darum ganz der Gedanke, wie in der kürzesten Zeit eine möglichst grosse Anzahl fruchtbringender Erfahrungen zu sammeln und zu ordnen sei. Ueber dem Eifer, mit dem er diesen Plan betreibt, versäumt er es, die von ihm aufgestellte Regel, dass man allgemeine Principien stets aus einzelnen Thatsachen ableiten müsse, auf das Object seiner eigenen Untersuchungen anzuwenden. Seine Methode der Induction ist nicht mustergültigen Beispielen physikalischer Forschung entnommen, sondern nur aus der allgemeinen Forderung hervorgeflossen, dass alles Wissen aus der Erfahrung stamme.

In Wahrheit ist aber auch das Verfahren der Naturforschung nicht im mindesten aus der Voraussetzung der Baconischen Regeln, dem Verzicht auf alle Speculation, die der Sammlung der Erfahrungen

vorausgehe, hervorgegangen, sondern es stützt sich auf einen Gedanken, der selbst speculativen Ursprungs ist. Dieser Gedanke, der von den übrigen Naturforschern der Zeit in einer mehr instinctiven Weise befolgt, doch von Galilei erst an verschiedenen Stellen ausdrücklich hervorgehoben wird, besteht in der Voraussetzung, dass alles Geschehen in der Natur einfachsten Regeln folge, und dass daher jede Untersuchung der Naturerscheinungen von möglichst einfachen Annahmen auszugehen habe. Dieses Princip der Einfachheit ist es, das Copernikus zu seiner heliocentrischen Hypothese führt, das Kepler veranlasst, die excentrischen Kreise und Epicykeln bei Seite zu legen, um zu prüfen, ob die Annahme einer einfachen Curve den Forderungen der Beobachtung genüge, und das dann bei Galilei die doppelte Bedeutung eines Naturgesetzes und eines methodologischen Postulates annimmt. Dem Naturgesetz gibt er mehrere Formen, die alle den nämlichen Gedanken in verschiedener Weise teleologisch ausdrücken. Dass die Natur die Dinge nicht ohne Noth vervielfältige, dass sie sich der leichtesten und einfachsten Mittel bediene, und dass sie nichts vergeblich thue: diese Sätze gelten ihm als Axiome*). Ihnen parallel geht aber der von ihm überall befolgte methodische Grundsatz, der ihm offenbar als die logische Kehrseite derselben erschienen ist: dass man die Naturerscheinungen so viel als möglich unter den einfachsten Bedingungen untersuchen und ihrer Erklärung die einfachsten Annahmen zu Grunde legen müsse**). Jene teleologisch geformten metaphysischen Axiome können selbstverständlich kritischen Einwürfen ebenso wenig Stand halten wie die Grundbegriffe der Aristotelischen Naturphilosophie. Dennoch wird kein Einsichtiger bezweifeln, dass der ihnen entsprechende methodische Grundsatz für die exacte Wissenschaft fruchtbringender geworden ist als alle Regeln Bacos zusammengenommen.

Der Grundgedanke dieses Princips ist aber älter als das Zeitalter Galileis. Auch er reicht in die antike Atomistik zurück. Indem diese alle Veränderungen in der Natur auf anschauliche Formen des Geschehens zurückzuführen suchte, schwebte ihr unausgesprochen bereits das Princip der Einfachheit vor. Mit Hülfe desselben vermied sie jene Vermengung ethischer Motive mit dem natürlichen Geschehen, die der gleichzeitigen Elementenlehre des

*) Dialoghi dei massimi sistemi, III. Opp. Tom. I, p. 429.

**) Dial. delle nuove scienze, III. Opp. Tom. XIII, p. 154. (Ediz. Alberi.)

Empedokles ihre Richtung gab. Der Stoss ist die einfachste anschauliche Form der Ursache einer Veränderung; darum wird er der Atomistik zum Urbild aller Causalität. Dieses Motiv der Einfachheit ist es, welches so neben der Anschaulichkeit den atomistischen Vorstellungen ihren ungeheuren Einfluss in den kommenden Zeiten gesichert hat, obgleich sie in der nächsten Zukunft der überwältigenden Macht teleologischer Naturanschauungen unterliegen mussten. Auch besass hier das Princip der Einfachheit noch einen ausschliesslich metaphysischen Charakter; es hatte sich noch nicht zu einer methodischen Regel gestaltet. Hieraus entsprang die Unzulänglichkeit und Einseitigkeit dieser mechanischen Naturphilosophie. Der Demokritischen Atomistik liegt der Gedanke des Experimentes und der exacten Beobachtung ebenso fern wie der Aristotelischen Physik. Nur dadurch, dass Galilei den Grundsatz der Einfachheit zum Leitstern seiner Methode wählte, wurde er vor den Gefahren bewahrt, zu denen auch ihn die metaphysisch-teleologischen Formulirungen des nämlichen Princips leicht hätten verführen können. Denn nun galt ihm die Einfachheit nicht mehr an und für sich als Kriterium der Wahrheit, sondern sie blieb ihm lediglich eine Forderung, nach welcher sich die der Untersuchung vorausgehenden Hypothesen richten müssten. Damit diese Hypothesen Anspruch auf Wahrheit erheben konnten, wurde weiterhin ihre Bestätigung durch die Erfahrung verlangt. So vollzog sich die der antiken Naturphilosophie noch fern liegende logische Unterscheidung von Hypothesen und Thatsachen, eine Unterscheidung, welche das in der Naturwissenschaft herrschende methodische Verfahren vorzugsweise kennzeichnet. (Vgl. Bd. I, S. 452 ff.)

Schon die oberflächliche Betrachtung irgend eines Gebietes von Naturerscheinungen erweckt in uns Vorstellungen über die wechselseitige Beziehung der einzelnen in der Erfahrung gegebenen Objecte und Vorgänge. Diese unüberwindliche Neigung des Geistes zur Interpretation der Erscheinungen, die der wissenschaftlichen Untersuchung vorausgeht, und in der die ursprüngliche Naturphilosophie ihre Quelle hat, wird von der exacten Forschung nicht, wie es die Baconische Vorschrift verlangt, als eine unerlaubte Uebereilung angesehen, sondern ihr Streben geht dahin, diese unvermeidliche „anticipatio mentis" in eine der Prüfung durch die Erfahrung zugängliche Voraussetzung umzuwandeln. Demgemäss sucht man eine vorläufige Hypothese über den zu erwartenden Zusammenhang der Erscheinungen zu bilden, bei welcher sich das Princip der Ein-

fachheit namentlich in der Weise bethätigt, dass alle Annahmen theils den zu erklärenden Thatsachen selbst, theils solchen Erfahrungen, die ihnen gleichartig sind, entnommen werden. Hierdurch erfährt jenes Princip seine angemessene Anwendung und seine nothwendige Einschränkung. Denn die wesentliche Bedeutung desselben besteht nun darin, dass es erstens alle den beobachteten Erscheinungen fremdartigen Gesichtspunkte fern hält, und dass es zweitens einen regelmässigen Fortschritt der Untersuchung von den einfacheren zu den verwickelteren Thatsachen verlangt. Zugleich hat aber nicht mehr die Einfachheit als solche, sondern nur die Uebereinstimmung mit der Erfahrung den Werth eines Kriteriums der Wahrheit. Das Princip der Einfachheit hat auf diese Weise vollständig die Bedeutung eines metaphysischen Axioms verloren und diejenige einer methodischen und heuristischen Regel gewonnen. Bei der Untersuchung eines bestimmten Gebiets von Erfahrungen geht der Naturforscher von der einfachsten Erscheinung dieses Gebietes aus, die ihm zugänglich ist. Er legt der Ableitung derselben eine einfache, d. h. eine bloss den Thatsachen selbst und den ihnen ähnlichen entnommene Hypothese zu Grunde. Die Zulässigkeit dieser Hypothese wird dann durch Beobachtung oder Experiment geprüft, um sie, wenn sich ein Widerspruch zeigt, angemessen zu verändern oder durch eine andere Annahme zu ersetzen. Ist auf solche Weise für eine Anzahl einfacherer Thatsachen eine Erklärung gegeben, so sucht man verwickeltere Erscheinungen des nämlichen Gebietes zunächst auf jene einfacheren zurückzuführen und, wo dies nicht vollständig gelingt, weitere ergänzende Hypothesen zu erfinden, die wiederum die Probe der Prüfung an der Erfahrung bestehen müssen.

In diesen Anwendungen aber bewährt es sich, dass sich das Princip der Einfachheit mit dem der Anschaulichkeit verbindet, um einer Classe von Naturerscheinungen den Vorzug zu verschaffen vor allen andern, den Bewegungserscheinungen. Sie sind einfach und anschaulich zugleich, und sie sind es, die einerseits durch ihren relativ leicht übersehbaren Zusammenhang das Causalbedürfniss des Denkens vorzugsweise befriedigen, und die anderseits, wo es gelingt ihnen die concrete Erfahrung unterzuordnen, durch die glückliche Verbindung von Hypothesen und Thatsachen dem kritischen Zweifel ein Ziel setzen. So weisen die heuristischen Postulate der Naturerkenntniss auf die Principien der Mechanik als diejenigen Grundsätze hin, die für den ganzen Umfang der Naturforschung Allgemeingültigkeit besitzen.

## 3. Die Principien der Mechanik und der Causalbegriff der mechanischen Naturlehre.

### a. Die Entwicklung der mechanischen Grundbegriffe.

Die wissenschaftliche Mechanik hat mit einzelnen Erkenntnissen begonnen, die sich auf die Erscheinungen der Bewegung unter den relativ einfachsten Bedingungen bezogen. Solche einfachste Bedingungen des mechanischen Geschehens sind dann gegeben, wenn an einem Körper verschiedene bewegende Wirkungen mit einander im Gleichgewicht stehen. Denn in diesem Falle kommen, da eine wirkliche Bewegung nicht eintritt, Zeit und Geschwindigkeit, die sonst unerlässlichen Bestandtheile der Bewegungsvorstellung, nicht unmittelbar in Betracht, sondern es genügt die Kenntniss der geometrischen Eigenschaften der Körper sowie der Grösse und Richtung der an ihnen angreifenden Kräfte, um die Bedingungen des Gleichgewichts aufzufinden. In den Anfängen der statischen Untersuchung, wie sie das Alterthum aufzuweisen hat, wird aber das Problem noch nicht einmal in dieser Allgemeinheit aufgestellt, sondern man begnügt sich mit der Berücksichtigung einer Kraftform, die so zu sagen als selbstverständliche Eigenschaft aller Körper zu den rein geometrischen Eigenschaften derselben hinzugedacht wird, der Schwerkraft. Auf diese Weise wird die Statik in den Händen des Archimedes vollständig zu einem Zweig der Geometrie. Der feste Körper wird als ein abgegrenzter Theil des Raumes aufgefasst, dessen einzelne Punkte, der bei geometrischen Untersuchungen angenommenen Unveränderlichkeit der Raumgebilde entsprechend, in vollkommen starrem Zusammenhange stehen. Es tritt nur zu den bei der gewöhnlichen Geometrie gültigen Voraussetzungen die weitere hinzu, dass das betreffende Raumgebilde Gewicht besitze. Das Problem der Bestimmung des Schwerpunkts wird so zu einer rein geometrischen Aufgabe, und selbst das Hebelgesetz, obgleich es durch die Einführung von Gewichten, die in verschiedenen Abständen an der Hebelstange wirken, zur Unterscheidung äusserer Kräfte nöthigt, die nicht einfach den sonstigen geometrischen Eigenschaften der Körper hinzugefügt werden können, wird dennoch durch einen eigenthümlichen Kunstgriff von Archimedes auf das Feld geometrischer Betrachtungen übergeführt, indem er dasselbe aus dem als Axiom angenommenen Satze ableitet, dass gleich

grosse Gewichte in gleicher Entfernung vom Unterstützungspunkt mit einander im Gleichgewicht stehen. Da das nämliche Axiom auch der Bestimmung des Schwerpunktes zu Grunde liegt, so besteht die Bedeutung dieser Ableitung wesentlich darin, dass sie es gestattet, nun den Hebel sammt den an ihm wirkenden äusseren Kräften wiederum als ein geometrisch gleichförmiges Gebilde zu betrachten, an welchem auch die Gewichte gleichförmig vertheilt seien.

Suchen wir uns, insoweit hier überhaupt von einer Reconstruction die Rede sein kann, über den Weg Rechenschaft zu geben, auf dem Archimedes zu seinen statischen Erkenntnissen geführt wurde, so wird zunächst nicht in Abrede zu stellen sein, dass gewisse experimentelle Ermittelungen über Gewicht und Gleichgewicht der Körper vorangingen. Nachdem durch die unmittelbare Wahrnehmung das Gewicht als ein vertical abwärts gerichteter Druck erfasst war, konnten weitere zufällige Beobachtungen leicht zu dem Satze führen, dass es für jeden Körper einen Punkt gibt, dessen Unterstützung Gleichgewicht herbeiführt. Hier war nun aber auch sofort nahe gelegt, die genauere Lösung des Problems des Schwerpunktes auf geometrischem Wege zu versuchen. Daran schloss sich dann die Ableitung des Hebelgesetzes, das in Folge der leichten experimentellen Bestätigung die es zuliess dieses ganze Gebiet geometrisch-statischer Untersuchungen zum Abschluss brachte. Im ganzen können wir somit hier drei Stadien der Untersuchung unterscheiden: 1) das der inductiven Vorbereitung, in welchem die Beobachtung im wesentlichen einen qualitativen Charakter besitzt oder sich höchstens zu approximativen quantitativen Schätzungen erhebt; 2) das der speculativen Bearbeitung der Probleme, in welchem auf Grund der vorangegangenen Beobachtung allgemeine Voraussetzungen gebildet und aus diesen Sätze von quantitativem Charakter abgeleitet werden; 3) das der experimentellen Prüfung, in welchem sich der Nachweis vollzieht, dass die Erscheinungen ihren quantitativen Verhältnissen nach mit den gemachten Voraussetzungen übereinstimmen. Diese Entwicklungsfolge kommt, wie wir sehen werden, in allen Zweigen der Naturlehre zur Geltung. Aber schon die antike Mechanik ist gegenüber andern Gebieten der Naturwissenschaft dadurch ausgezeichnet, dass das erste und sogar das dritte jener Entwicklungsstadien im Verhältniss zu dem zweiten vernachlässigt werden. In Folge dessen tritt die Mechanik in nahe Beziehung zur reinen Mathematik. Die inductive Vorbereitung beschränkt sich dort wie hier auf eine geringe Zahl objectiver Wahrnehmungen, und die experi-

mentelle Bestätigung erscheint als ein nahezu überflüssiges Geschäft, da sich die betreffenden Sätze schon durch ihre innere Evidenz Beistimmung zu erzwingen scheinen. Ausserdem wird dieser speculative und mathematische Charakter der Entwicklungen noch dadurch verstärkt, dass die Voraussetzungen, die man der Ableitung der Sätze zu Grunde legt, von den in der Erfahrung gegebenen Bedingungen in einem ähnlichem Sinne abweichen wie die geometrischen Begriffe von den wirklichen Körpern im Raume. So ist insbesondere in der Archimedischen Statik die Annahme einer absolut homogenen und starren Beschaffenheit der Körper lediglich geometrischen Ursprungs, und eben dadurch wird diese Statik gewissermassen zu einer Geometrie intensiver Raumgrössen, indem jedem Raumtheilchen ausser seinem extensiven auch noch ein intensiver Werth in Gestalt eines bestimmten Gewichtes zugeschrieben wird*).

Indem die antike Statik die Vorstellung des Gewichtes in der Form, in der sie dieselbe in der verbreiteten Anschauung vom Körper antrifft, unmittelbar mit den geometrischen Begriffen verbindet, gelangen in ihr die specifisch mechanischen Begriffe noch nicht zur Ausbildung, und sie wird nicht einmal diese Lücke gewahr, weil sie durch ihre Beschränkung auf die Erscheinungen des Gleichgewichts an den wirklichen Bewegungsproblemen vorübergeht. So werthvoll daher auch die Anregungen waren, die aus der Archimedischen Periode auf die Anfänge der neueren Wissenschaft übergingen, so gewinnt doch erst in diesen, insbesondere in den dynamischen Forschungen Galileis, die Mechanik ihre Selbständigkeit**). Bedeutungsvoll ist in dieser Beziehung die Rolle, die in Galileis Untersuchungen den Reflexionen über den Kraftbegriff zukommt. Um diesem Begriff seine allgemeine Geltung zu sichern, musste er von der speciellen Vorstellung des Gewichtes losgelöst werden. Dies konnte nicht wirkungsvoller geschehen, als indem Galilei an eine davon völlig

---

*) Von den hydrostatischen Entdeckungen des Archimedes sehen wir hier ab, da über die Art, wie er zu denselben gelangte, zu wenig bekannt ist. Vgl. hierüber M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I, S. 267, 280.

**) Die an sich höchst bemerkenswerthen Arbeiten des Simon Stevinus, des Zeitgenossen Galileis, müssen hier ausser Rücksicht bleiben, weil sie, durch ihre rein statische Richtung der antiken Betrachtungsweise verwandt, sich gerade von denjenigen Grundgedanken fernhalten, aus denen die neuere Mechanik hervorgegangen ist. Vgl. über dieselben E. Dühring, Kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik, Berlin 1873, S. 60 ff.

verschiedene Kraftform seine Speculationen anknüpfte, und wieder konnte er hier keine glücklichere Wahl treffen, als indem er die menschliche und thierische Muskelkraft zum Urbilde der Kraft überhaupt nahm*). Denn so nothwendig es für die Vollendung der wissenschaftlichen Begriffe ist, von allen anthropomorphischen Vorstellungen abzusehen, so wünschenswerth muss es für die erstmalige klare Aufstellung eines Begriffes sein, dass man sich die psychologischen Bedingungen vergegenwärtige, die zunächst zur Bildung desselben geführt haben. Der Begriff des Gewichtes schliesst Kraft und Masse als seine Bestandtheile ein. Eine Trennung dieser Elemente konnte nur erfolgen, indem man sich solche Formen der Kraftwirkung vergegenwärtigte, bei denen sie deutlich von einander geschieden sind. Dies ist aber vor allem in den Fällen verwirklicht, wo die menschliche oder thierische Muskelkraft eine äussere Last in Bewegung setzt. Die verschiedenen Ausdrücke, deren sich Galilei zur Bezeichnung der Kraft bedient, impetus, momentum, weisen daher auf die Vorstellung hin, dass die Kraft von aussen die Masse ergreife, um ihr entweder durch einen augenblicklichen Anstoss (impetus) oder durch einen gleichförmig andauernden Antrieb (momentum) eine Bewegung mitzutheilen**). Diese Vorstellung führt zu zwei Voraussetzungen, die für die moderne Mechanik grundlegend geworden sind. Die erste besteht in der Annahme, dass die Masse des Körpers passiv der sie ergreifenden Kraft gegenüberstehe, die zweite in der Zurückführung der dauernden Kraftwirkung auf eine stetige Folge momentaner Impulse, deren Effecte sich summiren. Beide Voraussetzungen finden ihren Ausdruck in dem von Galilei aufgestellten Beharrungsprincip, welchem später der nicht ganz passende Name des Trägheitsgesetzes verliehen worden ist. Nach dem Beharrungsprincip erzeugt der momentane Anstoss eine an sich ins unbegrenzte dauernde Bewegung von gleichförmiger Geschwindigkeit, und der dauernde Antrieb einer Kraft lässt sich auf eine Anhäufung elementarer Anstösse zurückführen, welche in gleichen Zeiten gleich grosse Zuwüchse an Geschwindigkeit hervorbringen müssen***). Dem ersten Theil dieses Satzes liegt sichtlich die Vorstellung der durch eine einmalige Stoss-

---

*) Dialogh. delle nuove scienze, giorn. III, lib. II. Opere, ediz. Alberi. Firenze 1855. T. XIII, p. 154. Vgl. auch Dühring, a. a. O. S. 24 ff.

**) A. a. O. T. XIII, p. 173, 330. T. X, p. 90.

***) Dialogh. giorn. III, lib. II, p. 163. Hinsichtlich der hierbei von Galilei stillschweigend gemachten Voraussetzungen über das Mass der Geschwindigkeit vgl. Bd. I, S. 583, 620.

oder Wurfbewegung angetriebenen Masse zu Grunde. Aber es bedurfte einer eminenten Abstractionskraft, um die in der Beobachtung niemals gegebene Vorstellung einer ins unendliche fortdauernden gleichförmigen Geschwindigkeit als den an sich nothwendigen Effect des Stosses hinzustellen, und die in der Wirklichkeit stets vorhandenen Verzögerungen der Geschwindigkeit auf die wechselnden Widerstände zurückzuführen. Gerade diese Abstraction zeigt, wie unscheinbar in solchen Fällen der Antheil der Beobachtung an dem endgültig durch Speculation gefundenen Princip sein kann. Reducirt sich doch bei dem Trägheitsgesetz die Beobachtung ganz und gar auf die Thatsache, dass der gestossene Körper überhaupt noch sich weiter bewegt, nachdem der Stoss aufgehört hat. Auch hätte darin allein nie ein zureichendes Motiv gelegen, die eingewurzelte Vorstellung zu verlassen, dass die Bewegung allmählich von selbst erlösche. Sichtlich war es vielmehr ein anderes Element der an die menschliche Kraftäusserung sich anlehnenden Bewegungsvorstellung, nämlich die oben schon betonte Trennung von bewegender Kraft und bewegter Masse, welches hier der Speculation ihre Richtung gab. Wenn die Kraft nicht eine innere Eigenschaft des Körpers selbst ist, sondern nur als ein äusserer Anstoss an ihn herantritt, so ist nicht abzusehen, wie an der einmal hervorgerufenen Bewegung Aenderungen entstehen sollen, wenn sie nicht abermals durch äussere Kräfte veranlasst werden. So ist es wesentlich die Anschauung von dem passiven Verhalten des Körpers, aus welcher die Conception des Beharrungsgesetzes entsprang, und mit Rücksicht hierauf hat auch der Name der Trägheit seine Berechtigung, ebenso wie aus diesem Motiv die spätere Vereinigung des Axioms, dass ein ruhender Körper einer äusseren Kraft bedarf, wenn er in Bewegung gerathen soll, mit dem Galilei'schen Beharrungsprincip, das sich nur auf die Bewegung bezieht, erklärlich wird.

Sobald der erste Theil des Beharrungsprincips, der Satz von der gleichförmigen Geschwindigkeit bei momentanem Impuls, vollkommen klar erfasst war, so ergab sich nun der zweite Theil, der Satz von der gleichförmigen Beschleunigung eines durch eine dauernde Kraft bewegten Körpers, als eine nothwendige Consequenz der zu Grunde liegenden Vorstellung. Verhält sich der Körper passiv gegen die auf ihn einwirkenden Anstösse, so muss ein neuer Impuls seine Wirkung der schon vorhandenen Bewegung hinzufügen, und eine dauernde Kraft wird in eine Summe stetig auf einander folgender augenblicklicher Impulse aufgelöst werden können. Hier aber

griff nun die Beobachtung der beschleunigten Bewegung beim Fall der Körper nicht bloss bestätigend in den Verlauf der Speculation ein, sondern sie war wohl schon bei der inductiven Vorbereitung derselben betheiligt gewesen. Der wenigstens qualitativ leicht zu gewinnende Nachweis, dass die alte Annahme einer Proportionalität zwischen Fallzeit und Fallraum ein Irrthum sei, hat den Gedanken Galileis frühe schon die Richtung gegeben. Aber zu der speculativen Entwicklung des Beharrungsgesetzes konnte dieser Gedanke doch nur führen, nachdem mittelst anderer Formen der Kräftewirkung die Unterscheidung von Kraft und Masse vollzogen war, so dass es nun nahe lag, dieselbe auch auf die Bewegung der Körper beim Fall zu übertragen.

Das Beharrungsgesetz ist das einzige Princip der Mechanik, welches von Galilei als Axiom aufgestellt wurde. Aber gerade darin zeigt sich die ausserordentliche Fruchtbarkeit dieses Princips, dass es seinem Urheber gelingt, an der Hand desselben eine Menge von Sätzen abzuleiten, für die eine spätere Zeit noch weitere Voraussetzungen erforderlich hielt. Dies ist freilich nur möglich, weil bei ihm das Beharrungsgesetz eine allgemeinere Bedeutung besitzt, als sie späterhin dem Trägheitsprincip zugestanden wurde, wie sie aber allerdings durch die speculative Begründung, die Galilei seinem Gesetz gegeben, unmittelbar nahe gelegt ist. Insbesondere sind es zwei Principien, die bei Galilei als selbstverständliche Folgen des Trägheitsgesetzes erscheinen: das Princip der Zusammensetzung der Kräftewirkungen, und das Princip der Zurückführung des Gleichgewichts der Kräfte auf die Gleichheit ihrer virtuellen Momente. Von dem ersteren Princip macht Galilei bei der Ableitung der Wurfbewegungen Gebrauch. Dass die Bahn eines horizontal fortgeworfenen Körpers einfach durch die Verbindung der durch den Wurf hervorgebrachten gleichförmigen Geschwindigkeit in horizontaler Richtung mit der durch das Gewicht hervorgebrachten gleichförmig beschleunigten Geschwindigkeit in verticaler Richtung gewonnen wird, erscheint bei ihm als eine unmittelbare Folge des passiven Verhaltens der Körper gegenüber den auf sie einwirkenden Kräften, ohne dass er sich veranlasst findet, hier ein besonderes Princip der Zusammensetzung herbeizuziehen, wie ein solches späterhin in dem Satz vom Kräfteparallelogramm entwickelt worden ist*). Aehnlich verhält es sich mit der Zurückführung des Gleichgewichts

*) Dialogh. giorn. IV. A. a. O. p. 221 ff.

auf mögliche Geschwindigkeiten. Da Galilei von dynamischen Untersuchungen ausgegangen war, so war die Reduction der Statik auf Dynamik für ihn ein fast unvermeidlicher Schritt. Die Anwendung der dynamischen Gesichtspunkte auf statische Probleme musste aber zu einer Vertiefung des Kraftbegriffs selbst führen, als dessen wesentlicher Inhalt sich nun erst in vollkommen klarer Weise die durch eine bestimmte Ursache hervorgebrachte momentane Beschleunigung einer Masse darstellte, so dass als allgemeines Mass der Kraft das Product der Masse in ihre momentane Beschleunigung dienen konnte. Das statische Verhalten ergab sich jetzt als derjenige Specialfall, wo sich die einzelnen momentanen Geschwindigkeiten, die durch verschiedene Ursachen an gegebenen Massen entstehen, in Folge der vorhandenen Verbindungen der letzteren gegenseitig aufheben. Aber auch dieses Princip tritt bei Galilei, der es auf den Hebel und den Flaschenzug anwendet, weder als ein selbständiges Axiom auf noch als ein Satz, der aus andern abzuleiten wäre, sondern es scheint ihm als eine nothwendige Folge des Kraftbegriffs selbst zu gelten*).

So fruchtbar nun auf diese Weise das Beharrungsgesetz geworden ist, indem es theils direct theils durch die logische Ausbildung des Kraftbegriffs, zu der es den Anlass bot, eine Reihe anderer Principien zur Entwicklung brachte, die für die neuere Mechanik von grundlegender Bedeutung sind, so lässt sich doch nicht verkennen, dass in diese Principien Voraussetzungen eingehen, die, so sehr sie durch gewisse einfache Beobachtungen nahegelegt sein mögen, keineswegs in dem Beharrungsprincip oder in dem aus ihm abgeleiteten fundamentalen Kraftbegriff an und für sich schon enthalten sind. Durch die Entwicklung, welche die Mechanik in der folgenden Zeit genommen, wurde aber das Bedürfniss nach einer vollständigeren Darlegung der grundlegenden axiomatischen Voraussetzungen dieser Wissenschaft immer unabweisbarer. Denn in dem Masse, als sich die mechanischen Probleme, die man behandelte, verwickelter gestalteten, musste die Strenge der Beweisführung und damit zugleich die bestimmte Sonderung der Principien von den gefolgerten Sätzen zunehmen. Eine freie Discussion, wie sie Galilei in seinen „Discorsi“ übte, lässt eine solche Sonderung kaum aufkommen; die Euklidische Demonstrationsweise dagegen, deren sich ein Huygens und Newton mit Meisterschaft bedienten, hat die-

*) Della scienza meccanica. Opere T. XIII, p. 91 f.

selbe zur Vorbedingung. Dennoch trennen sich innerhalb dieser mit den Hülfsmitteln der synthetischen Demonstration die Mechanik behandelnden Richtung deutlich wieder zwei Entwicklungen von einander, deren charakteristische Unterschiede hauptsächlich in der Verschiedenheit der Probleme, mit denen man sich beschäftigt, ihre Quelle haben. Auf der einen Seite waren es die Combinationen frei wirkender Kräfte, die sich der Untersuchung darboten. Wie hier Galilei selbst schon aus Anlass der Fall- und Wurfbewegungen zu der Conception des fundamentalsten Axioms der Mechanik, des Beharrungsgesetzes, gelangt war, so musste die Weiterführung solcher Untersuchungen wegen der relativen Einfachheit und Gleichartigkeit der Bedingungen, die bei frei wirkenden Kräften stattfinden, vorzugsweise leicht zur Aussonderung einfachster Voraussetzungen von axiomatischem Charakter führen. In der That ist es Newton, der, indem er Galileis Gesetze der Bewegung schwerer Körper auf das Weltsystem ausdehnt, zugleich als der Erste die sämmtlichen Axiome zu formuliren sucht, die dem System der Mechanik zu Grunde liegen. Auf der andern Seite handelte es sich bei derjenigen Weiterbildung der Mechanik, die durch technische Zwecke, durch die Anwendung der Bewegungsgesetze auf einfache Maschinen gefordert war, im allgemeinen um die Combination gegebener Kräfte mit bestimmten statischen Bedingungen, die durch die gegenseitige Verbindung der Theile der Maschine vorgeschrieben werden. Der Hebel und die schiefe Ebene sind die einfachsten Fälle dieser Art, die zugleich insofern einen typischen Charakter besitzen, als bei allen diesen statischen Combinationen die Wirkungen der äusseren Kräfte entweder, wie beim Hebel, durch den Zusammenhang des Körpers selbst, an dem sie angreifen, oder aber, wie bei der schiefen Ebene, durch äussere Hemmungen, welche die Bewegungen des Körpers bestimmen, beschränkt sind. Wie der Hebel und die schiefe Ebene die einfachsten, so wurden bald das physische Pendel und die Brachystochrone (die Bahn des schnellsten Falls) die für die Ausbildung der Mechanik wichtigsten Beispiele aus diesen beiden einander ergänzenden Classen von Problemen. Die verhältnissmässig verwickelte Beschaffenheit der letzteren, sowie die Complication verschiedenartiger, theils dynamischer theils statischer Bedingungen bewirkte nun aber hier, dass an Stelle einfacher Axiome gewisse Principien von zusammengesetzterer Art zur Entwicklung gelangten, welche sich für die Lösung bestimmter technischer Aufgaben unmittelbar fruchtbar erwiesen. So kam es, dass in der Mechanik überhaupt vorzugs-

weise solche Sätze den Namen von Principien erhielten, die durchaus nicht den Charakter ursprünglicher Voraussetzungen, sondern den von Lehrsätzen besitzen, die des Beweises bedürfen.

### b. Die Formulirung der mechanischen Axiome durch Newton.

An den Anfang seiner „mathematischen Principien der Naturphilosophie" hat Newton ausser den grundlegenden Definitionen, deren seine Mechanik bedurfte, drei axiomatische Gesetze der Bewegung gestellt, die er, gleich jenen Definitionen, als die allgemeinsten Abstractionen aus der Erfahrung zu betrachten scheint, da er zur näheren Erläuterung lediglich auf geläufige Erscheinungen hinweist, in denen sie sich bewähren. Diese drei Axiome Newtons bestehen in dem Trägheitsgesetz, in dem Satz, dass die Aenderung der Bewegung der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional sei und nach der Richtung der geraden Linie erfolge, nach der die Kraft wirke, und endlich in dem Gesetz von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung. Merkwürdiger Weise ist unter diesen Sätzen der erste, das Trägheitsgesetz, am wenigsten glücklich formulirt. Nicht nur tritt es hier zum ersten Mal in jener seitdem gangbar gewordenen Doppelgestalt auf, in der es Bewegung und Ruhe gleichzeitig umfassen soll, sondern es wird auch auf eine innere Eigenschaft der Körper bezogen, die als Vis inertiae den äusseren Kräften analog gedacht ist, und es kommt daher der nämliche Satz in einer doppelten Form vor, zuerst unter den Definitionen der Materie, und dann noch einmal als oberstes Bewegungsaxiom. Gerade diese doppelte Aufstellung beweist aber, dass auch Newton das Streben nach einer speculativen Begründung jenes Fundamentalgesetzes nicht überwinden konnte. Denn für die empirische Auffassung liegt kein Anlass vor, ein Gesetz, das sich in aller Erfahrung bewährt und das aus keinem andern Erfahrungsgesetz abgeleitet werden kann, aus irgend einer Qualitas occulta in den Dingen selbst zu erklären. Eine solche Qualitas occulta ist aber die Trägheit, wenn sie als eine Eigenschaft oder gar als eine Kraft der Körper gedacht wird. Das Beharrungsgesetz ist ja ein Axiom, das für die Wirkungen äusserer Kräfte auf die Körper gültig ist; es ist also in die allgemeine Definition der Kraft aufzunehmen und darf nicht auf eine specifische innere Kraft zurückgeführt werden, welche zu den äusseren Kräften erst hinzukomme. Eine solche Betrachtung schliesst eigentlich die Annahme in sich, dass die äusseren Kräfte für sich genommen dem

Beharrungsgesetz nicht folgen. In der That zeigen spätere Ausführungen über die Vis inertiae, die sich direct an die Newtonsche Definition anschliessen, deutlich genug, dass im Hintergrunde dieser Auffassung der alte scholastische Satz steht: „Cessante causa cessat effectus“, und dass man in der Zurückführung des Beharrungsgesetzes auf eine in den Körpern permanent anwesende Kraft eine Art von speculativer Begründung desselben gefunden zu haben glaubte*).

Das zweite Gesetz Newtons schliesst streng genommen zwei Axiome oder ein Postulat und ein Axiom in sich: das Postulat, dass die Aenderung der Bewegung der bewegenden Kraft proportional sei, und das Axiom, dass sie in der Richtung der geraden Linie erfolge, in welcher die Kraft wirkt. Das ganze Gesetz, das schon Galilei überall angewandt, aber nirgends formulirt hatte, erscheint als eine Anwendung der vorangegangenen Definition der Kraft, wonach diese das auf einen Körper ausgeübte Bestreben ist, seinen Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung zu ändern. Als ein neues Princip, das nur in den Arbeiten von Huygens bereits gelegentlich seine stillschweigende Anwendung gefunden hatte, tritt endlich das Gesetz von der Gleichheit der Action und Reaction auf, dem allein keine grundlegende Definition gegenübersteht.

Bei der Beurtheilung dieses ersten Versuchs eines synthetischen Systems der Mechanik darf man die Kunst, mit der aus den Principien der Bewegung die Gesetze des Weltsystems entwickelt werden, nicht mit dem logischen Werth jener Principien selbst vermengen. In ersterer Beziehung ist Newtons Gravitationsmechanik noch heute für uns das bewundernswertheste Beispiel einer strengen Deduction einzelner Erfahrungsgesetze aus ihren allgemeinen Voraussetzungen. In der zweiten Beziehung dagegen werden wir bei Newtons Formulirung der Bewegungsgesetze, abgesehen von dem zwiespältigen Charakter des Trägheitsprincips, von der Verbindung zweier Axiome in dem zweiten Gesetz und von der wechselnden Beziehung zu den vorangegangenen Definitionen, vor allem die Vollständigkeit vermissen. In der That wiederholt sich hier in beschränkterem Masse der nämliche Vorgang, der uns schon bei Galilei begegnet ist. Wie dieser alle Erscheinungen auf sein Beharrungs-

*) Vgl. Chr. Wolffs Ontologia, §. 321, sowie Euler, Theoria motus, Introd. Cap. II. (Mechanik, Ausgabe von Wolfers, Bd. I, S. 5, 21 ff.) Euler gibt im ganzen der Bezeichnung „Eigenschaft“ für die Trägheit den Vorzug. Theoria motus, Def. II, Schol.)

gesetz zurückführt, dabei aber in Wirklichkeit eine Reihe weiterer Voraussetzungen stillschweigend hinzunimmt, so wird bei Newton ein wichtiger Satz scheinbar aus dem zweiten Bewegungsgesetz abgeleitet, in Wahrheit aber in den zu diesem Behuf geführten Beweis als eine Petitio principii eingeführt: es ist dies der Satz von der Zusammensetzung der Bewegungen. Er tritt als Corollarsatz zu den drei Bewegungsgesetzen auf, und das in ihm zur Aeusserung kommende Princip, dass eine zweite Kraft nichts an der Geschwindigkeit ändert, welche die erste für sich allein hervorbringen würde, ist in der hinzugefügten Erläuterung als eine unmittelbare Folgerung aus dem zweiten Bewegungsgesetz bezeichnet*). Aber es ist nicht abzusehen, wie aus einem Gesetz, das die Wirkungsweise einer einzigen Kraft bestimmt, irgend etwas über die Verbindung der Kräfte gefolgert werden kann; vielmehr macht offenbar diese letztere eine neue axiomatische Annahme erforderlich. Ausserdem ist in den aufgestellten Bewegungsgesetzen die der ganzen neueren Mechanik zu Grunde liegende Voraussetzung, dass die Kraft stets räumlich getrennt sei von der Masse, auf welche sie wirkt, nicht zum Ausdruck gekommen. Für Galilei lag diese Trennung in der Vorstellung von der menschlichen Muskelkraft, von der er bei seiner Conception des Kraftbegriffs ausgegangen war, als ein selbstverständlicher Bestandtheil eingeschlossen. In dem Masse aber, als man mit Recht diesen anthropomorphischen Ursprung des Kraftbegriffs zurücktreten liess, wäre die Nöthigung dringender gewesen, sich von der wirklichen Bedeutung, die jene Vorstellung für die Reform des Kraftbegriffs gehabt hatte, deutliche Rechenschaft zu geben; nur so wäre es möglich geworden, die Irrungen zu vermeiden, die sich später in die Auffassung des Trägheitsgesetzes einmengten. Ein letzter Mangel dieser frühesten Gestaltung mechanischer Axiome liegt endlich in der unzureichenden Entwicklung des Begriffs der Bewegung. Galilei hatte die Bewegungsvorstellung einfach der sinnlichen Wahrnehmung entnommen, ohne an eine Zergliederung ihrer Bedingungen zu denken. Newton scheidet die wirkliche von der scheinbaren Bewegung, indem er nur die erstere der Mechanik zuweist, da bloss die wirkliche Bewegung der Körper im Raum in wirkenden Kräften ihre Ursache habe. Aber indem er dem Raum, in welchem die wirkliche Bewegung vor sich geht, eine absolute Existenz zuschreibt,

*) Philosophiae naturalis princip. math. Axiomata, Lex III, Coroll. Edit. ultim. Amstelod. 1714, p. 13.

wird ihm zugleich die wirkliche zur absoluten, die scheinbare zur relativen Bewegung, und es verbirgt sich ihm so der aller Mechanik vorausgehende phänomenologische Grundsatz, dass jede Bewegung an und für sich nur eine relative sein kann, weil wir die Ortsveränderung irgend eines Körpers nur wahrnehmen können, insofern wir sie auf irgend einen Punkt ausserhalb desselben beziehen, den wir als ruhend voraussetzen*).

Mit dieser mangelhaften Entwicklung des Begriffs der Bewegung hängt eine Vermengung zusammen, welche, so natürlich sie auch für die Anfänge der Mechanik ist, doch einer klaren Auffassung und Unterscheidung der Axiome hindernd im Wege stand: es ist dies die Vermengung solcher Sätze, die einen rein phoronomischen Charakter besitzen, insofern sie nichts als die Anschauung der Bewegung voraussetzen, mit andern Sätzen von dynamischem Inhalt, die auf bestimmten Annahmen über die Kräfte und über die Massen, auf welche sie wirken, beruhen. Diese Vermengung ist es aber, welche noch weit mehr als in der immerhin auf die Gewinnung fundamentaler Voraussetzungen gerichteten Naturphilosophie Newtons in jener zweiten Entwicklung der Mechanik hervortritt, die sich vorzugsweise an die technischen Anwendungen derselben anschliesst und der Gestaltung complicirter, aber praktisch fruchtbarer Principien zugewandt ist**).

### c. Teleologische Fundamentaltheoreme der Mechanik.

Vom Standpunkte der reinen Mechanik aus erscheint es gleichgültig, ob die allgemeinen Bewegungsgesetze auf irgend einen natürlichen Zusammenhang von Bewegungserscheinungen wie das Weltsystem, oder auf eine künstliche Vorrichtung wie die Pendeluhr angewandt werden. Trotzdem steht die Ausbildung der Mechanik in beiden Fällen unter sehr verschiedenen Bedingungen. Die Natur bietet vorzugsweise Combinationen frei wirkender Kräfte, und am günstigsten gestaltet sich in dieser Beziehung wieder das Weltsystem als Ganzes, weil hier gegenüber einigen wenigen nach einfachen Gesetzen wirkenden Ursachen alle etwa stattfindenden Nebeneinflüsse bei einer approximativen Betrachtung der Erscheinungen vernach-

*) Philos. nat. princip. math. Definitiones, Schol. l. c. p. 5.

**) Vgl. zu Obigem die in Bd. I, S. 580 und 618 ff. gegebenen Formulirungen der phoronomischen und physikalischen Axiome.

lässigt werden können. Von Anfang an streben daher die aus den allgemeinen Naturerscheinungen abgeleiteten Principien einer causalen Form zu. Auf die künstliche Maschine dagegen wirken die Bewegungsursachen unter bestimmten Bedingungen des Zusammenhangs der Theile, und diese sind von den Zwecken abhängig, denen die Maschine dienen soll. Hier wird daher die ganze Beurtheilung von dem Zweckbegriff gelenkt, und die auf Grund solcher Betrachtungen gewonnenen Principien nehmen eine teleologische Form an. Nach der Natur des Zweckbegriffs kann freilich dies Verhältniss kein ausschliessliches sein, sondern die auf dem ersten Weg entstandenen Causalgesetze wirken ebenso auf die technische Mechanik wie die in dieser herrschende Zweckbetrachtung auf die physikalische zurück. Zudem liegen in der Ausbildung der letzteren selbständig wirkende teleologische Motive. An ihren Endpunkten gehen endlich beide Entwicklungen in einander über, indem der causale Gesichtspunkt im ganzen zum Uebergewichte gelangt, während nebenbei gewissen Zweckprincipien eine allgemeinere Uebertragung auf die Natur zu Theil wird.

Die Entwicklung der Mechanik von Huygens und Newton an bis zum Ende des 18. Jahrhunderts ist der aus beiden Quellen geflossenen Ausbildung der mechanischen Fundamentaltheoreme gewidmet. Eine Reihe von Sätzen wurde hier in die Wissenschaft eingeführt, deren jeder nach seinem Ursprung die Bedeutung eines aus axiomatischen Voraussetzungen abzuleitenden Theorems und in Bezug auf seine Anwendung die Bedeutung eines Princips besitzt, auf das man wo möglich die ganze Mechanik zu gründen sucht. Nicht selten war man zugleich bemüht, gewisse speculative Gründe für das gewählte Princip geltend zu machen und dasselbe auf diese Weise dennoch zum Rang einer axiomatischen Voraussetzung zu erheben. Solche Gründe sind regelmässig teleologischer Art, so dass hier der technische Ausgangspunkt und die philosophische Gedankenrichtung auf das gleiche Ziel hinwirken. Die letztere verstärkt ausserdem die Neigung zu einer Uebertragung der nämlichen Gesichtspunkte auf die Betrachtung der frei wirkenden Naturkräfte. Erst gegen das Ende dieser Zeit kommt in der hauptsächlich durch d'Alembert und Lagrange der analytischen Mechanik gegebenen Gestaltung die causale Betrachtung zum Uebergewicht, und man sucht nun nachzuweisen, dass alle jene teleologischen Principien Folgerungen sind aus den einfachsten Bewegungsgesetzen oder aus einem diese umfassenden mechanischen Grundsatz von causaler Bedeutung.

Eine hervorragende Rolle unter den so entstandenen fundamentalen Lehrsätzen der Mechanik von teleologischem Inhalt kommt einer Reihe von Principien zu, die wir unter dem Namen der Erhaltungsprincipien zusammenfassen. Sie bilden den Anfangs- und Endpunkt dieser Entwicklung. Denn zum ersten Mal tritt, in einer freilich ausschliesslich speculativ begründeten und in der Anwendung irreführenden Form, der Gedanke der Erhaltung in dem Cartesianischen Satz von der Erhaltung der Quantität der Bewegung in die Geschichte der Mechanik ein; ihren Abschluss aber findet die ganze Entwicklung in dem erst der neuesten Zeit angehörenden Princip der Erhaltung der Energie, welches den Cartesianischen Gedanken auf seine haltbare physikalische Form zurückführt. Uebrigens sind gerade die Aufstellungen dieses ersten und letzten Princips ursprünglich bloss von speculativen Erwägungen ausgegangen, und sie haben daher auch von Anfang an den Anspruch auf die Bedeutung allgemeiner Naturgesetze erhoben. Dagegen kommt die technische Bedeutung des Erhaltungsgedankens in einer Reihe zwischenliegender Principien zur Geltung, welche für das engere Gebiet der Mechanik fruchtbarer geworden sind als jene allgemeinen Formulirungen, deren Werth mehr auf physikalischem Boden liegt.

Unter diesen specifisch mechanischen Erhaltungsgesetzen nimmt das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte der Zeit wie der Bedeutung nach die erste Stelle ein. Als eine selbstverständliche Voraussetzung wurde es von Huygens in die Mechanik eingeführt, indem derselbe bei der Untersuchung der Pendelbewegungen von dem Satze ausging, dass ein fallender Körper durch die erlangte Geschwindigkeit niemals in eine grössere Höhe gehoben werden könne, als die er herabgefallen sei*). Seine weitere Ausbildung hat das Princip in mathematischer und physikalischer Richtung durch Jacob, Johann und Daniel Bernoulli, in philosophischer Richtung aber durch Leibniz gewonnen. In rein mathematischer Formulirung lautet dasselbe: „Wenn sich ein System irgendwie verbundener Massen unter dem Einfluss constanter Kräfte bewegt, so ist die Summe der Producte der Massen in die Quadrate ihrer Geschwindigkeiten zu allen Zeitpunkten, in welchen die Massen dieselben relativen Lagen gegen einander einnehmen, die nämliche“ **). Die ersten Begründungen dieses Satzes stützen sich auf das Beharrungs-

*) Horologium oscillatorium. Pars IV, hyp. I, II.

**) D'Alembert, Traité de dynamique. Paris 1743, p. 169.

gesetz und auf die stillschweigende oder ausdrückliche Annahme, dass keine Kraft aus nichts entstehen könne. In diesem Sinne suchte namentlich Leibniz dem Product aus der Masse in das Geschwindigkeitsquadrat, für das er im Gegensatze zu der bei dem Gleichgewicht der Körper in Wirksamkeit tretenden „todten Kraft“ den Namen lebendige Kraft einführte, seine allgemeinere philosophische Bedeutung zu sichern, ohne dass es ihm jedoch gelang, für dasselbe eine andere Ableitung zu finden als aus den Fallgesetzen und aus der Voraussetzung, dass die Wirkung einer Kraft durch das Product eines gehobenen Gewichtes in seine Erhebungshöhe gemessen werde*). In dieser letzten Voraussetzung lag nun insofern eine Petitio principii, als dabei der Arbeitseffect, ohne Rücksicht auf die Zeit, in welcher derselbe zu Stande kommt, als Mass der Kraft angenommen ward. Dem von Leibniz so lebhaft bekämpften Cartesianischen Kräftemass dagegen, dem Product der Masse in die einfache Geschwindigkeit, lag gerade die Berücksichtigung der Zeit zu Grunde, ohne dass dies jedoch in der metaphysisch-teleologischen Erklärung, die Descartes von seinem Princip gegeben hatte, irgend ersichtlich gewesen wäre. So war denn im wesentlichen dieser ganze Streit um das Kräftemass, der übrigens in der Entwicklung der Mechanik grosse Dienste geleistet hat, ein Streit um Worte, bei dem man sich sowohl über die einfachen Elemente des Kraftbegriffs wie über den eigentlichen Grund der Meinungsunterschiede im Unklaren befand. Uebrigens scheint Leibniz selbst in späterer Zeit einer Erkenntniss des richtigen Sachverhältnisses nahe gewesen zu sein, da er in seinem „Specimen dynamicum“ für den Stoss der Körper ein Princip der „Erhaltung des Totalfortschritts der Körper“ aufstellt, das mit dem Cartesianischen Mass übereinstimmt**). Die Grundlosigkeit dieses Streites, die wohl zuerst d'Alembert durchschaute***), wird vollkommen deutlich, wenn man beide Kräftemasse auf ihre einfachen Voraussetzungen zurückführt. Nach dem Galilei'schen Beharrungsgesetz ist die unter dem Einfluss einer constant wirkenden Kraft in einer Zeit $t$ erlangte Geschwindigkeit $v$ eines Körpers:

$$v = g \, . \, t,$$

*) Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii. Ausg. von Gerhardt, VI, p. 122.

**) Ausg. von Gerhardt, S. 226 f.

***) Traité de dynamique, préf. p. XVI—XXI.

wenn $g$ die in der Zeiteinheit erlangte Geschwindigkeit bedeutet. Der Weg $s$ aber, welchen der Körper in der Zeit $t$ zurücklegt, ist:

$$s = \frac{v}{2} . t = \frac{g}{2} . t^2.$$

Nun ist die in der Zeiteinheit erlangte Geschwindigkeit proportional $\frac{k}{m}$, wenn wir mit $k$ die Kraft und mit $m$ die Masse bezeichnen. Nimmt man also zur Einheit der Kraft diejenige Kraftgrösse, die der Einheit der Masse in der Einheit der Zeit die Geschwindigkeitseinheit mittheilt, so wird:

$$v = \frac{k}{m} . t \text{ und } s = \frac{1}{2} . \frac{k}{m} . t^2,$$

oder:

$$m v = k . t \text{ und } \frac{1}{2} m v^2 = k . s.$$

Diese Entwicklung, die nebenbei zeigt, dass das correcte Mass der Arbeit einer Kraft das halbe Product der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit ist, deutet auf zwei verschiedene Erhaltungsprincipien hin, welche in der That als die eigentlichen Früchte jenes Streites anzusehen sind. Das eine, das an die zweite Gleichung anknüpft, ist das Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte: es kommt, wie sein Ursprung andeutet, in solchen Fällen zur Geltung, wo es sich um die Beurtheilung eines Massensystems, z. B. einer Maschine, nach ihren Arbeitseffecten handelt, ohne dass bei diesen die Zeit, in der sie geleistet werden, unmittelbar in Rücksicht fällt. Dasselbe hat in technischer sowohl wie in physikalischer Beziehung die überwiegende Bedeutung, da es bei der Untersuchung der Bewegungen zusammenhängender Massensysteme in den meisten Fällen für uns vorzugsweise von Interesse ist die Arbeitseffecte zu kennen, die gewissen Lagen des Systems entsprechen. Das andere Princip, das auf die erste der obigen Gleichungen zurückführt, ist das der Erhaltung des Schwerpunktes. Es kommt in solchen Fällen zur Anwendung, wo es sich, wie beim Stoss der Körper, darum handelt zu wissen, in welcher Weise sich in Folge eines während einer bestimmten Zeit ablaufenden Vorgangs, z. B. eines Stosses, der Zustand des betheiligten Massensystems verändert hat.

Die Keime zur Entwicklung des Satzes von der Erhaltung des Schwerpunktes finden sich schon in den von Wren, Wallis und Huygens gelieferten Untersuchungen über den Stoss; auch Descartes

hat bei seinem Satz von der Erhaltung der Quantität der Bewegung hauptsächlich an den Stoss gedacht, aber irrthümlich angenommen, dass die absolute, nicht die algebraische Summe der Bewegungsgrössen erhalten bleibe. In exacter Weise wurde das Princip zuerst von Newton ausgesprochen, der dasselbe unter die Corollarsätze seiner Bewegungsaxiome aufnimmt und ihm folgende Form gibt: „Der gemeinschaftliche Schwerpunkt zweier oder mehrerer Körper ändert seinen Zustand der Ruhe oder Bewegung durch die Wirkung der Körper unter sich nicht, und derselbe wird daher, so lange keine äusseren Kräfte einwirken, entweder ruhen oder sich gleichförmig in gerader Linie fortbewegen*)." Werden demnach durch $m_1$ und $m_2$ zwei gegen einander stossende Massen, durch $v_1$ und $v_2$ ihre Geschwindigkeiten vor dem Stoss, durch $v_1'$ und $v_2'$ dieselben nach dem Stoss bezeichnet, so ist nach dem obigen Princip:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2',$$

eine Formel, die unmittelbar zeigt, dass in den Ausdruck dieses Erhaltungsprincips das von Descartes als Quantität der Bewegung bezeichnete Product $m \cdot v$ eingeht.

In der Beziehung der beiden genannten Erhaltungsprincipien zu den allgemeinen Bewegungsgesetzen liegt nun die Aufforderung, sie des Charakters ursprünglicher Principien ganz zu entkleiden, um sie unter die aus den Bewegungsgleichungen gefolgerten Theoreme zu verweisen. Dieser Schritt ist hauptsächlich durch Lagrange geschehen, der damit vollends jenen Principien den Charakter causal begründeter Sätze gegeben hat**). Es versteht sich von selbst, dass es dadurch leicht wird, ihnen auch im Ausdruck ihren ursprünglich teleologischen Charakter zu nehmen, und es mag sein, dass man sich deshalb gegenwärtig, selbst wenn man die alten Namen beibehält, kaum noch ihrer Zweckbedeutung bewusst ist. Gleichwohl bedarf es kaum des näheren Nachweises, dass der Gedanke der Erhaltung nothwendig den des Zwecks in sich schliesst. Die Bedeutung des Zweckprincips besteht ja in allen Fällen darin, dass wir von einem zu erreichenden Endeffect aus auf die Bedingungen zurückgehen, die denselben herbeiführen. (Vgl. Bd. I, S. 642.) Bei der Anwendung des Begriffs der Erhaltung vergleicht man aber unmittelbar den Endeffect mit den Anfangsbedingungen, indem man beide einander gleich setzt.

---

*) Philos. nat. princ. math. Coroll. II, l. c. p. 17.

**) Mécanique analytique, sec. part, sect. III, §. I et V.

Die beiden Erhaltungsprincipien, in denen der Streit um das Kräftemass seine Lösung gefunden, stehen nun ausserdem in naher Beziehung zu zwei weiteren Principien, in denen sich ebenfalls der Erhaltungsgedanke bewahrt hat. Aus dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte ist das der Erhaltung der Energie hervorgegangen; der Satz von der Constanz der Quantität der Bewegung aber, der sich in den von der Erhaltung des Schwerpunktes fortsetzte, hat einen weiteren Ausläufer in dem so genannten Princip der Erhaltung der Flächen gefunden. Der beschränkte Werth des letzteren im Vergleich mit der universellen Bedeutung des Energiegesetzes zeigt übrigens schon, dass unter den beiden ursprünglichen Erhaltungsgesetzen das Princip der lebendigen Kräfte das entwickelungsfähigere ist.

In seiner rein mechanischen Bedeutung betrachtet erscheint das Energiegesetz als eine Erweiterung des Princips der lebendigen Kräfte. Durch die Erwägung, dass bei einem abgeschlossenen System von Körpern bei bestimmten periodisch wiederkehrenden Lageverhältnissen die Summe der vorhandenen lebendigen Kräfte jedesmal dieselbe ist, wird diese Erweiterung unmittelbar nahe gelegt; denn die Bedingungen zur Erzeugung jener Kräfte müssen auch in irgend einer der andern Positionen, welche das System durchläuft, schon vorhanden sein, insofern durch die in dem System ursprünglich gegebenen Bedingungen auf ein bestimmtes Lageverhältniss alle andern nothwendig folgen. In diesem Sinne kann aber die Arbeit, die das System in einer späteren Position leistet, bereits als potentiell vorhanden in irgend einer vorangegangenen angesehen werden*). So ist die lebendige Kraft der Schwingung des Pendels bei seinem Durchgang durch die Gleichgewichtslage in der äussersten Abweichung von der letzteren, in der seine wirkliche Geschwindigkeit null ist, potentiell vorhanden, da jene lebendige Kraft von der Grösse der Ablenkung unmittelbar abhängt. Das Wesen dieser Auffassung besteht also darin, dass man nicht bloss einen gegebenen Zustand des Systems, sondern den ganzen Zusammenhang auf einander folgender Zustände berücksichtigt. Die so erweiterte Betrachtung erfordert aber eine Erweiterung des ursprünglichen Kraftbegriffs oder die Ueberführung desselben in den allgemeineren Begriff der Energie. Der Kraftbegriff bezieht sich,

*) Helmholtz, Ueber die Erhaltung der Kraft. Berlin 1847, S. 20 ff. Thomson und Tait, Handbuch der theoretischen Physik. Deutsche Ausgabe, I, 1, S. 211 ff.

da der Inhalt desselben die Beschleunigung einer Masse ist, nur auf unmittelbar gegebene Wirkungen; der Begriff der Energie dagegen bezeichnet überhaupt die in einer Masse oder in einem System von Massen vorhandene Wirkungsfähigkeit. Die in einem gegebenen Augenblick vorhandene Energie zerfällt daher in zwei Theile: in die actuelle Energie, die dem älteren Begriff der lebendigen Kraft entspricht und durch das halbe Product der Massen in das Quadrat ihrer Geschwindigkeiten gemessen wird, und in die potentielle Energie, die sich aus den Lageverhältnissen der Massen ergibt und daher auch als Energie der Lage bezeichnet werden kann. Das Energiegesetz nimmt nun die einfache Form an: „Die Energie eines gegebenen unter unveränderlichen äusseren und inneren Bedingungen stehenden Systems ist eine constante Grösse." Im Gebiete der eigentlichen Mechanik bewährt sich dieses Erhaltungsprincip vor allem in der genauen Wechselbeziehung, die zwischen Energie der Lage und actueller Energie stattfindet, indem jede Abnahme der ersteren mit einer entsprechenden Zunahme der letzteren verbunden ist, und umgekehrt. Dennoch geht hier die Bedeutung des Princips kaum über diejenigen Anschauungen hinaus, die bereits in dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte, wenn auch in beschränkterer Form, ihren Ausdruck fanden. Eine umfassendere Bedeutung gewinnt das Princip erst auf physikalischem Boden, wo es unmittelbar zu der Feststellung der Beziehungen zwischen den verschiedenen Formen der Energie, die in der Natur vorkommen, überführt, und wo es die leitende Maxime abgibt, nach der die mannigfaltigen Transformationen der Naturkräfte zu beurtheilen sind. Während daher das Energiegesetz in der Mechanik die Stellung eines abgeleiteten Satzes von verhältnissmässig untergeordnetem Werthe einnimmt, erhebt es sich in der Physik zur Rolle des allgemeinsten und fundamentalsten Naturgesetzes. Aus diesem Grunde muss aber auch die nähere Würdigung dieses Princips, sowie der Modificationen, die zu bestimmten Zwecken mit ihm vorgenommen worden sind, der Untersuchung der physikalischen Forschungsprincipien vorbehalten bleiben.

Von weit beschränkterer Bedeutung ist das letzte der Erhaltungsprincipien, das Princip der Erhaltung der Flächen. Dasselbe wurde für einen speciellen Fall und als ein rein empirisches Gesetz zuerst von Kepler aufgestellt und dann von Newton aus dem Trägheitsgesetz sowie aus dem Satz des Kräfteparallelogramms abgeleitet. Newtons Lehrsatz, der nur eine Verallgemeine-

rung des ersten Kepler'schen Gesetzes ist, lautet: „Wenn Körper sich in Bahnen bewegen, deren Radien nach dem unbeweglichen Mittelpunkt der Kräfte gerichtet sind, so liegen die von ihnen beschriebenen Flächen in festen Ebenen und sind den Zeiten proportional" *). Durch Euler, Dan. Bernoulli und d'Arcy erfuhr dieser Satz eine weitere Verallgemeinerung, indem er auf ein System von Körpern, die sich in verschiedenen Ebenen um ein festes Centrum bewegen, ausgedehnt wurde. Hierbei ergab sich dann die Nothwendigkeit, diese verschiedenen Drehungsebenen auf eine einzige zu projiciren, für welche der ursprüngliche Satz seine Geltung behielt. Das Princip der Erhaltung der Flächen nahm daher die Form an: „Wenn beliebige Massen um einen Mittelpunkt rotiren, so ist die Summe der Producte der Massen in die Projectionen der von ihren Radiusvectoren beschriebenen Flächenräume auf eine und dieselbe Ebene der Zeit proportional", oder in anderer Fassung: „Wenn die Bewegungen eines um einen Mittelpunkt rotirenden Systems auf eine und dieselbe Ebene projicirt werden, so ist die Summe der Producte der Massen in ihre Geschwindigkeiten und in die Abstände vom Mittelpunkt eine constante Grösse." Diese letztere Formulirung zeigt unmittelbar, dass das Flächenprincip ein Satz ist, der für die drehende Bewegung die nämliche Bedeutung hat wie das Princip der Erhaltung des Schwerpunktes für die fortschreitende. Es kann daher ebenso wie dieses aus den Fundamentalgesetzen der Bewegung abgeleitet werden, was in Bezug auf die speciellere Form des Satzes schon von Newton, in Bezug auf die allgemeinere aber namentlich von Lagrange dargethan worden ist**).

Eine zweite Reihe mechanischer Zweckprincipien, denen der teleologische Charakter in der Regel noch deutlicher aufgeprägt ist als den Erhaltungsprincipien, kann mit dem Namen der Maximal- und Minimalprincipien belegt werden. Sobald das Ergebniss mechanischer Betrachtungen in die Form gebracht ist, dass irgend eine bei einem mechanischen Vorgang resultirende Grösse als eine solche bezeichnet wird, die entweder einen Maximal- oder Minimalwerth annehme, so liegt darin an und für sich eine Anwendung des teleologischen Gesichtspunktes; denn die relative Grösse des Erfolgs ist hier massgebend für die Aufstellung der Bedingungen, und es tritt somit die für das Zweckprincip charakteristische Umkehrung

*) Philos. nat. princip. math., lib. I, prop. I, l. c. p. 34.

**) Mécanique analytique, sec. part. sect. I, 16; sect. III, §. II; 3. édit. t. I, p. 227, 244.

der Causalbeziehung ein. Ein leicht begreifliches Motiv hat nun aber ausserdem in diesem Falle die Minimalwerthe bevorzugen lassen. Geht man nämlich von den technischen Anwendungen der Mechanik aus, so wird die Zweckmässigkeit irgend einer mechanischen Vorrichtung, einer Maschine z. B., zunächst danach beurtheilt werden, ob der zur Wirkung kommende Aufwand an Kraft dem von der Maschine zu leistenden Nutzeffect möglichst zu statten kommt oder nicht. Eine Maschine wird offenbar dann am zweckmässigsten construirt sein, wenn ein gegebener Nutzeffect durch einen möglichst geringen Kraftaufwand erreicht wird. Für eine Zeit, welche die Natur mit Vorliebe unter dem Gesichtspunkte des Nutzens auffasste, lag es nun nahe, diese technische Betrachtungsweise auf die natürlichen Bewegungssysteme zu übertragen. Rein logisch beurtheilt würde man ebenso gut zu einem Maximal- wie zu einem Minimalprincip gelangen können. Denn ob ich einen gegebenen Effect als einen möglichst grossen oder den Kraftaufwand, der zu ihm geführt hat, als einen möglichst kleinen bezeichne, ist für das thatsächliche Verhältniss gleichgültig. Aber der teleologische Standpunkt begünstigt hier die Form des Minimalprincips, da derselbe, von der Folge zum Grund zurückgehend, zu der Frage führt, wie ein gegebener Effect unter möglichst günstigen Bedingungen entstehen könne, worauf nun als quantitativer Ausdruck dieser Bedingungen am natürlichsten ein Minimum an Kraftaufwand sich herauszustellen scheint.

Diese Erwägungen haben bereits unmittelbar zu derjenigen Gestalt geführt, in welcher die hier erörterte Form teleologischer Principen zum ersten Mal in die Entwicklung der Mechanik eingetreten ist, zu dem um das Jahr 1746 von Maupertuis aufgestellten Princip der kleinsten Action*). In der Formulirung, welche ihm sein Urheber gibt, reflectirt sich auf das deutlichste die einseitige Teleologie jener Zeit: „Wenn in der Natur irgend eine Veränderung vor sich geht, so ist die zu dieser Veränderung nöthige Menge von Thätigkeit eine möglichst kleine.“ Die Natur erscheint hier als die grosse Sparerin, deren Weisheit man in diesem Princip bewundert, und ebendeshalb ist man geneigt, das letztere als das Fundamentalgesetz anzuerkennen, auf das alle andern Sätze zurückgeführt werden sollen. Dabei zeigt freilich die Durchführung sofort,

*) Vgl. hierzu Ad. Mayer, Geschichte des Princips der kleinsten Action. Leipzig 1877.

dass man, um eine solche Behauptung aufrecht erhalten zu können, von der Unbestimmtheit der Begriffe Thätigkeit und Veränderung Gebrauch macht. Maupertuis selbst benützt als Mass der Thätigkeit das Product aus Masse, Geschwindigkeit und durchlaufenem Raum ($m v s$), als Veränderung aber betrachtet er bald, wie beim Stoss der Körper, die Differenz der lebendigen Kräfte, bald, wie bei der Brechung und Reflexion des Lichtes, die Summe der Actionsmengen vor und nach dem Ereigniss, so dass das behauptete Minimum in verschiedenen Fällen eine sehr verschiedene physikalische Bedeutung hat und überdies, wie d'Arcy zeigte, bei der Lichtbrechung sogar gelegentlich zu einem Maximum werden kann. Es war daher nur eine äusserliche Anbequemung, die freilich in der philosophischen Zeitrichtung ihre Quelle hatte, wenn Euler Resultate, die dem Gebiete der so genannten isoperimetrischen Probleme angehörten, als Specialfälle des Princips der kleinsten Action betrachtete. Es ist selbstverständlich, dass Aufgaben, bei denen es sich von vornherein darum handelt, die Bedingungen für den Minimal- oder auch Maximalwerth irgend einer Grösse zu finden, zu Lösungen führen können, die eine äussere Aehnlichkeit mit dem hier besprochenen Princip darbieten, da ja an und für sich jede solche Aufgabe auf einem verwandten teleologischen Gesichtspunkt beruht, wie dies z. B. schon bei dem ältesten isoperimetrischen Problem, dem der Curve des schnellsten Falls, deutlich hervortritt. Da nun aber dieser Gesichtspunkt schliesslich auf alle mechanischen Probleme anwendbar ist, indem nach den Minimal- und Maximalwerthen einer Function und nach den Bedingungen, unter denen sie auftreten, überall gefragt werden kann, so ist auch die zu Grunde liegende Methode, welche die Analytiker des vorigen Jahrhunderts als die isoperimetrische bezeichneten, und aus welcher die von Lagrange begründete Variationsrechnung (S. 255 f.) hervorging, von einer ganz allgemeinen Anwendbarkeit, und sie bietet auf diese Weise die Gelegenheit dar, jedes mögliche mechanische Problem unter dem ihr eigenen Gesichtspunkte zu behandeln.

In der That ist die ganze Weiterentwicklung des Princips der kleinsten Action von diesen beiden Motiven aus bestimmt worden, von dem philosophischen, welches seine ursprüngliche Aufstellung veranlasste, und von dem rein mathematischen, welches aus den isoperimetrischen Problemen entsprang. Je mehr im Laufe der Zeit die Willkürlichkeit in der Ausführung des ersten philosophischen Grundgedankens zu Tage trat, um so mehr musste das Princip den

Charakter einer bloss mathematischen Formulirung annehmen, die sich durch ihren Nutzen für bestimmte Anwendungen empfahl. In diesem Sinne ist es zunächst von Lagrange behandelt worden, der es als das „Princip der grössten oder kleinsten lebendigen Kraft“ bezeichnete und gleich allen andern zusammengesetzten Principien aus den allgemeinen Bewegungsgesetzen ableitete*). Schon der gewählte Ausdruck zeigt, indem er eine Alternative zwischen dem Maximum und Minimum aufstellt, dass hier der ursprüngliche teleologische Gedanke verloren gegangen ist. Das nämliche gilt von den weiteren Entwicklungen, die das Princip bei W. R. Hamilton und Jacobi gefunden hat**). Es verbleibt ihm hier nur insofern der teleologische Charakter, als es in directe Abhängigkeit von dem Princip der Erhaltung der lebendigen Kräfte gebracht wird, welches letztere ja, wie oben erörtert, auf einer Zweckbetrachtung beruht. Die Principien von Hamilton und Jacobi selbst aber besitzen, nachdem diese Beschränkung auf ein „conservatives System“ vorausgesetzt ist, lediglich mathematische Bedeutung; sie bieten Ausdrücke dar, welche die Lösung bestimmter Probleme erleichtern, ohne jedoch ein besonderes Princip teleologischer oder causaler Betrachtung zu enthalten oder gar im Sinne der ersten Aufstellung des Princips der kleinsten Action auf eine ursprüngliche Zweckmässigkeit der Natur hinzuweisen.

Ihre letzte und definitive Gestaltung haben endlich die Maximal- und Minimalprincipien in dem von Gauss aufgestellten Princip des kleinsten Zwangs gefunden***). Nach ihm erfolgen die Bewegungen eines Massensystems, wie auch die Massen mit einander verbunden sein mögen, in jedem Augenblick in möglichst grosser Uebereinstimmung mit der freien Bewegung, also unter dem kleinsten Zwang. Als Mass des Zwangs betrachtet man dabei die Summe der Producte aus dem Quadrat der Ablenkung jedes Punktes von der freien Bewegung in seine Masse. Man wendet also auf die Abweichung der gezwungenen von der freien Bewegung eine ähnliche Betrachtung an, wie sie bei der Methode der kleinsten Quadrate in Bezug auf die Ausgleichung der Beobachtungsfehler stattfindet. Mit Rücksicht hierauf bemerkte Gauss, die Natur verfahre, wenn in ihr die Bewegungen durch irgend welche hemmende Bedingungen

*) Méc. analyt., sec. part. sect. III, §. VI.

**) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, S. 45. Thomson und Tait, a. a. O. I, 1, S. 258 f.

***) Gauss' Werke V, S. 25.

modificirt werden, in der nämlichen Weise wie der rechnende Mathematiker, wenn er Erfahrungen ausgleicht, die sich auf von einander abhängige Grössen beziehen. Man wird nicht verkennen, dass es auch im ersteren Falle der rechnende Mathematiker ist, der unter einem bestimmten Gesichtspunkt die Erscheinungen betrachtet, und der nun nachträglich diese seine Betrachtungsweise der Natur selbst unterschiebt. Werden die Vorgänge in ihren rein causalen Beziehungen aufgefasst, so ist es selbstverständlich, dass bestimmte Hemmungen eine Bewegung um nicht mehr abändern können, als dem Betrag der Hemmung entspricht; jedes Mehr wäre ein ursachloses Geschehen. Kehrt man nun dieses causale Verhältniss um, indem man den Endeffect aller Bedingungen der Bewegung, die nach Massgabe der vorhandenen Hemmungen eintretende Abweichung von der freien Bewegung, zum Ausgangspunkt nimmt, so gelangt man zum Princip des kleinsten Zwangs. Der dem letzteren zu Grunde liegende Zweckgedanke wird dann aber zum objectiven Naturzweck erhoben, wenn man dieses Princip als ein Gesetz hinstellt, nach welchem die Natur selber verfahre. Diese Auffassung ist bestreitbar, weil sich damit die Vorstellung verbindet, der erreichte Endzweck sei zugleich die Ursache der Bewegungsgesetze selbst, wodurch die Natur zu einem mit Zweckbewusstsein handelnden Wesen gemacht wird.

### d. Causale Fundamentaltheoreme der Mechanik.

Die oben angedeutete Gefahr, die, wie das letzte Beispiel zeigt, selbst bei einer sonst richtigen Anwendung des Zweckgedankens so leicht nebenherläuft, ist es, die sichtlich in der neueren Entwicklung der Mechanik die Anwendung causaler Principien hat bevorzugen lassen. Doch ist es bemerkenswerth, dass in dieser Beziehung die exacteste der Naturwissenschaften den nämlichen Wandelungen des Zeitgeistes unterworfen war wie jede andere. Der teleologischen Mechanik entspricht eine teleologische Physik und Physiologie, und die causale Mechanik gibt auch auf diesen Gebieten der causalen Betrachtung ihre Richtung. Nur werden freilich in beiden Fällen Verirrungen, denen der exacte Charakter der Mechanik engere Grenzen setzt, um so schwerer und andauernder, je verwickelter die Erscheinungen sind. Für die Mechanik vollzieht sich in der Hervorhebung causaler Principien eine Rückkehr zu dem Zeitalter Galileis. Diese Beziehung macht sich vor allem darin geltend, dass man die

mechanischen Principien wieder auf die einfachsten Bewegungsvorstellungen zu gründen sucht. In diesem Sinne war zunächst d'Alembert bemüht, den Begriff der Kraft, der in der teleologischen Periode der Mechanik und namentlich in dem berühmten Streit über das Kräftemass vielfach verdunkelt worden war, wieder auf die anschaulichen Elemente zurückzuführen, die er bei Galilei und Newton gehabt hatte, und damit Hand in Hand ging sein Streben, die wegen ihrer nützlichen Anwendungen nicht zu entbehrenden Erhaltungsprincipien aus den einfachsten dynamischen Vorstellungen abzuleiten. Das von ihm begonnene Werk führte Lagrange zu Ende. Schon d'Alembert hatte mit der causalen Betrachtung den Plan verbunden, aus einem durch unmittelbare Evidenz oder durch einen anschaulichen Beweis feststehenden Fundamentaltheorem alle andern Sätze abzuleiten. Aber das von ihm aufgestellte Princip eignete sich weder zu einer hinreichend allgemeinen Formulirung der Bewegungsgesetze noch in der von ihm gegebenen Fassung zu einer unmittelbaren Verbindung der Statik mit der Dynamik, auf die es doch hinwies. Dies leistete erst Lagrange, indem er auf dasjenige Princip zurückging, welches schon dem d'Alembert'schen Satze stillschweigend zu Grunde lag, auf das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, das er in einer Weise verallgemeinerte, in der es sich zur Ableitung aller andern statischen und dynamischen Principien geeignet erwies. Auch in dieser Hervorkehrung des virtuellen Princips lag eine Rückkehr zu den Anschauungen Galileis, der dasselbe in einfacherer Gestalt bereits besass, wenn ihm auch der Name noch fehlte. Diese Rückkehr ist aber doch zugleich verbunden mit einer Umkehrung der Betrachtungsweise. Galilei hatte dynamische Vorstellungen in die Statik eingeführt. Dazu hatte ihm der Begriff des virtuellen Momentes gedient. Lagrange führte jedes dynamische Problem auf ein statisches zurück, was freilich wiederum nur dadurch möglich war, dass in Folge jener Galilei'schen Anschauung das Gleichgewicht als ein Grenzfall der Bewegung erscheint.

Das Princip von d'Alembert bildet zu dieser systematischen Gestaltung der gesammten Statik und Dynamik auf Grund eines einzigen causalen Grundsatzes die Vorbereitung. Es lautet in der von d'Alembert selbst gegebenen Formulirung: „Um die wirklichen Bewegungen eines Systems von Körpern zu finden, die mit einander im Zusammenhang stehen, zerlege man die jedem Körper mitgetheilten Bewegungen $a$, $b$, $c$ ... in je zwei andere $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$, $\beta_2$, $\gamma_1$, $\gamma_2$ ... Diese sollen so beschaffen sein, dass, wenn man dem

Körper die Bewegungen $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$ . . . allein mittheilte, das System im Gleichgewicht sein würde. Es werden dann die Bewegungen $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ . . . zugleich diejenigen sein, welche der Körper wirklich annimmt" *). Die Nützlichkeit dieses Princips besteht darin, dass dasselbe in allen Fällen, wo bewegende Kräfte unter bestimmten statischen Bedingungen einwirken, eine Zerlegung des Problems in einen statischen und dynamischen Theil herbeiführt, worauf nach Feststellung der im Gleichgewicht stehenden oder der so genannten „verlorenen Kräfte" die übrig bleibenden wie frei wirkende Kräfte behandelt werden können. Es liegt nahe, diesem Resultat eine solche Wendung zu geben, dass der Bewegung vollständig der Fall des Gleichgewichts substituirt wird. Dies geschieht dann, wenn man zu den übrig bleibenden Kräften $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ . . . solche von gleicher Grösse, aber entgegengesetzter Richtung hinzugefügt denkt. Diese Wendung ist dem d'Alembert'schen Princip in der That später gegeben worden, und es ist dasselbe dadurch zu der von Lagrange vollbrachten Zurückführung der Dynamik auf die Statik in noch nähere Beziehung getreten. Eine besondere Beweisführung für das Princip hat sein Urheber nicht für nöthig gehalten; vielmehr betrachtete er dasselbe als eine unmittelbar einleuchtende Folge der vorgenommenen Kräftezerlegung. Da sich jede solche Zerlegung auf das Princip der Zusammensetzung der Kräfte stützt, so ist aber jedenfalls das letztere vorausgesetzt.

Die oben angeführte Veränderung des d'Alembert'schen Princips, durch die jedes dynamische auf ein statisches Problem reducirt wird, scheint nun der nächste Anlass zu der von Lagrange unternommenen einheitlichen Gestaltung der Mechanik auf Grund eines einzigen causalen Fundamentalsatzes gewesen zu sein. Als solches dient ihm das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, dem er die Bedeutung eines allgemeinsten statischen Gesetzes gibt. Massgebend für dieses Princip ist zunächst der Begriff des „virtuellen Momentes", unter dem man das Product einer Kraft in die im Sinne ihrer Wirkung zurückgelegte unendlich kleine geradlinige Wegstrecke versteht. Dies vorausgesetzt lautet das Princip: „Ein zusammenhängendes System von Körpern oder Punkten ist im Gleichgewicht, sobald die Summe seiner virtuellen Momente gleich null ist" **). Man ermittelt also hier die Bedingungen des Gleichgewichts, indem man

*) D'Alembert, Traité de dynamique. Paris 1743, p. 51.

**) Vgl. hierzu die ausführlichere Formulirung bei Lagrange a. a. O. p. 20.

sich denkt, jede einzelne Kraft übe eine ihrer Grösse entsprechende, aber unendlich kleine Wirkung aus, und feststellt, dass die Summe aller so gebildeten positiven und negativen virtuellen Geschwindigkeiten gleich null ist. Findet kein Gleichgewicht statt, so wird diese Summe nicht gleich null sein; man kann sich aber dann stets die Bewegung dadurch aufgehoben denken, dass man die nach den drei Coordinatenaxen genommenen Componenten der Bewegung durch Kräfte von gleicher Grösse und entgegengesetzter Richtung aufgehoben denkt. Durch diese dem d'Alembert'schen Princip entnommene Betrachtungsweise liefert das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die Grundgleichungen der Dynamik für die Bewegung irgend eines Körpersystems*). Hierbei beruht die mathematische Ableitung der letzteren auf einem sehr einfachen Verfahren. Ist nämlich im Fall des Gleichgewichts die Summe der statischen Momente gleich null, so wird dieselbe, wenn kein Gleichgewicht vorhanden ist, den momentanen Beschleunigungen nach den drei Coordinatenaxen gleich gesetzt werden können. Bringt man nun aber diese Beschleunigungen unter abgeändertem Vorzeichen auf die andere Seite, so wird man wieder eine Summe erhalten, die der Null gleich ist, und die sich von der statischen Bedingungsgleichung nur dadurch unterscheidet, dass sie ausser den virtuellen Momenten die Componenten der Beschleunigung im umgekehrten Sinne genommen enthält. Mit demselben Rechte kann man übrigens auch die Bedingungsgleichungen der Bewegung als den allgemeineren Fall betrachten, aus welchem die statischen Grundgleichungen hervorgehen, wenn die Componenten der Beschleunigung sämmtlich gleich null werden. Die neuere Mechanik hat im ganzen die letztere Auffassung bevorzugt. Wesentlich ermöglicht wird diese Zurückführung auf ein einziges dynamisches Grundprincip durch die Anwendung der Infinitesimalmethode, welche bei der Aufstellung der Grundgleichungen der Bewegung überhaupt von der Annahme unendlich kleiner Verrückungen ausgeht, wie solche das virtuelle Princip verlangt. Da übrigens bei jedem Bewegungsvorgang gewisse constante Bedingungen, unter denen sich die bewegten Massen befinden, von Einfluss sind, so müssen solche ebenfalls in den Bewegungsgleichungen berücksichtigt werden. Zu diesem Zweck werden jene Bedingungen zunächst unabhängig von dem untersuchten Bewegungsvorgange betrachtet und und in gewissen Bedingungsgleichungen $\varphi = c$, $\psi = e \ldots$ ausgedrückt, wo die Grössen $c, e \ldots$

---

*) Lagrange, a. a. O. p. 234.

irgend welche, von der Natur des Problems abhängige Functionen der Coordinaten bedeuten. Es werden dann derivirte Functionen der Werthe $\varphi$, $\psi$ . . . in die Bewegungsgleichungen aufgenommen, indem man sich des S. 252 erwähnten Princips der partiellen Differentiation bedient. Betrachtet man hiernach das bewegte System als ein System von Punkten, deren Massen $m_1$, $m_2$ . . . sind, und bezeichnet man die Componenten der Kräfte nach den drei Coordinatenaxen mit $X_1$, $Y_1$, $Z_1$, $X_2$, $Y_2$, $Z_2$ . . ., so nehmen die Gleichungen Lagranges die Form an:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{d t^2} = X_1 + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial \psi}{d x_1} + \ldots$$

$$m_1 \frac{d^2 y_1}{d t^2} = Y_1 + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \ldots$$

$$m_1 \frac{d^2 z_1}{d t^2} = Z_1 + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z_1} + \ldots$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

Der mathematische Vorzug dieser abstracten analytischen Formeln besteht in ihrer Anwendbarkeit auf jedes specielle Problem, ihr logischer Vorzug darin, dass sie eine vollständige Zerlegung des Bewegungsvorganges in seine Elemente enthalten und hierbei die Bedeutung der einzelnen Factoren, wie der Massen ($m_1$, $m_2$ . . .), der Kräfte (definirt durch die Differentialquotienten $\frac{d^2 x_1}{d t^2}$, $\frac{d^2 y_1}{d t^2}$ . . ., d. h. durch die Beschleunigungen), sowie der äusseren Bedingungen ($\varphi$, $\psi$ . . .), deutlich hervortreten lassen*).

Einen wichtigen Theil seiner Dynamik hat Lagrange dem Nachweis gewidmet, dass alle jene complicirteren Principien von grossentheils teleologischem Charakter, die sich für die Behandlung bestimmter Arten von Aufgaben nützlich erwiesen, aus dem so gewonnenen Fundamentalgesetz abgeleitet werden können. Auf diese Weise finden sich bei ihm zum ersten Mal die genannten Principien als einzelne Folgen aus den allgemeinsten Causalgesetzen der Mechanik im Zusammenhange entwickelt.

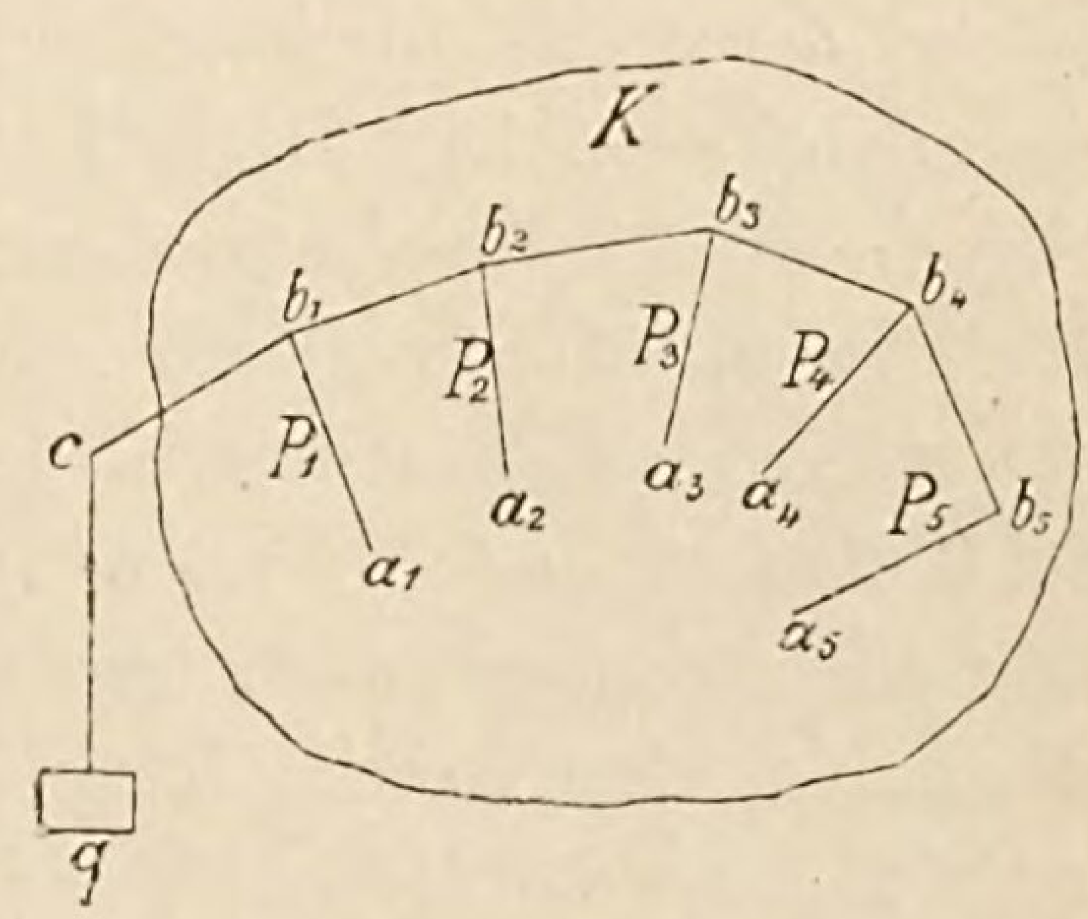
Mit dem hierin hervortretenden Streben einer vollkommen einheitlichen Ausführung der Mechanik geht Hand in Hand der Versuch, auch dem zu Grunde gelegten Princip eine Selbständigkeit zu

---

*) Vgl. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. 2. Vorl. S. 28 ff. Leipzig 1876.

geben, durch die es von allen etwa sonst massgebend gewesenen Voraussetzungen unabhängig wird. Das Ideal wissenschaftlicher Darstellung würde in der That dann erreicht sein, wenn es nicht nur gelänge, aus einem Princip alles Einzelne abzuleiten, sondern wenn auch ausserdem dieses Princip nur auf sich selber gestellt wäre. So erfolgreich nun Lagranges Bemühungen in ersterer Beziehung gewesen sind, so ist es ihm doch zweifellos nicht geglückt, durch seine Ableitung des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten wirklich alle andern Voraussetzungen entbehrlich zu machen. Vielmehr werden dieselben auch hier stillschweigend vorausgesetzt. Lagrange bezeichnet den Satz vom Hebel und den Satz vom Kräfteparallelogramm als die beiden Principien, auf welche man bis dahin die Statik gegründet habe, und er ist der Ansicht, dass das virtuelle Princip das allgemeinere sei, weil es als ein allgemeiner Ausdruck für die sämmtlichen Gesetze des Gleichgewichts betrachtet werden könne. Das virtuelle Princip selbst sei zwar nicht unmittelbar evident, aber es könne aus einem andern unmittelbar evidenten Princip, aus dem des Flaschenzugs, abgeleitet werden, ohne dass es nöthig wäre, das Hebelgesetz und das Gesetz der Zusammensetzung der Kräfte zu dieser Deduction zu benützen. Kaum dürfte jedoch der Flaschenzug den Namen eines besonderen Princips verdienen, da er lediglich die Bedeutung einer Veranschaulichung des virtuellen Princips selbst besitzt. Angenommen, es wirkten auf einen Körper $K$ eine Reihe von Kräften $P_1$, $P_2$, $P_3$ . . . in den Richtungen $a_1\, b_1$, $a_2\, b_2$, $a_3\, b_3$ . . . ein, so besteht die Anwendung der Vorstellung des Flaschenzuges darin, dass man an den Angriffspunkten $a_1$, $a_2$, $a_3$ . . . der Kräfte bewegliche Rollen, irgendwo in der Richtung des Kräftezugs dagegen feste Rollen $b_1$, $b_2$, $b_3$ . . . angebracht und um eben diese Rollen einen einzigen unausdehnsamen und absolut biegsamen Faden geschlungen denkt, dessen Ende an der letzten beweglichen Rolle $a_5$ befestigt ist. Bringt man nun an einer beliebigen Stelle ausserhalb des Kräftesystems noch einmal eine feste Rolle $c$ an, über welche der Anfang des Fadens gelegt wird, so lassen sich alle Kräfte $P_1$, $P_2$, $P_3$ . . . durch ein hier angehängtes

Fig. 16.



Gewicht $q$ ersetzt denken, wenn man zwischen je zwei zusammengehörigen Rollen $a_1$ und $b_1$, $a_2$ und $b_2$ u. s. w. den Faden so oftmal geschlungen denkt, dass der durch $q$ ausgeübte Zug succesiv den Kräften $P_1$, $P_2$, $P_3$ ... an Grösse gleichkommt. Bezeichnet also $n_1$, $n_2$, $n_3$ ... die Zahl der Fäden zwischen $a_1$ und $b_1$, $a_2$ und $b_2$, $a_3$ und $b_3$ ..., so sind diese Zahlen durch die Bedingung gegeben, dass $n_1 . q = P_1$, $n_2 . q = P_2$, $n_3 . q = P_3$ ... sein muss. Denkt man sich nun ferner, jede der Rollen $a_1$, $a_2$, $a_3$ ... erführe durch das Gewicht $q$ unendlich kleine Verrückungen $e_1$, $e_2$, $e_3$ ..., so wird offenbar ein Sinken dieses Gewichtes dann nicht eintreten können, wenn $n_1 . e_1 + n_2 . e_2 + n_3 . e_3 \ldots = 0$ ist, d. h. wenn die vorausgesetzten unendlich kleinen Verrückungen einander gegenseitig aufheben. Hieraus ergibt sich aber, wenn man die zwischen $P_1$, $P_2$, $P_3$ ... und $q$ festgestellte Beziehung berücksichtigt, unmittelbar die Gleichung der virtuellen Momente

$$e_1 P_1 + e_2 P_2 + e_3 P_3 + \ldots = 0,$$

welche der gewöhnliche Ausdruck des Princips der virtuellen Geschwindigkeiten ist. Diese Ableitung gewinnt noch eine abstractere Allgemeinheit, wenn man der Schwere des Gewichtes $q$ eine beliebige Kraft $p$ substituirt, die in irgend einer Richtung $b_1 c$ wirken kann, und wenn man, wie dies in der Fig. 16 angedeutet ist, voraussetzt, die Rollen $a_1$, $b_1$ ... seien von verschwindendem Durchmesser, so dass alle zwischen zwei zusammengehörigen Rollen verlaufende Fäden in eine einzige gerade Linie zusammenfallen. Es wird aber dann zugleich noch deutlicher, dass dieser ganze Mechanismus des Flaschenzugs nur die Bedeutung einer mathematischen Hülfsvorstellung besitzt, die anschaulich machen soll, unter welcher Bedingung Kräfte, die auf einen Körper oder auf ein System unter einander verbundener Punkte wirken, im Gleichgewicht stehen. Auf den mathematischen Charakter der ganzen Vorstellung weist überdies die physikalisch unmögliche Annahme unausdehnsamer und absolut biegsamer Fäden hin, die auf den fingirten Rollen reibungslos gleiten sollen. In dieser Beziehung gleicht die Vorstellung des Flaschenzugs vollständig einer jener geometrischen Hülfsconstructionen, welche einen Satz, der aus der ursprünglichen Figur nicht entnommen werden kann, unmittelbar evident machen. (Vgl. S. 170 ff.) Das Zwingende der Veranschaulichung liegt in diesem Falle darin, dass die Erfolge der Combination einer Mehrheit in verschiedenen Richtungen wirkender Kräfte durch die Beziehung auf eine einzige mehrfach gebrochene

gerade Linie versinnlicht werden, deren einzelne Theile man durch angemessene Knickungen successiv mit den Richtungen sämmtlicher Kräfte zusammenfallen lässt, wodurch nun, unter der Voraussetzung, dass sich alle Kräftewirkungen längs derselben fortpflanzen, der Gesammteffect der auf das System ausgeübten Wirkung als eine Bewegung des freien Endes merklich werden muss. Demgemäss lässt es sich dann umgekehrt als Bedingung des Gleichgewichts hinstellen, dass, wenn alle Kräfte momentan in Wirksamkeit gedacht werden, eine solche Bewegung nicht stattfinden darf. Die hypothetischen Eigenschaften des geschlungenen Fadens sind hiernach nur insofern berechtigt, als sie den unveränderlichen Zusammenhang der Massenpunkte des Körpers $K$ in einer andern für den vorliegenden Zweck geeigneten Form zur Darstellung bringen. Im übrigen aber zeigt die obige Zergliederung, wie die ganze Veranschaulichung ihre zwingende Kraft bloss dadurch gewinnt, dass man gewisse Voraussetzungen stillschweigend hinzudenkt. Erstens nämlich wird angenommen, dass Kräfte, die in einer und derselben geraden Linie auf ein starres Massensystem einwirken, sich in Bezug auf diese Wirkungen algebraisch addiren lassen, und zweitens, dass die Grösse einer Kraft an sich nicht verändert wird, wenn man derselben durch irgend welche äussere Hülfsmittel eine veränderte Richtung gibt. Diese beiden Voraussetzungen sind es nun, welche allen Sätzen über die Combination von Kräftewirkungen, insbesondere also auch dem Satz vom Parallelogramm der Kräfte zu Grunde liegen. Das virtuelle Princip hat den Vorzug, dass es diese allgemeinsten Voraussetzungen der Combination von Kräften unmittelbar in ihrer einfachen Natur hervortreten lässt, während der Satz vom Kräfteparallelogramm in directerer Weise geeignet ist, zu gegebenen Kräften die Resultirende nach Grösse und Richtung zu finden oder eine Kraft von bestimmter Richtung auf eine beliebige andere Richtung zu reduciren. Uebrigens bietet auch der Satz vom Kräfteparallelogramm diesen Vortheil nur so lange dar, als die Kräfte auf einen einzigen Punkt wirken, während, sobald an einem System fest verbundener Punkte die Kräfte angreifen, die Möglichkeit des Eintritts rotirender Wirkungen ein Problem der Kräftecombination einschliesst, das durch jenen Satz nicht gelöst wird. In dieser Beziehung bildet der von Poinsot*) eingeführte Begriff des Kräftepaars eine wichtige Ergänzung

---

*) Poinsot, Neue Theorie der Drehung der Körper. Deutsch von Schellbach. Berlin 1854.

desselben, indem er eine ähnliche Reduction auf beliebige Richtungen auch für die drehende Bewegung gestattet. Dabei hat nun abermals das virtuelle Princip den Vorzug grösserer Allgemeinheit für sich, da es sich auf ein System beliebig vieler fest verbundener Punkte bezieht, so dass die Bedingungsgleichung, zu der es führt, ebensowohl die drehende wie die fortschreitende Bewegung umfasst. Endlich wird auch die Richtungsreduction bei dem virtuellen Princip verwerthet: sie besteht hier darin, dass alle Kräfte schliesslich auf eine einzige Richtung reducirt werden.

Auf diese Weise ergibt sich, dass alle die genannten Sätze nur verschiedene Gestaltungen eines einzigen Princips der Zusammensetzung der Kräfte sind. Es kommt auf die specielle Beschaffenheit der Aufgabe an, welche von ihnen zu bevorzugen ist; doch besitzt der Satz der virtuellen Geschwindigkeiten wegen seiner Ausdehnung auf beliebig viele Kräfte von translatorischer oder rotatorischer Wirkung jedenfalls die grösste Allgemeinheit. In Folge dieser gemeinsamen Wurzel ist nun auch für keinen jener Sätze ein eigentlicher Beweis, d. h. eine Ableitung aus andern fundamentaleren Principien, möglich. Was man Beweis zu nennen pflegt, das besteht nur in einer Veranschaulichung, bei der das zu beweisende Princip schon vorausgesetzt ist. So beweist man z. B. angeblich den Satz vom Kräfteparallelogramm, indem man die simultane Wirkung der Componenten in eine successive auflöst und zeigt, dass, wenn man sich diese successiven Wirkungen in unendlich kleinen Zeittheilchen einander folgend denkt, der beschriebene Weg die Diagonale des Parallelogramms ist. Nun besteht aber das Princip gerade darin, dass die simultanen Wirkungen der Kräfte ebenso wie die successiven sich combiniren. Genau ebenso verhält es sich mit der Zusammensetzung der Kräftepaare, bei der man ganz nach dem Satz vom Kräfteparallelogramm verfährt. Nicht minder hat für das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten die Anwendung des Flaschenzugs nur die Bedeutung der Veranschaulichung eines von vornherein feststehenden Princips*).

### e. Die phoronomischen und die dynamischen Voraussetzungen der Mechanik.

Der allgemeine, in allen einzelnen Sätzen über die Zusammensetzung von Kräften zur Geltung kommende Grundsatz, dass die

*) Vgl. hierzu das Princip der Zusammensetzung der Bewegungen in seiner allgemeinsten Fassung, Bd. I. S. 582.

Zusammensetzung einzig und allein durch die geometrischen Eigenschaften der erzeugten Bewegungen bestimmt wird, gestattet es, alle hier in Rede stehenden Principien unter einem veränderten Gesichtspunkte zu betrachten. Es wird nämlich bei allen Problemen über Kräftezusammensetzung von den Kräften selbst völlig abstrahirt werden können, und es werden dann die betreffenden Sätze eine rein phoronomische Gestalt annehmen, indem sie lediglich die allgemeinsten Gesetze über die Zusammensetzung von Bewegungen enthalten. In der That ist schon um deswillen diese phoronomische Gestaltung der Principien die allein correcte Form, weil die veranschaulichenden Beweise für dieselben lediglich phoronomischer Art sind, so dass die Einführung des Kraftbegriffs hier eine überflüssige Rolle spielt.

Dies führt uns auf denjenigen Punkt, in dem die systematische Gestaltung, welche die Mechanik bei Lagrange gefunden, ungenügend geblieben ist. Er betrifft die logische Scheidung der verschiedenen Gebiete der Mechanik nach den in ihnen vorausgesetzten Grundbegriffen, eine Scheidung, die von ungleich grösserer Wichtigkeit ist als die alte Trennung in Statik und Dynamik, da diese beiden in ihrer neueren Entwicklung durchaus die nämlichen Grundbegriffe zur Anwendung bringen. Mit Rücksicht hierauf hat in einzelnen Darstellungen der Mechanik eine Gliederung Platz gegriffen, die in der That bestimmt zu sein scheint, an die Stelle jener älteren Eintheilung in Statik und Dynamik zu treten: die Gliederung nämlich in Phoronomie (oder Kinematik) und Dynamik. Von ihnen hat sich die erstere mit den Gesetzen der Bewegung als solcher zu beschäftigen, abgesehen also von den Ursachen, welche Bewegungen erzeugen, und von den physischen Eigenschaften der Körper, an denen sie stattfinden*). Die Phoronomie in diesem Sinne ist eine der Geometrie nahe verwandte Disciplin; auch sie bezieht sich nur auf reine Anschauungen, sie fügt aber zu den

*) Zwischen Phoronomie und Kinematik unterscheidet der Sprachgebrauch der neueren Mechanik im allgemeinen wieder derart, dass man unter Phoronomie die abstracte Behandlung der allgemeinsten Bewegungsgesetze, unter Kinematik die Anwendung dieser und der geometrischen Gesetze auf die verwickelteren Bewegungsprobleme versteht. Anfänge einer rein phoronomischen Behandlung finden sich schon bei d'Alembert, der durch seine Skepsis gegenüber dem Kraftbegriff hierzu geführt wurde, namentlich aber bei L. M. N. Carnot. Vgl. dessen Grundsätze der Mechanik vom Gleichgewicht und der Bewegung. Deutsche Ausg. Leipzig 1805.

geometrischen Grundbegriffen den der Bewegung hinzu. Auf diesem letzteren Umstande beruht ihre Selbständigkeit, welche in der Existenz besonderer phoronomischer Axiome ihren Ausdruck findet. Diese Axiome, zu denen neben dem Satz von der Relativität der Bewegung vor allem das Princip der Zusammensetzung der Bewegungen gehört, haben gleich den geometrischen Axiomen eine anschauliche Gewissheit, d. h. ihre Richtigkeit kann nur durch den unmittelbaren Hinweis auf die Anschauung festgestellt werden. Die Dynamik dagegen, von welcher die Statik nur einen Theil bildet, setzt ausser den phoronomischen Begriffen noch die beiden Begriffe der Kraft und der Masse voraus. Auf diese Begriffe beziehen sich zwei andere Fundamentalgesetze der Mechanik, welche darum als specifisch dynamische Axiome bezeichnet werden können, das Beharrungsgesetz und der Satz von der Gleichheit der Action und Reaction. Aus ihnen und aus den phoronomischen Axiomen können die andern dynamischen Principien, insbesondere die verschiedenen Erhaltungsprincipien abgeleitet werden. Während die phoronomischen Axiome nur der Vorstellungen des Raumes und der Bewegung bedürfen, stützen sich die dynamischen Grundsätze ausser auf diese auch noch auf den Causal- und Substanzbegriff. So lässt sich das Beharrungsgesetz geradezu als Corollarsatz des Causalgesetzes auffassen, wenn man die Voraussetzung der Unveränderlichkeit der Substanz als gegeben annimmt. Die übrigen dynamischen Axiome aber gehen aus den phoronomischen Grundsätzen hervor, sobald man in sie den Causal- und Substanzbegriff mit den näheren Bestimmungen einführt, die sie durch das Zusammenwirken der Erfahrung und der Postulate der reinen Anschauung gewonnen haben. (Bd. I, S. 618 ff.).

Die Begriffe von Kraft und Masse enthalten nun aber in der abstracten Fassung, die ihnen die Dynamik gibt, zunächst eine Unbestimmtheit, welche den dynamischen Untersuchungen einen weiten Spielraum sowohl innerhalb wie ausserhalb der concreten Bedingungen des Geschehens lässt. Die Kraft, indem sie lediglich als Beschleunigung einer Masse definirt wird, ist nur durch die phoronomischen Gesetze einerseits uud durch die allgemeinen dynamischen Grundsätze anderseits bestimmt. Innerhalb dieser Voraussetzungen ist es der Dynamik vollkommen freigestellt, beliebige Annahmen über Grösse und Vertheilung der Kräfte zu machen. Trotzdem bleibt hier der Uebergang zu den concreten physikalischen Problemen stets ein sehr einfacher, weil der Begriff der Kraft selbst in diesen Anwendungen nur specielle Werthe annimmt, sonst aber ungeändert bleibt. Anders

verhält es sich mit dem Begriff der Masse. Er enthält an und für sich nur die Vorstellung eines räumlich selbständigen Gebildes, auf welches die Kraft wirkt, und welches dieser Wirkung einen bestimmten messbaren Widerstand entgegensetzt, nach dem die Grösse der Masse geschätzt wird. Hier sind erstens die geometrischen Eigenschaften der Masse unbestimmt gelassen — in der That kann vom Punkt an bis zum beliebig ausgedehnten Körper jedes denkbare geometrische Gebilde auch im dynamischen Sinne als Masse gedacht werden, — sodann aber bleiben, wenn die Masse ausgedehnt ist, hinsichtlich des gegenseitigen Verhältnisses der einzelnen Punkte derselben die verschiedensten Vorstellungen möglich: die Verbindung dieser Punkte kann als eine absolut starre, als eine in einem gewissen Grade verschiebbare, als eine absolut verschiebbare gedacht werden u. s. w. Es ist naturgemäss, dass die Dynamik gegenüber dieser unbeschränkten Zahl von Möglichkeiten zunächst die einfachste Voraussetzung über die Constitution der Massen macht. Sie besteht in der Annahme, dass der Masse, abgesehen von der in ihrem dynamischen Begriff gelegenen Eigenschaft eines Widerstandes von bestimmter Grösse, nur diejenigen Eigenschaften zukommen, die in ihrer geometrischen Vorstellung enthalten sind. Diese Annahme führt zu der in der Mechanik benützten Fiction absolut starrer, unausdehnsamer und in sich gleichartiger Linien, Flächen und Körper. Nimmt man zu diesen geometrischen Abstractionen die phoronomische Vorstellung der absoluten Beweglichkeit eines gegebenen Punktes hinzu, so entsteht die Annahme eines unausdehnbaren und absolut biegsamen Fadens, wie sie z. B. beim Princip des Flaschenzugs zur Anwendung kommt, oder bei noch allgemeinerer Ausdehnung die Annahme einer körperlichen Masse, deren einzelne Punkte absolut beweglich sind, wie eine solche zur Ableitung der abstracten hydrodynamischen Grundgesetze verwerthet wird*). Diejenige Behandlungsweise der Dynamik nun, welche sich auf den allgemeinen Kraftbegriff beschränkt und in den Begriff der Masse ausschliesslich gewisse mathematische Voraussetzungen von absolutem Charakter einführt, die in der Natur niemals verwirklicht sind, wollen wir als die abstracte oder mathematische Dynamik bezeichnen. Dagegen kann derjenigen Behandlungsweise, welche gewisse Bestandtheile dieser abstracten Voraussetzungen aufgibt, um die Probleme den wirklich in der Natur gegebenen Bedingungen zu nähern, der

*) Lagrange, Mécan. anal. I, p. 172.

Name der concreten oder physikalischen Dynamik beigelegt werden. Es ist selbstverständlich, dass die abstracte der concreten Dynamik vorarbeiten muss. Diese würde niemals zu einer Lösung der verwickelteren physikalischen Aufgaben gelangen, wenn sie diese Aufgaben nicht zunächst auf ihre einfachste mathematische Form zurückführte. Aus diesem Grunde vollzieht sich auch der Uebergang von der mathematischen zur physikalischen Dynamik keineswegs mit einem Schritte, sondern successiv werden in die ursprünglich ganz abstracten dynamischen Voraussetzungen limitirende Annahmen eingeführt. Solange man im Gebiete der eigentlichen Mechanik verweilt, verlässt man aber niemals das Gebiet abstracter Betrachtungen. Denn selbst jene limitirenden Annahmen pflegen zunächst schon um der mathematischen Behandlung willen wiederum eine abstracte Form anzunehmen. Unmerklich erweitert sich auf diese Weise die Mechanik zur theoretischen Physik, deren ausgebildetere Theile geradezu als die einzelnen Zweige der concreten Dynamik betrachtet werden können.

### f. Der Causalbegriff der mechanischen Naturlehre und das Postulat der geschlossenen Naturcausalität.

Die Annahme, dass die Materie das qualitativ wie quantitativ unveränderliche Substrat aller Naturerscheinungen sei, hatte schon die antike Atomistik zu dem Schlusse geführt, diese Erscheinungen seien sämmtlich aus Bewegungszuständen und Bewegungsvorgängen theils der unmittelbar wahrzunehmenden materiellen Massen theils hypothetisch vorauszusetzender Massentheilchen abzuleiten. Die Entwicklung der neueren Mechanik hat dann die Ueberzeugung von der Richtigkeit jenes Schlusses befestigt, indem sie die Hülfsmittel an die Hand gab, mittelst deren es mehr und mehr gelang, die verschiedensten Theile der Naturlehre in Gebiete der angewandten Mechanik umzuwandeln. Dabei bleibt jedoch selbstverständlich überall da, wo die Bewegungsvorgänge nicht direct nachweisbar sind, sondern nur hypothetisch angenommen werden, um die empirisch gegebenen Erscheinungen abzuleiten, auch diese ganze Subsumtion unter die Mechanik ein hypothetisches Verfahren, das seine Rechtfertigung lediglich seiner Fähigkeit verdankt, auf diesem Wege eine widerspruchslose und einheitliche Erklärung der Naturerscheinungen zu Stande zu bringen. Darum ist der Satz, dass alle Naturerscheinungen schliesslich auf die Principien der Mechanik zurückführbar seien, kein Erfahrungssatz, und er kann sich niemals in einen solchen

umwandeln, sondern er ist und bleibt ein heuristisches Postulat, welches sich aber als ein so wirksames Förderungsmittel der naturwissenschaftlichen Forschung, namentlich auf vielen Gebieten der Physik, erwiesen hat, dass es auf alle Naturgebiete übertragen worden ist.

So wenig nun auch die mechanische Naturansicht im Sinne einer vollständig gelungenen Durchführung jenes Princips der Reduction aller Naturerscheinungen auf mechanische Bewegungen jemals absolut beweisbar sein wird, so ist es doch nicht wahrscheinlich, dass die Naturwissenschaft dieses Princip jemals aufgeben wird. Dazu ist es zu sehr verwachsen mit allen sonstigen Voraussetzungen derselben: mit dem Princip der Anschaulichkeit, der Einfachheit, sowie mit dem Princip der Constanz der Materie. Dagegen ist niemals zu vergessen, dass jene Annahme der Gesammtheit der Naturerscheinungen gegenüber lediglich ein methodologisches Postulat ist, welches uns sagt, in welcher Richtung die Voraussetzungen zu machen sind, mittelst deren wir eine gegebene Erscheinung in den allgemeinen Zusammenhang der Naturerscheinungen einreihen können. Dagegen darf dieses Postulat niemals, wie es beispielsweise in den mechanistischen Theorien der früheren Physiologie der Fall gewesen ist, dazu verführen, dass man empirisch gegebene Thatsachen vernachlässigt oder unvollständig, etwa mit Hülfe leerer mechanischer Analogien, interpretirt. In diesem verkehrten Sinn angewandt wird die mechanische Naturanschauung, statt zu einem Förderungsmittel, vielmehr zu einem Hinderniss der Forschung.

Jener regulative Grundsatz der mechanischen Interpretation hat einen weitgreifenden allgemeinen Einfluss auf das Gesammtgebiet der Naturwissenschaft namentlich dadurch ausgeübt, dass er dem Causalprincip die ihm für alle Naturgebiete eigenthümliche Form gab. Diese Form besteht darin, dass jede Causalbeziehung principiell als ausdrückbar durch eine Causalgleichung angesehen wird, deren eine Seite den als „Ursache“, und deren andere den als „Wirkung“ aufgefassten Complex von Thatsachen enthält. Der Aufstellung solcher Causalgleichungen entspricht der schon im Beginn der Entwicklung der neueren Naturwissenschaft zur Geltung gebrachte Grundsatz: „Causa aequat effectum“, oder, wie er wegen der Transformationen der Naturkräfte angemessener auszudrücken ist: „Die Wirkung ist äquivalent ihrer Ursache“ *). Sobald sich für bestimmte

*) Ueber die geschichtliche Entwicklung dieses Grundsatzes vgl. meine Schrift: Die physikalischen Axiome und ihre Beziehung zum Causalprincip. Erlangen 1866, S. 57 ff.

Naturerscheinungen solche Causalgleichungen aufstellen lassen, sind mittelst ihrer demnach stets die Kriterien gegeben, nach denen der engere Begriff der Ursache von dem der entfernteren Bedingungen einer Erscheinung zu sondern ist, eine Unterscheidung, die darum auch im Gebiet der exacteren Naturwissenschaften niemals Schwierigkeiten bereiten kann, falls man nur eben dieses thatsächlich von der Naturwissenschaft selbst angewandten Kriteriums sich bedient. Von den im Zusammenhang mechanischer und physikalischer Entwicklungen auftretenden Definitionsgleichungen sind die Causalgleichungen stets dadurch unterschieden, dass sie auf beiden Seiten verschiedene Begriffe enthalten, nicht ein und denselben, wie die Definitionsgleichungen. Sobald verschiedene Erscheinungen als causal zusammengehörig und zugleich als quantitativ einander gleich oder äquivalent erkannt sind, werden sie in einer Causalgleichung zusammengefasst. So ist z. B. die Gleichung $v = \frac{k}{m} . t$ für die Geschwindigkeit einer Masse $m$, auf die während der Zeit $t$ eine Kraft $k$ wirkt, eine Causalgleichung: $v$ kann als die Wirkung der auf der rechten Seite der Gleichung stehenden ursächlichen Factoren betrachtet werden. Indem sich die Causalgleichungen der Naturwissenschaft stets auf Ereignisse, niemals auf ruhende Zustände beziehen, fügen sie sich den allgemeinen Bedingungen für die Bildung des Causalbegriffs. (Bd. I, S. 596 ff.) Der Naturcausalität eigenthümlich ist es aber, dass in jede Causalgleichung neben veränderlichen auch constante Factoren eingehen, die in derselben Grösse in anderen Causalgleichungen vorkommen können, und die auf die unveränderlichen Bedingungen der Naturcausalität, auf die Materie als die Trägerin beharrender Naturkräfte einerseits und constanter Widerstände der Massen andrerseits, hinweisen. Mit Rücksicht auf diese Gebundenheit an constante substantielle Substrate kann man die Naturcausalität auch als substantielle Causalität bezeichnen.

Nun hat die Mechanik, wie wir sahen, zwei Begriffe von causaler Bedeutung entwickelt: die Begriffe der Kraft und der Energie. (S. 308 f.) Demnach können wir auch schon im Gebiet der Mechanik zweierlei Causalgleichungen unterscheiden: Kraftgleichungen und Energiegleichungen. Die Fundamentalgesetze der Mechanik sind die Kraftgleichungen: so die oben als Beispiel angeführte Relation zwischen beschleunigender Kraft, Masse und Geschwindigkeit. Vor allem gehören Lagranges Grundgleichungen der Bewegung hierher. (S. 318.) Energiegleichungen besitzt die Mechanik in der Form

fester Relationen zwischen Lageenergie und Bewegungsenergie. (S. 309.) Insofern es sich dabei um verschiedene, unter Umständen zeitlich mehr oder weniger weit von einander entfernte Zustände der bewegten Massen handelt, können wir solche Causalgleichungen auch Zustandsgleichungen nennen. Wenn wir z. B. ein Gewicht $p$ auf die Höhe $h$ heben, so wird ihm dadurch eine Lageenergie mitgetheilt, vermöge deren es, von der Höhe $h$ herabfallend, eine bewegende Energie $\frac{mv^2}{2}$ entwickeln kann. Demnach ist die Gleichung $ph = \frac{mv^2}{2}$ eine Causalgleichung, in welcher der eine Zustand als die Ursache des andern betrachtet wird. Diese Gleichungen haben das Eigenthümliche, dass sie auf Zwischenvorgänge, die zwischen dem Uebergang aus dem einen in den andern Zustand liegen, die aber für die quantitative causale Beziehung beider Zustände unwesentlich sind, keine Rücksicht nehmen, und ferner, dass sie besondere Bedingungen für den Uebergang des einen Zustands in den andern voraussetzen, von denen ebenfalls abstrahirt wird. Dabei wird jedoch im allgemeinen stillschweigend angenommen, dass, wenn auf solche Zwischenvorgänge und Uebergangsbedingungen Rücksicht genommen würde, diese stets in besonderen Causalgleichungen dargestellt werden könnten.

In dem weiteren Gebiet der Naturlehre tritt nun zu diesen der Mechanik eigenthümlichen Arten der Causalgleichungen noch eine weitere hinzu, bei der die Transformationen der verschiedenen Naturkräfte, also z. B. der Uebergang von mechanischer Kraft in Wärme, dieser in Volumänderung, in die Gleichung eingehen. Da diese Transformationen nach festen quantitativen Verhältnissen stattfinden, so lässt sich auch hier jede Causalität in die Form einer Gleichung bringen. Solche Transformationsgleichungen sind wieder in zwei Formen möglich. Die erste entspricht den Kraftgleichungen, indem bei ihr ein unmittelbarer Uebergang bestimmter Naturkräfte in andere, unter der Voraussetzung, dass dieser Uebergang in äquivalenten Verhältnissen geschieht, in einer Gleichung ausgedrückt wird. Die zweite Form hat die Bedeutung einer Zustandsgleichung, indem zwei äquivalente Glieder eines Umwandlungsprocesses, die in eine causale Beziehung gebracht werden können, in einer Gleichung verbunden werden. Wenn man z. B. den Uebergang einer einem Körper zugeführten unendlich kleinen Wärmemenge $dQ$ in lebendige Kraft der Molecularbewegungen $dW$, Veränderung der Mittellagen

der kleinsten Theilchen $dJ$ und Aenderung des Gesammtvolums $dL$ ausdrückt durch die ideale Gleichung

$$dQ = A\,(dW + dJ + dL),$$

so ist dies eine unmittelbare Transformationsgleichung*). Wenn dagegen die Wärmetheorie die Beziehung zwischen Druckänderung und Temperaturänderung eines Gases beim Ausströmen aus einem Behälter in einen andern, der mit gleichem Gas von geringerer Spannung gefüllt ist, unter der Voraussetzung constant bleibenden Drucks darstellt durch die Gleichung

$$\frac{T_x}{T_1} = \left(\frac{P_x}{P_1}\right)^{\frac{k-1}{k}} \text{**)},$$

worin $T_1$ die absolute Anfangs- und $T_x$ die absolute Endtemperatur, $P_1$ den Anfangs- und $P_x$ den Enddruck, $k$ aber eine von der Natur des Gases abhängige Constante bedeutet, so hat dieselbe den Charakter einer Zustandsgleichung. Die auf der rechten Seite stehende Function der relativen Druckänderung wird dabei als Ursache der relativen Temperaturänderung gedacht. Aber durch welche Bedingungen die Druckänderung herbeigeführt worden ist, und mit welcher Geschwindigkeit das Gas aus dem einen in das andere unter niedrigerem Druck stehende Gefäss ausströmte, bleibt völlig dahingestellt. Von dem oben angeführten Beispiel einer mechanischen Zustandsgleichung $\left(ph = \frac{mv^2}{2}\right)$ unterscheidet sich das vorliegende übrigens dadurch, dass die beiden Zustandsänderungen des Drucks und der Temperatur während des ganzen Vorgangs an einander gebunden sind. Demnach besteht überhaupt nicht in dem zeitlichen Verhältniss der causal verknüpften Zustände, sondern in der Abstraction von nebenbei vorauszusetzenden weiteren causalen Bedingungen, die auf das quantitative Verhältniss der herausgegriffenen Functionen ohne Einfluss bleiben, das Wesen der Zustandsgleichungen. Gerade diese Abstraction begründet aber die grosse Brauchbarkeit derselben, da sie in unzähligen Fällen causale Verknüpfungen gestatten, wo diese, wenn es sich um eine Aufstellung vollständiger Kraft- und Transformationsgleichungen handelte, unausführbar sein würden. Solcher Zustandsgleichungen sind nun, den beiden obigen Beispielen entsprechend, zwei typische Formen möglich: bei der ersten werden zeitlich von

*) Zeuner, Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie. 2. Aufl., S. 25.
**) Ebend. S. 175.

einander entfernte Zustände, die durch irgend welche nicht berücksichtigte Zwischenprocesse in einander übergeführt worden sind, causal verknüpft; die zweite Form bezieht sich auf zwei sich begleitende Veränderungen, von denen die eine als die Ursache der andern betrachtet werden kann, bei denen aber von den den Eintritt dieser correlativen Vorgänge erzeugenden sowie von den den zeitlichen Verlauf bestimmenden Momenten völlig abstrahirt wird. Auf diese Weise hat in diesen beiden Fällen, die bei den physikalischen Untersuchungen über den Energiewechsel eine grosse Rolle spielen, der Factor der Zeit keine massgebende Bedeutung, während derselbe bei den fundamentalen Causalgleichungen der Mechanik, den eigentlichen Kraftgleichungen, sehr wesentlich ist.

Insofern jedoch diese Abstraction von der Zeit bei den Energiegleichungen nur dadurch zu Stande kommt, dass bei ihnen überhaupt causale Momente ausser Betracht bleiben, stehen alle diese Causalverknüpfungen unter der Voraussetzung, dass, wenn die nicht berücksichtigten Glieder hinzugefügt würden, der Verlauf der Vorgänge auch zeitlich vollständig bestimmt wäre. Es würden dann aber alle Energiegleichungen, insbesondere also alle Zustandsgleichungen, theils in Kraftgleichungen, theils in solche Transformationsgleichungen übergeführt sein, in welchen nicht bloss alle intercurrirenden Nebenvorgänge berücksichtigt sondern insbesondere auch die Umwandlungen der Energie in Bezug auf ihren zeitlichen Verlauf bestimmt wären. Die mechanische Naturansicht fügt hierzu noch die weitere Voraussetzung, dass auch die übrig bleibenden vollständigen Transformationsgleichungen principiell in Kraftgleichungen umgewandelt werden können, sobald die den verschiedenen Energieformen, Wärme, Licht, Elektricität u. s. w., entsprechenden Bewegungsformen bestimmt sind. Da eine solche Bestimmung aber nur durch hypothetische Annahmen über die jenen Energien zukommenden Bewegungsvorgänge möglich ist, so ist diese letzte Ueberführung in Kraftgleichungen immer nur durch Hülfshypothesen zu erreichen. In diesem Sinne interpretirt z. B. die mechanische Wärmetheorie in den obigen Transformationsgleichungen die Grössen $dQ$, sowie $T_x$ und $T_1$ selbst als mechanische Energien, so dass die Gleichungen, da die auf der rechten Seite derselben angegebenen Werthe an und für sich schon eine mechanische Bedeutung besitzen, vollständig in Causalgleichungen zwischen verschiedenen Formen mechanischer Energie übergehen: solche müssten sich aber schliesslich immer in Kraftgleichungen nach dem Muster der Fundamentalformeln

Lagranges umwandeln lassen. Dennoch ist dies theils wegen unserer Unkenntniss der Molecularvorgänge theils wegen der Schwierigkeiten ihrer mechanischen Behandlung bis jetzt nur in seltenen Fällen möglich, und es bleibt daher jener letzte Schritt vorläufig ein bloss regulatives Postulat, das überdies, auch wenn es einmal theoretisch durchführbar sein sollte, wahrscheinlich aus praktischen Gründen, wegen der einfacheren Betrachtung und um bei der blossen Feststellung empirischer Zusammenhänge Hypothesen zu vermeiden, niemals durchgängig zur Anwendung kommen wird.

In der Voraussetzung der mechanischen Naturlehre, dass alle Naturvorgänge auf mechanische Bewegungen, alle Causalgleichungen daher schliesslich auf Kraftgleichungen zurückführbar seien, liegt nun ein für die Naturforschung ausnehmend wichtiges Postulat eingeschlossen: das Postulat der geschlossenen Naturcausalität. Dasselbe sagt aus, dass Naturvorgänge immer nur in andern Naturvorgängen, nicht aber in irgend welchen ausserhalb des Zusammenhangs der Naturcausalität gelegenen Bedingungen ihre Ursachen haben können. Für die Naturwissenschaft selbst hat dieses Postulat zunächst eine regulative Bedeutung: es fordert auf, jeden Naturzusammenhang auf Causalgleichungen zurückzuführen, in die lediglich genau analysirbare und auf die allgemeinen Naturgesetze zurückführbare Naturvorgänge als ihre Glieder eingehen. Eine weittragende Bedeutung empfängt aber dieses Postulat ausserdem für die Psychologie und die Geisteswissenschaften, weil sich aus ihm die Forderung ergibt, die Voraussetzungen über die geistige Causalität so zu gestalten, dass sie mit diesem Grundsatz der Naturwissenschaft nicht in Widerspruch gerathen. (Vgl. Abschn. IV, Cap. I.) Für das Mass der Sicherheit jenes von der heutigen Naturwissenschaft theils stillschweigend, theils ausdrücklich überall anerkannten Postulates ist es übrigens beachtenswerth, dass dasselbe zwar ursprünglich aus der mechanischen Naturansicht hervorgegangen ist, keineswegs aber mit der Nichtanerkennung der letzteren ebenfalls fallen würde. Vielmehr bleibt die Voraussetzung der geschlossenen Naturcausalität so lange eine nothwendige, als man überhaupt zugibt, dass die Erklärung aller Naturvorgänge, wenn sie endgültig zu leisten wäre, lediglich auf Kraft- und vollständige Transformationsgleichungen zurückführen müsste. Dagegen schliessen allerdings die Zustandsgleichungen an und für sich nicht die gleiche Forderung ein. Aber da das anerkanntermassen nur deshalb der Fall ist, weil bei ihnen von an sich nothwendigen Zwischengliedern der Causalverknüpfung

abstrahirt wird, so muss das Postulat der geschlossenen Naturcausalität auch noch dann als massgebend betrachtet werden, wenn man die mechanische Naturansicht als nicht zureichend erwiesen aufgeben sollte, so lange nur überhaupt ein Uebergang der verschiedenen Naturvorgänge in einander nach constanten äquivalenten Verhältnissen angenommen wird. Dem entspricht auch die Thatsache, dass es zwar Naturforscher gibt, welche die Wahrheit oder die Durchführbarkeit der mechanischen Naturansicht bezweifeln, dass es aber keinen geben dürfte, der nicht das Postulat der geschlossenen Naturcausalität als leitendes Princip seinen Untersuchungen zu Grunde legt.

## 4. Die allgemeinen Methoden und Hülfsmittel der Naturforschung.

### a. Allgemeiner Charakter der naturwissenschaftlichen Methoden.

Die allgemeinen Methoden der Naturforschung stimmen in allen wesentlichen Punkten überein mit den im ersten Abschnitte geschilderten Methoden der wissenschaftlichen Forschung überhaupt, zu deren Ausbildung jene hauptsächlich beigetragen haben. Die durch die specifische Beschaffenheit der Objecte bedingten Abweichungen aber gehören grossentheils den Einzelgebieten an und werden daher in den folgenden Capiteln zu erörtern sein. So bleibt uns hier nur übrig, auf einige allgemeine, in den gemeinsamen Merkmalen der Naturerscheinungen begründete Eigenthümlichkeiten der Untersuchung hinzuweisen.

Bei jeder Untersuchung unterscheiden wir von den Methoden selbst die Hülfsmittel, deren sich jene bedienen müssen. Während die Methode durchaus nur die logischen Verfahrungsweisen der Untersuchung umfasst, bezieht sich der Begriff eines Hülfsmittels auf die natürlichen oder künstlichen Werkzeuge und Operationen, die im Dienste der Methode Verwendung finden. Die Analyse und Synthese der Erscheinungen, die Induction und Deduction sind Methoden der naturwissenschaftlichen Forschung; die Beobachtung und das Experiment, die geometrische Construction und die mathematische Analysis sind Hülfsmittel derselben. Alle diese Hülfsmittel können innerhalb jeder der erwähnten Methoden zur Anwendung kommen, wenn auch die einen vorzugsweise für das inductive, die andern für

das deductive Stadium der Untersuchung verwerthet werden. So dienen Beobachtung und Experiment zumeist der Induction und Abstraction, aber sie sind anderseits für die Verification und Determination der auf deductivem Wege gefundenen Resultate unerlässlich; die mathematischen Verfahrungsweisen sind die hauptsächlichsten Werkzeuge der naturwissenschaftlichen Deduction, doch kann auch die inductive Methode der arithmetischen und geometrischen Hülfsoperationen nicht entbehren.

Der grosse Vorzug der Naturwissenschaften besteht vor allem in dem reichen Vorrath an Hülfsmitteln, über den sie verfügen. Diese Hülfsmittel haben auf die Methoden selbst zurückgewirkt, deren Ausbildung durch jene gefördert wurde. Das ursprüngliche und fortan für alle Naturforschung unerlässliche Hülfsmittel ist die einfache Sinneswahrnehmung. Mit ihr verbindet sich sodann die Anwendung mannigfacher künstlicher Werkzeuge, welche die physikalische Methodik zur Verfügung stellt, und deren Beschaffenheit sich nach den speciellen Untersuchungsgebieten richten muss. (Vgl. unten Cap. II, 2.) Die durch die Herbeiziehung dieser Hülfsmittel ermöglichte exacte Beobachtung kann nun in doppelter Weise die Erforschung eines Gegenstandes in Angriff nehmen: erstens indem sie in die Eigenschaften desselben oder in den Verlauf der untersuchten Vorgänge willkürlich verändernd eingreift, und zweitens indem sie eine möglichst grosse Anzahl übereinstimmender oder analoger Erscheinungen mit einander vergleicht. Auf diese Weise ergeben sich die experimentelle und die vergleichende Beobachtung als die zwei einander ergänzenden methodischen Hülfsmittel der Naturforschung. Beide sind nicht strenge von einander zu scheiden, sondern können sich in der verschiedensten Weise combiniren. Dennoch bringt es das Wesen der experimentellen Methode mit sich, dass sie sich in der Regel mit einer verhältnissmässig kleinen Zahl von Beobachtungen begnügen kann, während umgekehrt, sobald aus irgend welchen Gründen das Experiment unanwendbar ist, eine um so umfassendere Sammlung vergleichender Beobachtungen erfordert wird.

### b. Die experimentelle Methode.

Von der unmittelbaren, nur die natürlichen Sinneswerkzeuge benützenden Beobachtung geht alle Untersuchung der Naturerscheinungen aus. Sobald aber diese unsern willkürlichen Eingriffen zu-

gänglich sind, so verbindet sich die Beobachtung mit dem Experiment. Nachdem sich das letztere ausgebildet hat, wirkt es seinerseits zurück auf die Beobachtung, indem es derselben künstliche Werkzeuge zur Verfügung stellt. Erst durch die Verwendung jener technischen Hülfsmittel, die auf experimentellem Wege entstanden sind, wird die Beobachtung zur exacten Beobachtung. Wie daher das Experiment selbst nichts anderes als eine Beobachtung ist, die von willkürlichen Einwirkungen des Beobachters auf die Erscheinungen begleitet wird, so greifen auch im ganzen Verlauf der Untersuchung beide Hülfsmittel fortwährend in einander ein. Der Beobachter bedient sich der Werkzeuge, die aus experimentellen Untersuchungen hervorgegangen sind, und die auch in solchen Fällen, in denen das Experiment selbst unmöglich ist, wenigstens der Beobachtung eine grössere Sicherheit und Genauigkeit geben sollen. Fast jede bedeutendere Untersuchung fügt ausserdem zu diesem im Laufe der Zeiten allmählich gewaltig angewachsenen Inventar technischer Hülfsmittel neue hinzu, welche die Genauigkeit der Beobachtung unter neuen Bedingungen sicherstellen oder neue Formen experimenteller Einwirkung möglich machen.

Alle Beobachtung ist ursprünglich von zufälligen Wahrnehmungen ausgegangen. Soll sich die Wahrnehmung zur Beobachtung erheben, so muss die wahrgenommene Erscheinung aus irgend einem Grunde unser Interesse erregen. Letzteres ist aber nur dann vorhanden, wenn sich die Aufmerksamkeit auf die Erscheinung mit der Frage nach der Art ihres Eintritts, nach ihrem Verlauf, nach ihrer Beziehung zu andern Vorgängen verbindet. Wer Blitzschlag und Donner hört, hat ein Gewitter wahrgenommen. Wer es beobachten will, wird auf die Form und die räumliche Ausbreitung des Blitzstrahls, die Zeit, die zwischen ihm und dem Eintritt des Donners verfliesst, die Häufigkeit der Blitze, die begleitende Wolkenbildung und ähnliches achten. Mit der Beobachtung beginnt daher schon jene Fragestellung an die Natur, in der alle Untersuchung der Naturerscheinungen ihre Quelle hat. Die Beobachtung fordert den höchsten Grad activer Aufmerksamkeit, denn sie will nicht nur die Erscheinung selbst in allen ihren Stadien, sondern auch ihre etwaigen Begleiterscheinungen wahrnehmen. Damit ihr von diesem ganzen Verlauf nichts entgehe, bereitet sich wo möglich, ehe ein Ereigniss eintritt, die Aufmerksamkeit auf dasselbe vor. Darin liegt schon für die fernere Beobachtung ein Impuls, um, wenn es irgend geschehen kann, zum Experimente fortzuschreiten; denn

in dem Experiment beherrschen wir in der Regel den Eintritt der Erscheinungen und können ihn daher nun leicht gerade in den Augenblick verlegen, wo unsere Aufmerksamkeit am besten vorbereitet ist. Fällt aus irgend einem Grunde, etwa weil es sich um ein unerwartetes Ereigniss handelt, jene vorläufige Richtung der Aufmerksamkeit hinweg, so leidet darunter stets die Genauigkeit der Beobachtung, und zwar wird nicht bloss die Bestimmung des Eintritts der Erscheinung, sondern meist auch die Verfolgung des weiteren Verlaufs derselben unsicherer, da die Aufmerksamkeit eine gewisse Zeit braucht, um sich zu sammeln.

Jeder Beobachtung liegt die Frage nach dem Wie der Erscheinungen zu Grunde. Das Ziel der Beobachtung als solcher ist erreicht, wenn sich die Erscheinung in Bezug auf ihren Verlauf und auf die ihn begleitenden Umstände aufs genaueste beschreiben lässt. Das Experiment sucht nun zunächst, indem es den Eintritt der Erscheinungen beherrscht, die Sicherheit der Beobachtung zu vergrössern; vor allem aber schreitet dasselbe, indem es die Bedingungen des Geschehens selber verändert, zu der Frage nach dem Warum der Erscheinungen fort. Nur in seltenen Fällen, unter der Voraussetzung theils einer zureichenden Einfachheit der Vorgänge, theils einer in der Natur von selbst sich darbietenden Variation der Bedingungen, vermag die Beobachtung ohne die Hülfe des Experimentes dieser zweiten Frage näher zu treten. Die Astronomie bietet das hauptsächlichste Beispiel dieser Art dar. Aber auch sie würde wahrscheinlich niemals ihr descriptives Stadium verlassen haben, wären ihr nicht die experimentellen Untersuchungen im Gebiete der irdischen Gravitation zu Hülfe gekommen. Die Kepler'schen Gesetze, in denen alles enthalten ist, was die astronomische Beobachtung der Gravitationstheorie entgegenbrachte, besitzen einen rein beschreibenden Charakter. Das Mittel, durch welches das Experiment jener Frage nach dem Warum näher tritt, besteht in der Isolirung und Variirung der Umstände. Unter ihnen ist es namentlich die erstere, die durch die blosse Beobachtung niemals erreicht werden kann; denn es ist ein kaum zu erwartender und darum nie mit der erforderlichen Regelmässigkeit eintretender Zufall, dass zwei Ereignisse nur in einer unter den zahllosen Bedingungen, die ihren Eintritt begleiten, verschieden sind. Anderseits führt aber die Isolirung der Umstände nothwendig von der blossen Beschreibung der Thatsachen zu der causalen Auffassung derselben. Denn sobald die isolirte Veränderung eines Umstandes regelmässig bestimmte Ver-

änderungen in dem Ablauf der Ereignisse nach sich zieht, so sehen wir uns durch das logische Princip von Grund und Folge genöthigt, jener isolirten Veränderung einen causalen Werth beizulegen. In Wahrheit ist jedoch nicht die causale Betrachtung aus dem experimentellen Verfahren hervorgegangen, sondern sie hat umgekehrt mit Nothwendigkeit zu jener willkürlichen Isolirung und Variirung der Umstände geführt, in denen das Wesen des Experimentes besteht.

Die Umstände einer Erscheinung werden uns nun stets durch die Beobachtung gegeben. Sie bestehen aus allen den Thatsachen der Beobachtung, welche den Eintritt und Verlauf der Erscheinung begleiten. Der Umstand unterscheidet sich von der Bedingung dadurch, dass die letztere in einer causalen Beziehung zu der untersuchten Erscheinung steht, während solches bei dem Umstande vorläufig dahingestellt bleibt. Es ist gerade die Aufgabe des Experimentes, nachzuweisen, ob und inwiefern irgend ein das beobachtete Ereigniss begleitender Umstand eine Bedingung desselben sei oder nicht. Indem die Umstände isolirt und variirt werden, erweisen sie sich zum Theil als gleichgültig, zum Theil als wesentlich für den Eintritt eines Ereignisses, und durch die weitere Anwendung jener Verfahrungsweisen wird dann die specielle Beziehung ermittelt, in der die einzelnen Umstände zu den verschiedenen Bestandtheilen einer Erscheinung stehen. Hier sind es die früher erörterten allgemeinen Regeln der inductiven Methode, welche dem Experimente den Weg zeigen. (Abschnitt I, S. 25 ff.)

Eine gewisse Einschränkung erfährt die experimentelle Methode nothwendig dadurch, dass ihr nur die Gegenstände unserer Umgebung unmittelbar zugänglich sind. Gleichwohl überschreitet sie gelegentlich diese Grenzen, indem sie, statt die untersuchten Erscheinungen selbst, andere, die ihnen ähnlich oder künstlich nachgebildet sind, willkürlichen Einwirkungen aussetzt. So bildet man bei dem Plateau'schen Versuch die Bedingungen, unter denen muthmasslich die Abplattungen der Planeten nebst dem Ringsystem des Saturn entstanden sind, künstlich nach, indem man eine Oelkugel in einem Gemisch gleicher specifischer Schwere durch Drehung einer Kurbel in schnelle Rotation versetzt*). G. Bischof zeigte durch Schmelzen einer Basaltkugel, deren Temperaturverhältnisse er mehrere Stunden nach dem Gusse untersuchte, dass das Gesetz, nach welchem die Temperatur des Erdinnern mit der Tiefe zunimmt, der Annahme

---

*) Plateau, Poggendorffs Annalen, Ergänzungsband II, 1848. S. 249.

eines dereinst feuerflüssigen Zustandes entspricht*). Durch spektroskopische Versuche mit bekannten irdischen Körpern sucht man über die physische Constitution der Gestirne Aufschluss zu gewinnen, oder durch chemische Versuche im kleinen unter Anwendung physikalischer Hülfsmittel, wie höherer Druck- und Temperaturgrade, die Bedingungen für die einstige Bildung gewisser Gesteine zu ermitteln**), u. s. w. Diese indirecten Experimente im Gebiet der Astrophysik und Geologie sind natürlich von um so grösserem Werthe, je mehr es gelingt, die Bedingungen des Versuchs denjenigen der wirklichen Erscheinungen ähnlich zu machen. Aber da dies niemals vollständig möglich ist, weil wir in unsern Laboratorien über die Massen und Kraftgrössen, die bei den zu erklärenden Erscheinungen vorkommen, nicht verfügen können, so sind die Ergebnisse immer bis zu einem gewissen Grade hypothetisch. Sie bleiben dies namentlich dann, wenn solche indirecte Versuche unmittelbar zur inductiven Erforschung gewisser Naturerscheinungen verwendet werden, wie z. B. bei der Untersuchung der physischen Constitution der Gestirne oder der geologischen Bedingungen bei der Entstehung von Mineralien. Günstiger ist es, wenn das indirecte Experiment, im Dienste der Deduction stehend, bloss zur Bestätigung von Ergebnissen dient, die aus anderweitigen Voraussetzungen abgeleitet sind, wie bei den Versuchen von Plateau und Bischof. Dagegen besitzt es in diesen Fällen insofern einen geringeren Werth, als die Sätze, die es bestätigt, häufig schon ohnehin eine zureichende Sicherheit besitzen, so dass es sich manchmal sogar, wie bei dem Plateau'schen Experiment, mehr um eine sinnreiche Veranschaulichung als um einen wirklichen Beweis handelt. In Folge dieses geringen Werthes indirecter Experimente wird in allen den Gebieten, in denen sie vorkommen, eine ungleich grössere Betheiligung der comparativen Methode erforderlich als in den eigentlichen Experimentalgebieten. So sind insbesondere die Astrophysik, Geologie und Meteorologie zunächst vergleichende Beobachtungswissenschaften, die nur für gewisse Fundamentalfragen die experimentelle Methode in ihrer indirecten Anwendung zur Ergänzung herbeiziehen. Zugleich gehört dabei stets das experimentelle Verfahren selbst andern Gebieten, nämlich der Physik oder Chemie, an und wird daher in seiner Durchführung von den hier gültigen Principien geleitet; immerhin gewinnt es durch die

---

*) Naumann, Lehrbuch der Geognosie, 2. Aufl., I, S. 54 f.

**) A. Daubrée, Experimentalgeologie. Deutsche Ausgabe, S. 12 ff.

besonderen Probleme jener vergleichenden Wissenschaften einen eigenartigen Charakter. Die isolirende Abstraction, die in den grundlegenden Disciplinen vorwaltet, wird hier wieder aufgehoben, indem man untersucht, wie sich unter bestimmten complexen, von mehreren Naturkräften gleichzeitig abhängigen Bedingungen bestimmte Einzelerscheinungen verhalten. Trotz der aushülfsweisen Anwendung der hierbei vorkommenden Experimente bilden diese übrigens einen charakteristischen Bestandtheil der oben genannten vergleichenden Wissenschaften; denn sie legen ein sehr beredtes Zeugniss dafür ab, dass die Aufwerfung bestimmter Causalprobleme mit unwiderstehlicher Gewalt zur Anwendung der experimentellen Methode drängt, daher diese in solchen Fällen selbst da sich Anerkennung verschafft, wo ihrer unmittelbaren Anwendung unwiderstehliche Hindernisse im Wege stehen.

### c. Die vergleichende Methode.

Jede Beobachtung, die darauf ausgeht die Naturerscheinungen in ihrem Zusammenhange aufzufassen, bedarf der Vergleichung, der Verbindung des Aehnlichen und der Unterscheidung des Widerstreitenden, wie es überall schon den einfachen Methoden der Analyse und Synthese, der Abstraction und Determination zu Grunde liegt. In diesem Sinne ist die Vergleichung ein unerlässlicher Bestandtheil auch des experimentellen Verfahrens. Dagegen reden wir von einer Anwendung der vergleichenden Methode nur da, wo die Vergleichung zum logischen Princip der Methode wird. Wie also der Schwerpunkt des Experimentes in der willkürlichen Abänderung der Erscheinungen liegt, so besteht das Wesen des vergleichenden Verfahrens darin, dass die vergleichende Beobachtung, die Sammlung übereinstimmender Erscheinungen und die Abstufung der nicht übereinstimmenden nach den Graden ihres Unterschieds, zur Gewinnung allgemeiner Ergebnisse benützt wird. Auf diese Weise angewandt ergänzt die vergleichende Methode die experimentelle in doppelter Hinsicht: erstens ist jene bei allen den Gegenständen anwendbar, welche dieser unzugänglich sind, und zweitens dient überall da, wo eine Verbindung beider möglich ist, die vergleichende Beobachtung zur Ausfüllung der Lücken des experimentellen Verfahrens. Beide zusammen erschöpfen aber die allgemeinen Formen naturwissenschaftlicher Methodik. Willkürliche Veränderung der Erscheinungen und vergleichende Beobachtung derselben in den Verhältnissen, in

denen sie unmittelbar uns gegeben sind, bilden zusammen die einzig möglichen Hülfsmittel einer wissenschaftlichen Bearbeitung der Natur.

Da die experimentelle Methode in ungleich höherem Grade geeignet ist, die causalen Bedingungen der Erscheinungen zu erforschen, so steht sie überall, wo sie überhaupt anwendbar ist, in erster Linie. Ihr aber tritt die vergleichende Methode in doppelter Weise ergänzend zur Seite: erstens indem sie die Probleme für die experimentelle Behandlung vorbereitet, durch die Sammlung einer genügenden Anzahl zusammengehöriger exacter Beobachtungen; und zweitens indem sie die experimentellen Resultate ergänzt durch die Anwendung derselben auf eine grosse Anzahl einzelner der Beobachtung gegebener Erscheinungen. So hat die Astronomie von ihren frühesten Anfängen an bis auf Kepler die vergleichende Methode in bloss vorbereitender Weise benützt. Noch die Kepler'schen Gesetze, mit denen diese Periode abschliesst, bestehen nur in Verallgemeinerungen der durch die Vergleichung erzielten Ergebnisse. Das zweite Stadium beginnt mit Newtons Gravitationstheorie, die eine causale Interpretation der Kepler'schen Gesetze an der Hand der Fallversuche Galileis gibt. Seitdem dient die vergleichende Methode zur Vervollständigung und feineren Ausarbeitung der auf die Gravitationstheorie gegründeten Mechanik des Himmels. Die Astronomie bildet zugleich für diese letztere Form der Anwendung ein besonders günstiges Beispiel, weil sie die einzige Wissenschaft ist, in welcher, obgleich sie ein directes Experiment nicht zulässt, dennoch die Resultate der Vergleichung einen experimentellen Werth gewinnen. Diese günstige Lage verdankt die Astronomie zwei Umständen: der relativ grossen Einfachheit der Erscheinungen und der Existenz des Mondes. Wäre unserer Erde nicht dieser fortwährend gegen sie fallende Trabant beigegeben, der sich unmittelbar mit den zu irdischen Fallversuchen verwendeten Körpern vergleichen lässt, so würde die Gravitationstheorie für immer eine unverificirbare Hypothese geblieben sein. In der That fehlt in den meisten andern Fällen, wo die Wissenschaft auf die vergleichende Methode angewiesen ist, diese unmittelbare Bestätigung; doch kann auch dann bald mittelst der Anwendung bekannter physikalischer Thatsachen, bald durch indirecte Experimente, bald auch durch die blosse Benützung der Vergleichungsresultate zur Hypothesenbildung eine theoretische Anschauung gewonnen werden, die einen ähnlichen Umschwung in der Benützung der comparativen Methode herbeiführt. So ist Dove zu seinem Drehungsgesetz der Winde zunächst bloss

durch statistische Beobachtungen geführt worden; er hat es dann aber durch die rein theoretische Erwägung der Wechselwirkungen zwischen der Erdrotation und den durch Temperaturdifferenzen verursachten Luftströmungen in ein meteorologisches Grundgesetz umgewandelt, welches nun wieder umgekehrt die Beurtheilung der Windbeobachtungen leitet. So ist ferner Kirchhoff bei seiner Theorie des Sonnenspektrums von den seit Fraunhofer vielfach ausgeführten Beobachtungen über die dunkeln Linien ausgegangen, mit denen er experimentelle Untersuchungen über die Spektra irdischer Elemente verband; hierauf ist aber die vergleichende Beobachtung des Sonnenspektrums wiederum von dieser Theorie geleitet worden. Dagegen hat Darwins Theorie der organischen Entwicklung auf keinerlei allgemeingültige Gesetze oder indirecte Experimente von entscheidender Bedeutung sich stützen können, sondern sie war genöthigt ausschliesslich auf die Resultate der comparativen Methode selbst eine Hypothese zu bauen, die sie dann den weiteren vergleichenden Untersuchungen zu Grunde legte. Deshalb ist nun aber auch die so entstandene Theorie selbstverständlich dem Angriffe ausgesetzt, und es fehlt namentlich an den geeigneten Hülfsmitteln zur Bestätigung und Widerlegung der speciellen Voraussetzungen, die in sie eingehen. Unter solchen Umständen ist es begreiflich, wenn manche Forscher es vorziehen, vorläufig überhaupt auf eine theoretische Verwerthung der durch die Vergleichung festgestellten Thatsachen zu verzichten. Es entsteht dann eine rein beschreibende Form der Wissenschaft, wie sie überall der Erklärung voranging, namentlich aber auf solchen Gebieten längere Zeit bestehen blieb, denen die Hülfe des Experimentes gänzlich versagt ist.

In beiden oben geschilderten Stadien der vergleichenden Methode, die durch das Auftreten einer bestimmten, meist auf experimentellem Wege vermittelten theoretischen Anschauung sich scheiden, ist zwar die Verwerthung der Ergebnisse eine abweichende; der logische Charakter der Methode selbst bleibt aber der nämliche. Er besteht im allgemeinen überall in der oben schon hervorgehobenen Sammlung übereinstimmender Erscheinungen und in der Abstufung der nicht übereinstimmenden nach den Graden ihres Unterschieds. In dieser Beziehung stimmen die Vorschriften, die Baco in seinem neuen Organon für die naturwissenschaftliche Forschung überhaupt aufstellt, am meisten mit dem Bild der vergleichenden Methode überein. Denn die Thatsache, dass jede Vergleichung aus der Verbindung des Uebereinstimmenden und der Trennung des Verschiedenen

besteht, findet in Bacos Tafeln der positiven und negativen Instanzen ihren Ausdruck. Freilich aber wird die Vergleichung von vornherein allzu sehr von bestimmten allgemeinen, durch vorangegangene Analyse und Abstraction entstandenen Gesichtspunkten geleitet, als dass übereinstimmende und unterscheidende Beobachtungen in der Baconischen Weise systematisch sich trennen liessen; und die weiteren Vorschriften, die Baco in seinen Tafeln der Grade und prärogativen Instanzen zusammenstellt, enthalten ein buntes Gemisch von Gesichtspunkten, die theils unter die comparative theils unter die experimentelle Methode gehören. Vollends verschoben wurde das Verhältniss dieser beiden Methoden durch diejenigen neueren Logiker, die nach Baconischem Vorbild Regeln des experimentellen Verfahrens aufzustellen suchten und dazu nun vorzugsweise die Instanzen der Uebereinstimmung und Unterscheidung benützten. Es konnte nicht fehlen, dass darüber die charakteristischen Eigenthümlichkeiten des experimentellen Verfahrens, wie sie besonders in der physikalischen Induction zur Ausbildung gelangt sind, völlig verloren gingen. (Vgl. unten Cap. II.) Aber auch die comparative Methode wird durch die Baconischen Regeln in unzureichender Weise bestimmt. Weit bedeutsamere Anwendungsformen als in der Uebereinstimmung und Unterscheidung, die überall sich begleitende Denkacte und eben darum nicht besondere Methoden sind, begegnen uns in den Formen der individuellen und der generischen Vergleichung. Beide schliessen zum Theil an die Arten der Abstraction, die isolirende und die generalisirende, sich an, und beide stehen zu einander in einem ähnlichen Verhältniss wie diese: die individuelle muss überall der generischen Vergleichung vorausgehen, aber sie besitzt ausserdem eine selbständige Bedeutung.

Die individuelle Vergleichung sammelt nämlich die Beobachtungen, die irgend ein einzelner Gegenstand oder eine einzelne Naturerscheinung in Bezug auf sämmtliche coëxistirende Bestandtheile und einander folgende Zustände darbietet, um so ein vollständiges Gesammtbild des Beobachtungsobjectes zu gewinnen. Analyse und Synthese, Isolation und Colligation kommen hierbei als logische Hülfsmethoden zur Anwendung. Die generische Vergleichung dagegen verwerthet Beobachtungen, die von verschiedenen, jedoch zusammengehörigen Gegenständen oder Erscheinungen gewonnen sind, und ordnet dieselben nach den mit einander verwandten Erscheinungsgebieten. Ihr Zweck ist, auf diesem Wege ein vollständiges Bild der mannigfachen Gestaltungen zu gewinnen, in denen

eine Theilerscheinung oder ein einzelnes Merkmal eines Objectes auftreten kann, und von den begleitenden Umständen Rechenschaft zu geben, unter denen solche Variationen vorkommen. Neben der Analyse und Synthese, der Isolation und Colligation werden hier noch die Generalisation und Specification als elementare Methoden herbeigezogen, und häufiger als bei der individuellen Vergleichung befähigt die Prüfung der Beobachtungen zur Ausführung mehr oder minder umfassender Inductionen. Demnach dient die individuelle Vergleichung mehr der reinen Beschreibung, und sie gehört dem vorbereitenden Stadium der Untersuchung an; die generische Vergleichung kann zwar ebenfalls noch auf dem descriptiven Standpunkte verbleiben, es liegt aber in ihr stets die Tendenz, denselben zu überschreiten und zum Versuch einer causalen Erklärung der Erscheinungen zu gelangen, worauf dann in der Anwendung der comparativen Methode der oben (S. 340) bezeichnete Wendepunkt eintritt.

In Folge dieser Beziehung der beiden Formen der Vergleichung zu den logischen Functionen der Beschreibung und Erklärung bilden nun aber beide nicht bloss auf einander folgende Stadien einer und derselben Methode, sondern es kann auch zu bestimmten wissenschaftlichen Zwecken die eine oder die andere bevorzugt werden, ohne dass dabei freilich jemals eine vollständige Trennung durchführbar ist. Es sind besonders die so genannten descriptiven oder systematischen Naturwissenschaften, in denen die individuelle Vergleichung überwiegt, während die generische bloss insoweit herbeigezogen wird, als es zu den Zwecken der Classification erforderlich ist. Dennoch zeigt es sich gerade hier, dass die blosse Beschreibung das wissenschaftliche Bedürfniss nicht auf die Dauer befriedigt. Im Zusammenhange mit der früher (Abschnitt I, S. 47 ff.) geschilderten Entwicklung der Systematik, welche an die Stelle der descriptiven genetische Classificationen treten liess, sind daher den auf dem Boden der individuellen Vergleichung stehenden Wissenschaftsgebieten andere zur Seite getreten, in denen die generische Vergleichung vorherrscht. So haben sich neben der Zoologie und Zootomie die vergleichende Anatomie, neben der Botanik die allgemeine Morphologie der Pflanzen, neben der Mineralogie die Geognosie erhoben. Das jüngere Alter der an zweiter Stelle genannten Disciplinen zeigt, wie selbst in der allgemeinen Entwicklung der Wissenschaft die generische der individuellen Vergleichung nachfolgt. Zugleich ist aber überall zu bemerken, dass es sich immer nur um ein Uebergewicht der einen oder andern Methode handeln kann,

da beide auf das innigste in einander eingreifen. So sucht die Zootomie von jeder Gattung oder Familie des Thierreichs ein vollständiges anatomisches Bild zu gewinnen, und sie beschränkt sich zu diesem Zweck nicht selten auf die Auswahl einer oder mehrerer charakteristischer Species, an denen sie die Untersuchung ausführt. Die vergleichende Anatomie dagegen verfolgt eine und dieselbe Organgruppe wo möglich durch das ganze Thierreich oder mindestens durch eine grössere Anzahl verwandter Thierclassen, um die verschiedenen Entwicklungsformen derselben nachzuweisen. Dort waltet also die individuelle, hier die generische Methode vor. Aber der Zootom kann offenbar bei der Anordnung der von ihm untersuchten Formen ebenso wenig der letzteren wie der vergleichende Anatom bei der Einzeluntersuchung, der er das Material für seine allgemeineren Vergleichungen entnimmt, der ersteren entbehren. Alles dies weist darauf hin, dass auch die Zwecke dieser Wissenschaften, die Beschreibung der Naturobjecte und die Erklärung ihrer Entstehung, höchstens vorübergehend von einander getrennt werden können.

### d. Naturbeschreibung und Naturerklärung.

Beschreibung und Erklärung sind zwei Functionen, die in keiner naturwissenschaftlichen Untersuchung und Darstellung entbehrt werden können. Es liesse sich ihnen, der dritten Grundform des Urtheils entsprechend, auch die Erzählung noch anschliessen. (Bd. I, S. 183.) Aber die in der Zeit verlaufenden Naturereignisse fordern, sobald sie sich unserer eigenen Beobachtung darbieten, unmittelbar eine causale Erklärung heraus; gehören sie dagegen einer entfernten Vergangenheit an, so lässt sich auf sie nur aus einer Reihe von Momenten zurückschliessen, die zunächst durch die Beschreibung festgehalten werden müssen. Mit Rücksicht auf diese letztere Verbindung sind daher lange Zeit die Namen Naturgeschichte und Naturbeschreibung in fast übereinstimmender Bedeutung gebraucht und der Naturerklärung gegenübergestellt worden.

Ohne Zweifel wird nun auch diese Trennung eine gewisse praktische Bedeutung bewahren, da es fortan Gebiete der Naturwissenschaft geben wird, in denen, wie z. B. in der Geographie, in der systematischen Mineralogie, Botanik und Zoologie, die Function der Beschreibung vorherrscht. Aber als eine principielle Unterscheidung ist jene Trennung nicht aufrecht zu erhalten. Jede Natur-

wissenschaft hat schliesslich die Aufgabe der Erklärung, und keine kann hierbei der Hülfe der Beschreibung entbehren. Theils dient diese als Vorbereitung für die causale Interpretation der Erscheinungen, theils sucht sie auf Grund einer solchen die Erkenntniss der einzelnen Naturobjecte zu vermitteln. In diesem Sinne bestehen insbesondere die systematischen Naturwissenschaften, sobald sie die Stufe der genetischen Classification erreicht haben, lediglich in Anwendungen der ihnen entsprechenden erklärenden Zweige der Naturlehre auf die Einzelerscheinungen, und sie suchen aus diesen das Material zu vervollständigen, mittelst dessen eine Einsicht in die Entstehung der Objecte ermöglicht wird. Treffend weist der Name „Naturgeschichte" auf diese Aufgabe der systematischen Naturwissenschaften hin: sie sollen nicht bloss über die Fülle der Naturgegenstände einen Ueberblick verschaffen, sondern über deren Entstehungs- und Entwicklungsbedingungen Rechenschaft geben, und die Principien der Systematik sollen daher zugleich Erklärungsgründe der Objecte selbst sein.

Im Gegensatze zu diesem in der Geschichte deutlich hervorgetretenen Streben, die Naturbeschreibung der Naturerklärung dienstbar zu machen, hat man nun zuweilen auch umgekehrt geglaubt, eine einheitliche Auffassung der wissenschaftlichen Aufgaben dadurch herbeiführen zu können, dass man diese überall auf die exacte Beschreibung der Erscheinungen beschränkte. Nicht bloss Auguste Comte suchte hierdurch jenen Verzicht auf alle über das Thatsächliche hinausgehende Voraussetzungen zu erreichen, den sein Positivismus verlangte, sondern innerhalb der exacten Wissenschaften selbst hat das Streben thunlichst exact zu sein ähnliche Anschauungen begünstigt. Schon der Mechanik wurde so die Aufgabe gestellt, „die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen vollständig und auf die einfachste Weise zu beschreiben" *). Trotzdem beginnt diese Darstellung der Mechanik nicht bloss mit dem mathematischen Punkt, der nirgends in der Natur vorkommt, sondern sie zerlegt auch sofort die Geschwindigkeit in drei Componenten nach den Richtungen des Raumes und führt den Begriff der bewegenden Kraft ein; sie operirt also, statt die Erscheinungen zu beschreiben, mit Abstractionen und Constructionen, von denen die letzteren bereits die allgemeinsten Bewegungsgesetze voraussetzen, und sie vermeidet nicht

*) Vgl. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik. Leipzig 1876. Vorl. I, S. 1.

einmal den logischen Hülfsbegriff der Naturerklärung, der einer rein descriptiven Auffassung der Dinge völlig fremd bleibt, den Kraftbegriff. Es scheint, dass hier, wie in andern Fällen, die skeptische Tendenz aus einer dunkeln Furcht vor metaphysischen Gespenstern entsprungen ist. Man meint, die Naturerklärung wolle irgend etwas Unsagbares, was in keiner Erfahrung entdeckt werden könne, entschleiern; und in Wahrheit bezweckt sie doch nichts anderes, als die regelmässigen Relationen festzustellen, die zwischen den Erscheinungen stattfinden, und zu deren Ausdruck sich der Causalbegriff als das einfachste Hülfsmittel darbietet. Nun lässt sich natürlich jede Relation von Erscheinungen auch in die Form einer Beschreibung bringen, wenn man dieser die Bemerkung beifügt, dass die beschriebene Relation eine ausnahmlos gültige sei. Aber dieser Zusatz selbst ist eben keine Beschreibung mehr, und das Wort Naturerklärung soll gar nichts anderes ausdrücken als die Feststellung der regelmässigen Beziehungen, welche sich durch die experimentelle und vergleichende Untersuchung zwischen den Objecten der Beschreibung ergeben. Da aber auf dem Streben, die gegebenen Thatsachen nach ihren wechselseitigen Beziehungen in einen logischen Zusammenhang zu bringen, alle Wissenschaft beruht, so ist auch die Naturwissenschaft nur insoweit eigentliche Wissenschaft, als sie bestrebt ist Naturerklärung zu sein.

Dieser Aufgabe kommt nun die Naturwissenschaft nach, indem sie die Hülfsmittel der Analyse und Synthese, der Induction und Deduction in den besonderen Modificationen anwendet, die durch den Charakter der Erscheinungen in den Hauptgebieten der Naturforschung gefordert werden. In dieser Beziehung sondern sich namentlich drei Gebiete von einander: die Physik, Chemie und Biologie. Die logische Methodenlehre kann sich auf die Betrachtung der Methoden, Hülfsmittel und leitenden Principien dieser drei Fundamentalwissenschaften beschränken, da in den specielleren Theilen der Naturerklärung keine wesentlich neuen Gesichtspunkte zur Geltung kommen. Hinsichtlich der systematischen Principien der Naturforschung aber darf hier auf die allgemeine Erörterung der Formen der systematischen Darstellung verwiesen werden.

## Zweites Capitel.

# Die Logik der Physik.

## 1. Die physikalischen Methoden.

### a. Die Analyse der Naturerscheinungen.

Die physikalische Untersuchung entspringt überall aus der Wahrnehmung bestimmter Naturerscheinungen. Sobald diese in ihrer eigenen Beschaffenheit oder in ihrem Zusammenhang mit andern Erscheinungen Eigenschaften darbieten, die zu irgend einer Fragestellung Anlass geben, so ist damit auch der erste Antrieb zu einer Zergliederung gegeben, welche die Absicht verfolgt, die zusammengesetzte Erscheinung auf ihre einfachen Bestandtheile zurückzuführen. Diesen allgemeinen Ausgangspunkten der physikalischen Forschung entsprechend können die nächsten Anlässe derselben doppelter Art sein. Entweder wird sie durch zufällige Wahrnehmungen oder durch Resultate, die verwandten Erfahrungen entnommen sind, angeregt und zugleich in ihrer Richtung bestimmt. Im ersten Fall pflegt auch die Untersuchung zunächst den Charakter des Zufälligen an sich zu tragen; sie wird, ehe sie selbst bereits zu Resultaten geführt hat, mehr durch ein instinctives Taktgefühl als durch einen bestimmten Plan geleitet. Im zweiten Fall ist dieser Plan, in seinen allgemeinsten Zügen wenigstens, durch die anderwärts gewonnenen Ergebnisse vorgezeichnet, und er ist darum auch um so bestimmter, je nähere Beziehungen die sich beeinflussenden Untersuchungsgebiete zu einander besitzen. Im Beginn der wissenschaftlichen Entwicklung ist natürlich die erste Entstehungsweise der Probleme vorherrschend. Mit der Ausbildung der physikalischen Forschung nehmen die Motive der zweiten Art immer mehr zu; doch hören jene zufälligen Anlässe niemals ganz auf: wo sie nicht mehr völlig neue Untersuchungsgebiete eröffnen können, da lassen sie wenigstens neue Gesichtspunkte und Methoden entstehen. Die durch den Luftzug bewegten Kronleuchter im Dom zu Pisa veranlassten, wie man erzählt, Galilei zuerst, über die Gesetze der Bewegung nachzudenken. Die Beobachtung, dass ein starker und ein schwacher Schall in der nämlichen Zeit in der Entfernung zu hören waren, brachte Gassendi auf den Gedanken, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalls in der Luft

zu messen. Auf das Phänomen der Beugung des Lichtes wurde Grimaldi durch die Wahrnehmung der Verbreiterung des Schattens und seiner farbigen Säume aufmerksam gemacht*). Zuweilen ist es auch nur eine specielle Problemstellung, die auf solche Weise angeregt wird. So berichten die Gebrüder Weber, dass ihre Untersuchungen über Wellenbewegung in Folge einer Beobachtung geplant wurden, die einer von ihnen machte, als er durch einen Papiertrichter Quecksilber goss und dabei die verwickelte, aber regelmässige Figur bemerkte, die der auslaufende Strahl auf der Quecksilberoberfläche verursachte**).

In einen gewissen Gegensatz zu diesen durch die nicht beabsichtigte Wahrnehmung entstandenen Ausgangspunkten der Untersuchung treten nun jene Fälle, wo die Thatsachen erst aufgesucht werden, an welche die weitere Analyse anknüpfen soll, und wo daher zur Vermuthung derselben irgend eine Voraussetzung geführt hat, die sich auf bereits gewonnene Resultate stützt. Dabei können freilich Voraussetzung wie Vermuthung die verschiedensten Grade der Klarheit und Bestimmtheit besitzen, so dass in manchen Fällen kaum ein Unterschied von der zufälligen Entdeckung zu bestehen scheint, während in andern eine präcise Voraussage von vornherein den Gang der Untersuchung regelt. So hat man häufig Oersteds Entdeckung der Wirkung des galvanischen Stromes auf die Magnetnadel als eine zufällige bezeichnet. Dennoch hat Oersted selbst gegen diese Behauptung protestirt, und gewiss mit Recht, obgleich die ihn leitenden naturphilosophischen Vermuthungen sehr vager Natur waren, und daher das Gelingen des Versuchs immerhin der Gunst des Zufalls bedurfte. Denn je unbestimmter eine Vermuthung ist, um so leichter wird natürlich die Aufsuchung der vermutheten Thatsache zu einem unsichern Umhertasten, welches dann in um so höherem Masse Geduld und Ausdauer von Seiten des Beobachters erfordert. In dieser Beziehung ist Faraday ein hervorragendes Beispiel glücklicher Begabung. Keine seiner Entdeckungen verdankt ihren Ursprung dem blinden Zufall. Aber die Voraussetzungen, von denen er ausging, waren meist sehr allgemeiner Art, und er gelangte daher oft erst nach manchen Misserfolgen zu einem günstigen Ergebniss. Seine Entdeckung der magnetoelektrischen Erscheinungen wurde durch den allgemeinen Gedanken geleitet, dass jeder Wirkung eine Gegen-

*) Fischer, Geschichte der Physik, I, S. 41 u. 471; II, S. 103.
**) Wellenlehre. Leipzig 1825. Vorrede S. VI.

wirkung entsprechen müsse. Da der Nachweis erbracht war, dass der elektrische Strom die Fähigkeit besitzt Eisen und andere des Magnetismus fähige Körper zu magnetisiren, so schloss er, dass umgekehrt auch der Magnet die Eigenschaft besitzen werde einen elektrischen Strom zu erregen, eine Vermuthung die das Experiment vollkommen bestätigte. Noch unbestimmter war der Anlass, dem er die Entdeckung der Wirkung des Magnetismus und galvanischer Ströme auf das polarisirte Licht verdankte. Da ihm die Versuche über elektrische Induction die Annahme wahrscheinlich machten, dass die elektrische und magnetische Fernwirkung, ähnlich der des Schalls und des Lichtes, auf der Fortpflanzung durch ein Medium beruhe, so vermuthete er, dass Elektricität und Magnetismus von Einfluss auf die Lichtbewegung sein würden. Erst als seine Versuche, das gewöhnliche Licht durch einen starken Elektromagnet zu verändern, erfolglos geblieben, nahm er polarisirtes Licht zu Hülfe, das er durch eine Flüssigkeit leitete, und so entdeckte er die magnetische Drehung der Polarisationsebene.

Weit planmässiger kann natürlich von Anfang an die Untersuchung verfahren, wenn aus irgend welchen Gründen sogleich eine präcise Fragestellung möglich ist, welche den Beobachtungen ihre Richtung anweist. Nachdem man längst die Schwingungsknoten tönender Saiten beobachtet und ausserdem bemerkt hatte, dass die Bewegungen leichter Körperchen auf schwingenden gespannten Membranen an verschiedenen Stellen mit sehr verschiedener Energie erfolgen, konnte die Entstehung der von Chladni entdeckten Klangfiguren im allgemeinen mit Sicherheit vorausgesagt werden, wenn auch die einzelnen Formen und Bedingungen dieser Erscheinung erst durch den Versuch festzustellen waren. Nicht minder war den Versuchen Mellonis über die Reflexion, Brechung und Beugung der Wärmestrahlen der Weg vorgezeichnet, da die Probleme durch die entsprechenden Gesetze der Fortpflanzung des Lichtes in vollkommen bestimmter Weise gegeben waren, so dass die Aufgabe hauptsächlich in der Erfindung der Apparate und Methoden bestand, mit deren Hülfe die Erscheinungen nachgewiesen und gemessen werden konnten.

Wie in den zwei letzten Beispielen von bestimmten Erfahrungen aus andere Erfahrungen, die mit jenen in naher Beziehung stehen, vorausgesagt wurden, so können sich aber auch aus rein theoretischen Betrachtungen Folgerungen ergeben, die auf noch unbekannte Thatsachen hinweisen, deren Bestätigung Aufgabe der Untersuchung wird. So folgerte W. R. Hamilton aus den Voraussetzungen der

Undulationstheorie des Lichtes die Thatsache der conischen Refraction durch zweiaxige Krystalle, und Lloyd gelang es sodann, die entsprechenden Erscheinungen am Arragonit experimentell aufzufinden*). Ohm hatte sein Grundgesetz der galvanischen Kette, wonach die Intensität des Stromes der durch die Verschiedenheit der Metalle bestimmten elektromotorischen Kraft direct und dem Strömungswiderstand umgekehrt proportional ist, zunächst als eine Hypothese aufgestellt. Diese Hypothese gab aber exacte Gesichtspunkte für die Untersuchung der Gesetze des Stromes an die Hand, eine Untersuchung, welche zur Bestätigung des Ohm'schen Gesetzes, zugleich aber zu einer genaueren Bestimmung der Begriffe von elektromotorischer Kraft und Widerstand geführt hat**). Eines der glänzendsten Beispiele dieser Art ist endlich Clerk Maxwells elektromagnetische Lichttheorie. Von den Beziehungen geleitet, die Faraday bereits zwischen Licht und Elektricität gefunden, entwickelte Maxwell mathematische Formeln, in denen die Bewegung der Elektricität als eine Wellenbewegung dargestellt war, deren Fortpflanzungsgeschwindigkeit derjenigen der Lichtwellen gleichkomme. Entsprachen diese Formeln der Wirklichkeit, so musste die Elektricität, gleich dem Lichte, die Erscheinungen der Reflexion, Interferenz, Brechung und Polarisation darbieten. Indem nun H. Hertz nachwies, dass diese Voraussetzung zutrifft, und indem er fand, dass die aus den Interferenzversuchen berechnete Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Wellen derjenigen der Lichtwellen hinreichend nahekommt, bestätigte er Maxwells Vermuthung***).

Wo die Untersuchung, wie in den zuletzt angeführten Beispielen, von der Folgerung aus andern Erfahrungen oder von bestimmten theoretischen Ergebnissen ausgeht, da ist von selbst auch die Fragestellung gegeben, die zur Aufsuchung der geeigneten Methode überführt. Wenn dagegen irgend eine zufällige Wahrnehmung oder eine unbestimmte Vermuthung die erste Anregung bietet, so sind stets verschiedene Fragestellungen möglich. Denn jede Naturerscheinung ist zunächst vieldeutiger Art. Sie tritt uns als Glied eines verwickelten Causalzusammenhanges entgegen. Ob die Umstände die sie begleiten causale Bedingungen sind, und wie diese

---

*) Poggendorffs Ann., Bd. 28, S. 91.

**) Fechner, Massbestimmungen über die galvanische Kette. Leipzig 1831.

***) Clerk Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism. Oxford 1873. H. Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft. Leipzig 1892. (Wiedemanns Ann. Bd. 31—41.)

Bedingungen unter einander zusammenhängen, zur Entscheidung dieser Fragen bedarf es vor allem der planmässigen Analyse der Erscheinungen.

Die einzelnen Fragen, deren Beantwortung diese Analyse vermitteln soll, können nun theils vor dem Beginn der Untersuchung entwickelt werden, theils kommen sie erst während ihres Verlaufs dem Beobachter zum Bewusstsein. Nach der Natur der auf einander folgenden Fragestellungen zerfällt aber die ganze Untersuchung wieder in zwei Stadien. Eine erste Reihe von Fragen bezieht sich auf die allgemeinen Bedingungen der beobachteten Erscheinung, eine zweite auf die specielleren Eigenschaften und causalen Beziehungen derselben. Das erste Stadium können wir als das der Voruntersuchung, das zweite als das der eigentlichen Untersuchung bezeichnen. Die Beschaffenheit der Aufgaben bringt es mit sich, dass die Voruntersuchung vorzugsweise qualitativer Art ist, während in die eigentliche Untersuchung quantitative Bestimmungen eingehen; doch ist dieses Kriterium nicht entscheidend, da auch schon in der Voruntersuchung zur Entscheidung einzelner Fragen Messungen erforderlich sein können. Aus den Resultaten der Voruntersuchung gewinnt die eigentliche Untersuchung die Gesichtspunkte für ihre Fragestellungen und für die Methoden und Hülfsmittel, deren sie sich zur Beantwortung derselben bedienen muss. Die praktische Vorprüfung dieser Methoden und Hülfsmittel pflegt daher ebenfalls noch, und meistens sogar vorzugsweise, der Voruntersuchung zugerechnet zu werden, obgleich sie schon den Uebergang zur definitiven Untersuchung bildet. Beide Stadien unterscheiden sich sehr augenfällig durch die Art der in ihnen herrschenden Fragestellungen. Auf die Fragen der Voruntersuchung wird ein Ja oder Nein als Antwort erwartet. Indem sie eine Reihe möglicher Bedingungen $A$, $B$, $C$ . . ., welche bei einer Erscheinung $X$ wirksam gedacht werden können, durchgeht, zerfällt sie in ebenso viele Einzeluntersuchungen, als solche Bedingungen in Erwägung gezogen werden. Fällt die Antwort verneinend aus, so hat die Voruntersuchung ohne weiteres zu einer ferneren Frage überzugehen. Ist sie bejahend, so bildet das Resultat einen Ausgangspunkt für die definitive Untersuchung. Diese kann nun, anknüpfend an die positiven Ergebnisse der Voruntersuchung, zunächst bestätigende Thatsachen aufsuchen, die jene Ergebnisse völlig sichern sollen. Hier bleibt das Verfahren noch ein ähnliches; der Unterschied besteht nur darin, dass jede Frage schon von einer bestimmten Anschauung über die

Natur der beobachteten Erscheinung geleitet, und dass daher eine bestimmte Antwort im voraus erwartet wird.

Nach dieser Verification der Ergebnisse der Voruntersuchung, welche den Beginn der eigentlichen Untersuchung bildet, wendet sich die letztere ihrer wichtigsten Aufgabe zu: der Ermittelung der quantitativen Eigenschaften der Erscheinungen. Während bis dahin das experimentelle Verfahren wesentlich in einer Variation der äusseren Umstände bestanden hatte, besteht es nunmehr in einer genauen Messung der einzelnen Elemente der Erscheinung unter den für ihre Herbeiführung günstigsten Bedingungen. Die Art der Fragestellung ist in diesem abschliessenden Theil der Analyse eine völlig andere. Sie geht nicht mehr auf ein Ja oder Nein, sondern auf die besondere Art oder den Grad des Eintritts der Erscheinung unter den gegebenen Bedingungen. Die Antwort ist daher stets eine bejahende, aber sie enthält zugleich die näheren qualitativen oder quantitativen Verhältnisse, auf deren Ermittelung speciell die Frage gerichtet war. Sind auf diese Weise alle wesentlichen Fragen erledigt, die sich auf die Beschaffenheit einer beobachteten Erscheinung beziehen, so werden dann in der Regel die Resultate unmittelbar oder in Verbindung mit den Ergebnissen anderer Analysen zur Ableitung eines allgemeinen Gesetzes verwerthet, welches die Erscheinung als speciellen Fall in sich enthält. Hiermit tritt die Analyse der Naturerscheinungen in den Dienst der physikalischen Induction. Ehe jedoch diese beginnt, pflegt das gewonnene Ergebniss durch eine Umkehrung des Untersuchungsweges einer nochmaligen Prüfung und Vervollständigung unterworfen zu werden, wenn nicht etwa dieses umgekehrte oder synthetische Verfahren schon gelegentlich in die Analyse der Erscheinungen eingegriffen hat. Bevor wir hierzu übergehen, sei der hier dargestellte Gang der analytischen Untersuchung an einem möglichst vollständigen Beispiele erläutert. Ich wähle hierzu Newtons Untersuchung der Farbenzerstreuung des Lichtes bei der Brechung im Prisma. Newton selbst hat zwar in der späteren Ausführung seiner Optik in Folge seiner Vorliebe für die synthetische Darstellung den wirklichen Gang der Analyse verdeckt; dieser lässt sich aber mit Hülfe der vorangegangenen einzelnen Arbeiten über den Gegenstand unschwer wiederherstellen*). Wenn bemerkt worden ist, dass die Optik das

*) Neben der Optik kommen hier in Betracht die Abhandlungen in den Philos. Transact. von 1672—1688. Die letzteren sind auszugsweise ins Deutsche

schwächste Product des Newton'schen Geistes sei*), so mag diesem Ausspruch hinsichtlich des bleibenden Erfolgs der Theorien eine gewisse Wahrheit zukommen; für die experimentelle Analyse verwickelter Erscheinungen aber ist sie noch heute ein mustergültiges Beispiel.

Die Entdeckung der Farbenzerstreuung hat aus einer zufälligen Wahrnehmung ihren Ursprung genommen. Das Farbenspiel eines dreiseitigen gläsernen Prismas beobachtend, gerieth Newton auf den Gedanken, dieses vor die Oeffnung eines Fensterladens zu halten, durch welchen das Sonnenlicht fiel. Zu seiner Ueberraschung bemerkte er, dass die an der gegenüberliegenden Wand des verdunkelten Zimmers erscheinenden Farben nicht ein der Gestalt der Ladenöffnung entsprechendes kreisrundes, sondern ein längliches Bild mit geraden Seitenlinien darboten. Er vermuthete zunächst, Unterschiede in der Dicke oder in der Gestalt des Glases möchten die Erscheinung veranlassen; er liess daher das Licht durch verschiedene Stellen des Glases fallen, veränderte die Grösse der Ladenöffnung, brachte das Prisma ausserhalb statt innerhalb derselben an, ohne dass sich jedoch die Erscheinung veränderte. Nunmehr legte er sich die Frage vor, ob Unregelmässigkeiten in der Structur des Glases die Ursache der Lichtzerstreuung sein könnten. Demgemäss stellte er dicht hinter dem ersten Prisma ein zweites ihm völlig gleiches auf, dem aber eine entgegengesetzte Lage gegeben war. Er schloss, die regelmässigen Wirkungen der Prismen würden auf diese Weise sich aufheben, während irgend welche irreguläre Wirkungen nicht aufgehoben, sondern möglicher Weise verstärkt würden. Es zeigte sich, dass das durch das zweite Prisma gebrochene Licht eine vollkommen kreisrunde Form annahm; die Frage nach der Existenz jener irregulären Wirkungen war also in verneinendem Sinne entschieden. Nun war noch die Vermuthung möglich, es könnten die von verschiedenen Punkten der Sonnenscheibe ausgehenden Strahlen unter verschiedenen Winkeln in das Prisma eintreten und dadurch eine abweichende Brechung erfahren. Newton mass daher alle bei dem Versuch in Betracht kommenden Linien und Winkel; es fand sich, dass die Breite des prismatischen Bildes genau dem scheinbaren Durchmesser der Sonnenscheibe entsprach, dass dagegen die Länge um mehr als das Fünffache grösser war. Ausserdem zeigte sich,

---

übersetzt in dem Werk: Abhandlungen aus den Philosophical Transactions. Leipzig 1779, S. 192 ff.

*) Vgl. Poggendorff, Geschichte der Physik. Leipzig 1879, S. 691.

dass sehr geringe Veränderungen in den Neigungen des Prismas ebenfalls nur sehr geringe Verschiebungen des prismatischen Bildes bewirkten. Dadurch war die vermuthete Wirkung einer verschiedenen Neigung der einfallenden Lichtstrahlen beseitigt. Endlich blieb eine letzte Annahme zu prüfen: die Lichtstrahlen könnten, analog einem elastischen Ball, der einen schrägen Schlag erhalten hat, nach dem Durchtritt durch das Prisma in Folge einer möglicher Weise stattfindenden Combination fortschreitender und drehender Bewegung krumme Linien beschreiben, wodurch die Lichttheilchen in Folge ihres Zusammenstosses von den Orten grössten nach denen kleinsten Widerstands abgelenkt würden. Newton mass demnach die Gestalt des prismatischen Bildes in verschiedenen Entfernungen vom Prisma; dabei ergab sich aber, dass sich alle gebrochenen Strahlen geradlinig fortpflanzten: auch diese Frage war also verneinend entschieden. Nun blieb als einzige Auskunft die übrig, anzunehmen, dass das Sonnenlicht in Strahlen von verschiedener Brechbarkeit zerlegt werde, und dass diese verschieden brechbaren Strahlen zugleich von verschiedener Farbe seien. Um dies zu prüfen, fing Newton das prismatische Bild auf einem Schirm auf, in welchem ein kleines Loch angebracht war, durch das nur ein kleiner Theil des gebrochenen Lichtes hindurchtreten konnte. Hinter dem Loch befand sich ein zweites Prisma, in welchem der hindurchgetretene Strahl abermals gebrochen wurde. Verschob man nun den Schirm so, dass successiv die einzelnen Farbestrahlen nach dem zweiten Prisma gelenkt wurden, so zeigte es sich, dass sie in diesem eine verschieden starke Brechung erfuhren, das rothe Licht die schwächste, das violette die stärkste. Hiermit war die letzte Frage bejahend entschieden: nach Ausschluss aller andern Möglichkeiten war bewiesen, dass das Sonnenlicht Strahlen von verschiedener Farbe und Brechbarkeit enthält. Mit Recht hat Newton den Versuch, der diesen Beweis erbrachte, und der im wesentlichen die noch heute geläufige Form für die Darstellung der verschiedenen Brechbarkeit der Farben ist, ein Experimentum crucis genannt. Wenn irgend einem, so kann am ehesten demjenigen Versuch, der die Voruntersuchung abschliesst und der eigentlichen Untersuchung ein erstes allgemeines Resultat zur näheren Analyse überliefert, die Rolle eines entscheidenden Experimentes zuerkannt werden.

Zunächst suchte nun Newton das gewonnene Ergebniss durch verschiedene Versuche zu bestätigen. Er combinirte zwei Prismen in solcher Weise, dass das erste, wie gewöhnlich, ein vertical stehendes

Farbenband entwarf, das zweite aber, das gegen jenes um $90^0$ gedreht war, das Spektrum nach der Seite ablenkte. Wären andere Bedingungen als die verschiedene Brechbarkeit der verschiedenfarbigen Strahlen wirksam, so würde in diesem Fall eine horizontale Verbreiterung des Bildes durch das zweite Prisma zu erwarten sein; eine solche trat aber nicht ein, und sie blieb auch dann aus, als durch ein hinzugefügtes drittes und viertes Prisma sehr starke seitliche Ablenkungen des Bildes erzielt wurden. In einem weiteren Versuch brachte er zwei Oeffnungen über einander in dem Fensterladen und vor jeder derselben ein Prisma an, so dass zwei vertical über einander stehende Spektren entworfen wurden. Liess er nun aus beiden Prismen die gebrochenen Strahlen durch ein drittes gehen, dessen brechende Kante vertical gestellt war, so wurden beide Spektren vollkommen gleichmässig nach der Seite abgelenkt. Eine weitere Modification des Versuchs mit zwei Spektren bestand darin, dass er den zwei vor die beiden Oeffnungen gestellten Prismen eine Lage gab, bei der auf einem weissen Papier das rothe Ende des einen Spektrums dicht neben das violette des andern zu liegen kam. Betrachtete er nun das Bild durch ein drittes Prisma, so erschienen das Roth und Violett wegen ihrer verschiedenen Brechbarkeit durch einen Zwischenraum getrennt. Von hier aus schritt Newton endlich zur quantitativen Bestimmung der einzelnen Elemente der beobachteten Erscheinung. Zu diesem Zweck mussten möglichst günstige Versuchsbedingungen für die deutliche Entwerfung des Spektrums getroffen werden. Das Zimmer wurde stark verdunkelt, das durch eine Ladenöffnung eintretende Sonnenlicht durch eine Linse gesammelt und unmittelbar hinter dieser das Prisma aufgestellt, welches, am Rand mit schwarzem Papier bedeckt, einen brechenden Winkel von 65—$70^0$ hatte und aus reinstem Glase oder aus Spiegelglasplatten, zwischen welche Bleizuckerlösung gebracht war, bestand. In dem auf einem weissen Papier aufgefangenen Spektrum wurden dann die Grenzen der einzelnen Farben durch gerade Linien bezeichnet. Die Distanzen dieser Linien konnten den Unterschieden des Brechungssinus proportional gesetzt werden. Nachdem das Brechungsverhältniss der am stärksten und der am wenigsten brechbaren Strahlen für sich ermittelt war, ergab sich daher nun das aller andern.

Nicht immer ist es nöthig, dass alle Fragen, die sich im Laufe der Untersuchung ergeben, so wie in dem erörterten Beispiel auf experimentellem Wege erledigt werden. Zuweilen lassen sich gewisse

Vermuthungen a priori beseitigen, da sie zu Folgerungen führen, die mit bereits bekannten Erfahrungen im Widerspruch stehen. Für solche Theile der Untersuchung pflegt dann die mathematische die Stelle der experimentellen Analyse zu vertreten. Insbesondere kann auf diese Weise die Voruntersuchung theilweise oder ganz vom Gebiete der Physik auf dasjenige der mathematischen Speculation verlegt werden. Natürlich findet dies namentlich in jenen Fällen statt, wo neue Thatsachen auf Grund bereits bekannter vermuthet oder vorausgesagt werden. Ueberhaupt aber liegt hierin ein grosser Vorzug, den der analytische Scharfsinn vor dem blossen Beobachtungstalente voraus hat, dass er zur Erledigung gewisser Fragestellungen gar nicht des Experimentes bedarf und dadurch eine Menge unnützer experimenteller Arbeit zu ersparen weiss. Es kann dann geschehen, dass der Beobachter sogleich mit der richtigen Vermuthung an die Untersuchung herantritt und diese mit einem Experimentum crucis beginnen lässt. So beseitigte Galilei die zu seiner Zeit verbreitete und anfänglich von ihm selbst getheilte Annahme, dass die Geschwindigkeit frei fallender Körper im Verhältniss des zurückgelegten Weges zunehme, einfach durch den Nachweis, dass nach dieser Voraussetzung die Körper beliebige Höhen von verschiedener Grösse in der nämlichen Zeit durchlaufen müssten. Ebenso aber prüfte er die richtige Annahme, dass die Geschwindigkeit im Verhältniss der verflossenen Zeit zunehme, zuerst in Bezug auf alle ihre Folgen, ehe er zu der Bestätigung durch den Versuch schritt. In noch andern Fällen kann der Gang der Analyse deshalb scheinbare Abweichungen darbieten, weil die einzelne Untersuchung nur einen Theil einer zusammenhängenden Reihe von Forschungen bildet, die sich unter Umständen über lange Perioden der wissenschaftlichen Entwicklung erstrecken. Hier füllt dann natürlich die Arbeit des einzelnen Forschers nur eine einzelne Lücke in dem grösseren Zusammenhang aus, durch dessen Betrachtung sich erst ein Ueberblick über den Gang der Analyse im ganzen gewinnen lässt. Nimmt man zu dieser historischen Continuität der wissenschaftlichen Arbeit noch das schon berührte Eingreifen der mathematischen Analyse sowie die oft sich ereignende Thatsache hinzu, dass zur Erreichung des nämlichen Zieles nicht selten verschiedene Wege bald neben, bald nach einander eingeschlagen werden, so wird es begreiflich, dass es nicht wenige Analysen physikalischer Erscheinungen gibt, deren vollständige Schilderung die geschichtliche Darstellung ganzer Gebiete der Physik voraussetzen würde.

b. Die synthetische Erzeugung der Naturerscheinungen.

Die Analyse der Erscheinungen kann für sich allein genügen, um eine exacte Beschreibung derselben möglich zu machen. Ein Beispiel einer in dieser Beziehung vollständigen Analyse haben wir in Newtons Untersuchung der Farbenzerstreuung kennen gelernt. Es kann sich aber auch ereignen, dass diese Analyse ein mehrdeutiges Resultat liefert, und dass zwischen den verschiedenen Möglichkeiten, die sie offen lässt, auf analytischem Wege keine Entscheidung zu gewinnen ist. So kann man z. B. bei der von Helmholtz gelehrten Analyse der Klänge mittelst Resonatoren, die auf die in dem Klang vermutheten Partialtöne abgestimmt sind, successiv jeden einzelnen der letzteren für das Ohr verstärken und auf diese Weise den ganzen Klang in seine Bestandtheile zerlegen. Es bleibt aber hier der Einwand, der in der That erhoben worden ist, dass in dem mit dem Ohr verbundenen verstärkenden Resonatorrohr möglicher Weise die Töne erst entstehen, und dass sie also in dem objectiven Klang gar nicht enthalten seien. Im ersten dieser Fälle, wo die Analyse für sich schon ein unzweifelhaftes Resultat liefert, wird die Hinzufügung der synthetischen Untersuchung wünschenswerth sein, da sie immerhin einen bestätigenden Werth besitzt und gegen etwa übersehene Einwände sichert; im zweiten Fall, wo das analytische Ergebniss mehrdeutig ist, wird sie unerlässlich sein, da hier ein Experimentum crucis eigentlich erst auf dem synthetischen Wege möglich ist.

Zur Bestätigung des analytischen Ergebnisses seiner Untersuchungen über das prismatische Spektrum hat Newton selbst schon zwei Versuche von synthetischem Charakter ausgeführt: er hob erstens die durch ein Prisma erhaltene Farbenzerstreuung wieder auf, indem er entweder dicht hinter dem ersten ein zweites von derselben Beschaffenheit aber entgegengesetzter Lage anbrachte, oder indem er das zerstreute Licht durch eine in einiger Entfernung befindliche Sammellinse treten liess; in beiden Fällen wurde durch die Verbindung sämmtlicher Farbestrahlen wieder Weiss erhalten. Zweitens mischte er pulverige Pigmente in dem Verhältnisse, welches die Farben im Spektrum zeigten, und gewann auf diese Weise ein graues oder bei starker Beleuchtung weisses Pulver. Diese Versuche enthalten nicht mehr als eine weitere Bestätigung der auf analytischem Wege gewonnenen Ergebnisse. Der Hauptnutzen einer vollständig

durchgeführten synthetischen Untersuchung besteht aber darin, dass sie es am leichtesten möglich macht, in willkürlicher Weise die qualitativen und quantitativen Bedingungen der Erscheinungen zu variiren. In dieser Beziehung hat zum Theil erst die auf Newton gefolgte Entwicklung der Optik die synthetische Untersuchung vervollständigt. Dies ist namentlich unter der Anwendung von zwei Methoden geschehen: erstens durch die Mischung von Spektralfarben in beliebiger Zahl und in beliebigen Intensitätsverhältnissen, und zweitens durch die Mischung von Farbeneindrücken mittelst der zuerst von Muschenbroek angewandten rotirenden Scheiben. Hierdurch ist es möglich geworden, eine Reihe von Thatsachen zu ermitteln, die auf analytischem Wege niemals zu gewinnen waren. So fand man mittelst der synthetischen Methode, dass durch Mischung zweier einander im Spektrum nahestehender Farben die zwischenliegende Farbe erhalten wird, dass jede Farbe zusammen mit einer bestimmten andern, ihrer so genannten Ergänzungsfarbe, Weiss erzeugt; und die Vergleichung der in Bezug auf die Ergänzungsfarben festgestellten Ergebnisse führte endlich zur Annahme der drei Grundfarben als derjenigen drei einfachen Farben, aus denen alle möglichen Farben sammt dem Weiss durch Mischung entstehen können, eine Annahme, die schliesslich ebenfalls direct auf synthetischem Wege bestätigt wurde, indem man die drei Grundfarben in den verschiedensten Mengeverhältnissen am Farbenkreisel mischte. Man sieht aus diesem Verlauf, dass auch die synthetische Untersuchung aus einer Reihe von Fragestellungen sammt den darauf gesuchten und gefundenen Antworten besteht. Diese Fragestellungen knüpfen im allgemeinen an zuvor gewonnene Ergebnisse an, und sie zerfallen wieder in zwei Classen: in eine erste, bei der man einfach eine Umkehrung der vorher ausgeführten Zerlegung der Erscheinungen verlangt, und in eine zweite, bei der eine genauere Bestimmung und Messung der Erscheinungen mit Rücksicht auf ihre Factoren gefordert wird.

Dieses Verhältniss zwischen analytischer und synthetischer Methode wird nur in jenen schon oben (S. 348) berührten Fällen verschoben, wo nicht eine unmittelbar gegebene Erscheinung Gegenstand der Untersuchung ist, sondern wo die Existenz einer noch unbekannten Erscheinung aus irgend welchen Gründen vermuthet wird, und es sich nun vor allem um die Herstellung der Bedingungen zur Erzeugung der Erscheinungen handelt. Hier ist die vermuthete Erscheinung in der Regel von zusammengesetzter Art, und sie muss

durch die Combination bestimmter, bis jetzt noch nicht in ihrer Verbindung beobachteter Bedingungen hergestellt werden. So begannen Oersted, als er die Wirkung des elektrischen Stromes auf die Magnetnadel, und Faraday, als er die Wirkung des Magnetes auf das polarisirte Licht nachzuweisen versuchte, mit einem synthetischen Verfahren. In beiden Fällen schloss sich dann erst an die Entdeckung der Erscheinung die Analyse derselben an.

### c. Die physikalische Induction.

Bei der Analyse der Naturerscheinungen ist der Gegenstand der Untersuchung die einzelne Erscheinung. Die Analyse ist vollendet, wenn sie dieselbe in ihre sämmtlichen Bestandtheile zerlegt und damit alle bei ihr vorkommenden Bedingungen ermittelt hat. Ebenso bezieht sich die synthetische Erzeugung unmittelbar nur auf einzelne Erscheinungen, jedoch mit dem Unterschiede dass sie den Gang der Analyse umkehrt, indem sie durch die Combination bestimmter Erscheinungen andere hervorbringt, die entweder durch eine vorangegangene Analyse in jene zerlegt worden sind, oder von denen man aus irgend welchen Gründen vermuthet, dass sie aus ihrer Verbindung entstehen können. Das Ziel beider ist daher die vollständige Kenntniss aller Einzelthatsachen, aus denen sich eine Erscheinung zusammensetzt, und der Art ihrer Verbindung. Hiermit ist nun aber der Zweck der physikalischen Untersuchung noch nicht erreicht. Diese will dem logischen Erklärungsbedürfniss Genüge leisten, indem sie aus den einzelnen Erscheinungen allgemeine Naturgesetze gewinnt, aus denen wiederum die Erscheinungen selbst als nothwendige Folgen abgeleitet werden können. Letzteres Geschäft fällt nicht der Analyse und Synthese als solchen zu, sondern der physikalischen Induction, welche dabei die ersteren als Hülfsmittel verwendet. Nichts desto weniger kann auch hier über die logischen Grenzen dieser Methoden kein Zweifel sein, da die Zerlegung oder Zusammensetzung einer Erscheinung und die Gewinnung allgemeiner Sätze aus einzelnen Thatsachen sehr verschiedene Processe sind, deren logisches Verhältniss es begründet, dass die beiden ersten dem letzteren vorausgehen müssen. Insofern die Gesetze, die sich als Resultate von Inductionen ergeben, die verschiedensten Grade der Allgemeinheit besitzen können, ist es aber begreiflich, dass die Induction nicht etwa bloss das Geschäft der Untersuchung abschliesst, indem sie aus den Ergebnissen einer Reihe von Analysen

und Synthesen einen allgemeinen Satz ableitet, sondern dass sie nicht selten schon ein einzelnes analytisches oder synthetisches Resultat in ein Gesetz umformt, dessen weitere Prüfung und Verallgemeinerung sie dann der ferneren Untersuchung überlässt. Doch ist in solchen Fällen das Resultat der Analyse von der daran geknüpften Induction logisch immerhin leicht zu unterscheiden; auch hat der aufgestellte Satz, so lange die weitere Prüfung nicht eingetreten ist, immer nur einen hypothetischen Werth. So war es zunächst eine Hypothese, wenn Newton auf das analytische Resultat, dass das Prisma einen Sonnenstrahl in farbige Strahlen von verschiedener Brechbarkeit zerlegt, den Satz gründete, dass das Sonnenlicht aus Farbestrahlen zusammengesetzt sei. Wäre z. B. der Versuch, durch die Mischung der Spektralfarben wieder Weiss zu erzeugen, dauernd misslungen, so würde es nöthig geworden sein, zu einer andern Voraussetzung zu greifen und diese durch weitere Versuche zu prüfen. In diesem Fall bestand also der nächste Schritt zum Vollzug der Induction in der Umkehrung des analytischen Verfahrens, in der Synthese des weissen Lichts durch Farbenmischung. Weitere Unterstützung fand dann die Induction in der bereits von Newton selbst unternommenen Analyse der Körperfarben mittelst des Prismas und späterhin in den Resultaten, welche die Untersuchung der unter anderweitigen Bedingungen, wie bei der Beugung und Interferenz, auftretenden Farbenerscheinungen lieferte.

Wie die Analyse der Erscheinungen in der Regel von einer zufälligen Wahrnehmung ausgeht, so pflegt die Induction an das Resultat einer ersten Analyse anzuknüpfen und von diesem aus den ganzen Gang der weiteren Untersuchung zu lenken. Die Induction bestimmt so die Reihe der Fragestellungen und dadurch die Ordnung, in welcher die einzelnen analytischen und synthetischen Untersuchungen ausgeführt werden. Diese können an und für sich betrachtet sehr vollkommen, und dennoch kann die daran geknüpfte Induction fehlerhaft sein — sei es, dass die Resultate in unrichtiger Weise verknüpft wurden, oder dass man nicht alle einzelnen Versuche ausgeführt hat, die zum Vollzug einer triftigen Induction erforderlich sind. So ist Newtons Untersuchung der Farbenzerstreuung ein Muster vorzüglicher Analyse. Dagegen war es eine fehlerhafte Induction, als er auf die Messung der Farbenbänder des prismatischen Spektrums den Schluss gründete, die Raumverhältnisse der sieben prismatischen Farben entsprächen den relativen Saitenlängen der phrygischen Tonleiter. Hier versäumte er es, das an seinen Prismen

gewonnene Resultat durch Versuche mit verschieden brechenden Substanzen zu prüfen, d. h. die Analyse der einen Erscheinung durch weitere Analysen ähnlicher Erscheinungen unter veränderten Bedingungen zu vervollständigen. In dieser Beziehung wurde die Untersuchung erst durch Dollond*) zu Ende geführt, welcher die Abhängigkeit der Farbenzerstreuung von der brechenden Substanz des Prismas und damit zugleich die Unrichtigkeit der Induction Newtons nachwies.

Auch die physikalische Induction kann sich in den drei Stadien vollziehen, die wir als die Stufen einer vollständigen Induction kennen lernten: in der Aufstellung empirischer Gesetze, der Verallgemeinerung der letzteren, und der Ableitung von Causalgesetzen zum Zweck der logischen Verbindung der Thatsachen. (Vgl. Abschn. I, S. 26.) Aber die Tendenz der Erklärung, die von Anfang an die physikalische Wissenschaft erfüllt, drängt hier rasch über die beiden ersten Stadien hinweg und verursacht, dass man namentlich bei den einfacheren Naturerscheinungen sofort den empirischen Resultaten eine causale Interpretation zu geben sucht. Diese Ueberholung der ersten Inductionsstufen ist natürlich um so auffallender geworden, je mehr sich durch den Fortschritt der Wissenschaft überall in bereits festgestellten Causalgesetzen Beziehungen darboten, an die neue Ergebnisse anknüpfen konnten. Während daher in den vorangegangenen Jahrhunderten immerhin so einfache Gesetze wie das Snell'sche Brechungsgesetz des Lichtes oder das Boyle'sche Gesetz der Zusammendrückbarkeit der Luft zunächst als rein empirische Formulirungen auftraten, besitzt gegenwärtig der Ausdruck empirisches Gesetz in der Physik geradezu die Nebenbedeutung einer regelmässigen Beziehung, die wegen ihrer verwickelten Beschaffenheit vorläufig einer causalen Analyse unzugänglich ist. Durch diesen raschen Uebergang zur causalen Betrachtung ist in der Physik weit mehr als in andern Erfahrungswissenschaften die Induction in innige Verbindung mit der Deduction getreten, von der sie sich nur durch den provisorischen Charakter der hinsichtlich der causalen Beziehungen aufgestellten Hypothesen und durch die zur Prüfung dieser provisorischen Hypothesen eingeschlagenen Methoden unterscheidet.

Die Hypothese schliesst nicht, wie zuweilen angenommen wird, das Geschäft der Induction ab, sondern auf physikalischem

*) Philos. Transact. Vol. X, p. 733.

Gebiete begleitet sie dieselbe in der Regel während ihres ganzen Verlaufes. Die Aufstellung der Hypothesen wird schon vorbereitet innerhalb jener Analyse der Erscheinungen, welche die der eigentlichen Induction vorausgehende exacte Beschreibung der Thatsachen vermittelt. Denn hier bereits besteht die Analyse in der Prüfung von Vermuthungen, die durch bestimmte experimentell zu lösende Fragestellungen an die Hand gegeben sind. Ein wichtiger Unterschied liegt nur darin, dass sich diese Vermuthungen zunächst bloss auf das Wie, nicht aber auf das Warum der Erscheinungen beziehen. Die Vermuthung wird erst in dem Augenblick zur Hypothese, wo sie die Frage nach den Ursachen des Geschehens in sich schliesst. Die Erfordernisse einer brauchbaren provisorischen Hypothese bestehen darin, dass dieselbe einerseits dem durch die exacte Beschreibung gegebenen Inhalt der Erscheinung selbst oder (bei erst zu entdeckenden Erscheinungen) dem Inhalt des die Hypothese liefernden verwandten Erscheinungsgebietes angepasst ist, und dass sie anderseits mit den allgemeinen Principien der Naturerklärung übereinstimmt. Hiermit bleibt immer noch für die Gestaltung der Hypothesen ein weiter Spielraum, und es ist daher begreiflich, dass namentlich im Anfang einer physikalischen Untersuchung verschiedene gegen einander kämpfen können. Gerade hierin liegt jedoch ein wesentliches Hülfsmoment der Induction, indem die widerstreitenden Anschauungen zur Aufsuchung von Thatsachen anregen, die zwischen ihnen entscheiden. So hat die Optik ihre grössten Fortschritte gemacht in der Zeit, da die Emanations- und Undulationshypothese um die Herrschaft stritten. Volta's Fundamentalversuche über die Entstehung der Elektricität durch den Contact der Metalle verdanken ihre Anregung der Bestreitung der Hypothese Galvani's von dem thierischen Ursprung des galvanischen Stroms; später hat der Streit der Contact- mit der chemischen Hypothese dem nämlichen Gebiet wichtige Untersuchungen zugeführt. Uebrigens wird durch eine in rein descriptiver Absicht unternommene vorläufige Analyse der Erscheinungen die Zahl möglicher Annahmen immer bereits erheblich eingeschränkt; darum ist es schon aus diesem Grunde wünschenswerth, dass der eigentlichen Induction wo möglich eine bis zur exacten Beschreibung des Thatbestandes führende Analyse vorausgehe.

Die Prüfung der provisorischen Hypothesen besteht aus einer Reihe analytischer und synthetischer Untersuchungen, die zunächst einen vorwiegend qualitativen Charakter besitzen. Ist für

ein bestimmtes Gebiet von Erscheinungen eine grössere Anzahl sich gegenseitig ausschliessender Hypothesen aufgestellt, so repräsentirt jede derselben einen als möglich angenommenen Causalcomplex. Um unter diesen ursächlichen Momenten das geeignete wählen zu können, genügt es im allgemeinen, bestimmte Bedingungen einzuführen oder hinwegzulassen; und wo dabei eine quantitative Abstufung der Bedingungen nöthig wird, da ist immerhin eine genaue Messung in diesem Stadium der Untersuchung noch nicht erforderlich. Die hauptsächlichste Schwierigkeit bei der Ermittelung der ursächlichen Bedingungen einer Erscheinung liegt nun aber in der Complication der Bedingungen. Die Umstände, unter denen eine Naturerscheinung zur Beobachtung kommt, sind meistens sehr zahlreich; die wichtigste Aufgabe des inductiven Verfahrens besteht daher in einer Variation dieser Umstände, welche darauf gerichtet ist, die wesentlichen von den unwesentlichen zu sondern und für die ersteren wiederum die Beziehungen nachzuweisen, in denen sie zu den einzelnen Theilen des beobachteten Phänomens stehen. Die allgemeine logische Regel, die hierbei massgebend ist, lässt sich folgendermassen aussprechen:

Unter den eine Erscheinung begleitenden Umständen sind diejenigen als wesentliche Bedingungen derselben anzusehen, deren Beseitigung die Erscheinung selber beseitigt, und deren quantitative Veränderung eine quantitative Veränderung der Erscheinung herbeiführt.

Diese Regel weist auf zwei experimentelle Methoden hin, die wir kurz als Elimination und als Gradation der Bedingungen bezeichnen können. Die Eliminationsmethode wird, wo es möglich ist, zuerst angewandt, und die Gradationsmethode dient dann zur weiteren Bestätigung der Ergebnisse. Die erste Methode kann wieder in zwei verschiedenen Formen zur Anwendung kommen: entweder direct, indem man die zu eliminirenden Umstände völlig beseitigt, oder indirect, indem man diese constant erhält, während alle andern Bedingungen successiv verändert werden*).

---

*) Abweichend von dem oben aufgestellten Inductionsgesetz und in näherem Anschlusse an die Baconischen Vorschriften haben John Herschel und John Stuart Mill eine grössere Zahl logischer Regeln für die experimentelle Forschung entwickelt. (Herschel, Ueber das Studium der Naturwissenschaft. Deutsch von Henrici. Göttingen 1836, S. 156 f.; Mill, Logik, I, S. 453 ff.) Mill namentlich hat fünf Methoden angegeben, von denen die erste und zweite, die er als Methoden der Uebereinstimmung und des Unterschieds

Nachdem die Ursachen festgestellt sind, die sich bei dem Eintritt der Erscheinungen wirksam erweisen, müssen nun diese Ur-

---

bezeichnet, den positiven und negativen Instanzen, die fünfte, als die Methode der begleitenden Veränderungen, der Tabula graduum bei Baco entspricht. Die dritte und vierte Regel dagegen sind nur Specialisirungen der zweiten, so dass diese Vorschriften im wesentlichen auf die Baconischen zurückführen, mit dem Unterschiede, dass sie nicht eine streng successive Anwendung der drei Grundregeln verlangen, sondern ein wechselndes Ineinandergreifen derselben zugeben, während sie freilich, wie schon Baco, die massgebende Bedeutung provisorischer Hypothesen verkennen. Prüft man nun aber die Beispiele, die die Anwendung dieser Methoden erläutern sollen, so zeigt es sich sogleich, dass die Regel der Uebereinstimmung in keiner Weise zu einer Induction verhelfen kann, sondern dass bei ihr immer schon zugleich eine Anwendung der Unterscheidungsmethode stattfindet. So soll in dem von Herschel angeführten, der Interpretation nach Baconischen Regeln besonders günstigen Beispiel der Theorie der Thaubildung die Methode der Uebereinstimmung darin ihre Anwendung finden, dass man als übereinstimmende Eigenschaft aller bethauten Körper ihre kältere Beschaffenheit im Vergleich mit der umgebenden Luft feststellte. Das Wesentliche dieses Verfahrens ist aber offenbar gar nicht die Ermittelung einer Uebereinstimmung, sondern die eines Unterschieds, nämlich des Temperaturunterschieds, der eine constante Bedingung der Thaubildung ist. Dass diese Bedingung an vielen Körpern beobachtet wurde, ist von verhältnissmässig untergeordneter Bedeutung; am allerwenigsten lässt sich aber eine solche Sammlung übereinstimmender Beobachtungen als eine besondere Methode der Uebereinstimmung auffassen, da hier die Häufung von Beobachtungen lediglich das Mittel ist, um die Constanz der betreffenden Bedingung festzustellen, und daher bei jedem methodischen Verfahren wiederkehrt. Ebenso zeigt dieses Beispiel, dass sich mit der Methode der Unterscheidung meistens von selbst diejenige der gradweisen Abstufungen verbindet, da hier unmittelbar an die Constatirung des Temperaturunterschieds die Beobachtung der steigenden Effecte dieses Unterschieds sich anschliesst. Elimination und Gradation sind eben zwei nicht nur nach ihrem logischen Zweck, sondern auch in Bezug auf ihre äussere Anwendung einander nahe verwandte und bei einem bestimmten Punkte völlig in einander übergehende Methoden. Aus diesem Grunde erscheint es angemessen, beide, wie es oben geschehen ist, einer einzigen Grundregel der Induction unterzuordnen. Wie in dem hier angeführten, so lässt es sich bei allen andern von Mill benutzten Beispielen leicht zeigen, dass in die Methode der Uebereinstimmung bereits die Differenzmethode hereinreicht, und dass aus ihr (oder vielmehr theils aus der Elimination, theils aus der Gradation der begleitenden Umstände) immer die eigentliche Induction entspringt. So ist für Liebigs Theorie der schädlichen Wirkung der Metallgifte das nächste Motiv nicht dies, dass die Lösungen schwerer Metalle innerhalb des Organismus ebenso wie ausserhalb desselben mit den Gewebsstoffen Verbindungen eingehen, welche der Fäulniss widerstehen, sondern die Thatsache, dass solche Verbindungen erfahrungsgemäss zu den Functionen des Stoffwechsels unfähig sind. Bei der Feststellung der Gesetze der Induction durch statische Elektricität soll das Verfahren der

sachen in genau messbarer Weise quantitativ variirt und gleichzeitig die quantitativen Veränderungen der untersuchten Erscheinungen durch messende Beobachtungen ermittelt werden. Diese Aufgabe gestaltet sich verhältnissmässig einfach in den Fällen, wo die Erscheinung auf eine einzige ursächliche Bedingung zurückgeführt werden kann; sie wird verwickelter, wenn mehrere Ursachen in einander eingreifen. Hier muss dann jede einzelne Ursache für sich unabhängig verändert und ihr Einfluss quantitativ bestimmt werden. Es findet dabei abermals das Eliminations- und Gradationsverfahren seine Anwendung, das erstere meistens in der Form der Constanterhaltung der übrigen Bedingungen. Wo es nicht möglich ist, eine einzelne Ursache isolirt zu verändern, da ist auch die Induction für sich nicht ausreichend, das complexe Gesetz der Erscheinung in die einfacheren Gesetze aufzulösen, aus denen es sich zusammensetzt. In solchen Fällen müssen dann entweder hypothetische, wo möglich an anderweitige Erfahrungen sich anlehnende Voraussetzungen über die Verbindung der Ursachen eingeführt werden, oder man ist genöthigt, das complexe Gesetz lediglich als einen die zusammengesetzte Erfahrung repräsentirenden Ausdruck stehen zu lassen. Derartige Gesetze pflegen dann, wie schon oben bemerkt, speciell empirische Gesetze genannt zu werden. Wegen ihres verwickelten Charakters ist in der Regel bei ihnen eine Verallgemeinerung durch Verknüpfung mit Inductionen verwandten Inhalts nicht möglich. Denn wenn es sich auch leicht ereignen kann, dass verschiedene empirische Gesetze eine ähnliche Form besitzen, so weist dies doch immer nur auf eine ähnliche Entstehung aus einfacheren Gesetzen hin; es wird aber dadurch nicht möglich, die einzelnen complexen Gesetze als Specialfälle einer allgemeinen Gesetzmässigkeit aufzufassen. Dies ist dagegen regelmässig der Fall, wenn die durch Induction gewonnenen Gesetze vermöge der isolirten Variabilität der Bedingungen einen einfacheren Charakter besitzen. So lassen sich die Gesetze der Reflexion, Beugung, Brechung und Interferenz des Lichtes ohne weiteres

Uebereinstimmung darin bestehen, dass man nachwies, wie in allen Fällen, in welchen ein Conductor mit einer bestimmten Elektricität geladen ist, eine in der Nähe befindliche leitende Fläche die entgegengesetzte Elektricität annimmt. Hier liegt das Wesen der logischen Induction abermals nicht in der Sammlung übereinstimmender Fälle, sondern einerseits in der Vergleichung des durch Influenz geladenen Leiters mit seinem vorherigen neutralen Zustande, anderseits in dem Nachweis, dass es niemals möglich ist, eine der beiden Elektricitäten abzuleiten, ohne dass zugleich die andere entladen wird. Das erste beruht aber so gut wie das zweite auf einer Anwendung der Differenzmethode.

mit den entsprechenden Schallgesetzen vereinigen. Wenn dagegen eine beliebige zusammengesetzte Klangbewegung durch eine ähnliche Reihe dargestellt werden kann wie die Fortpflanzung der Wärme durch die Erdrinde, so lässt sich daraus über die innere Beziehung der physikalischen Vorgänge nicht das geringste entnehmen. Doch kann es geschehen, dass ein complexes empirisches Gesetz dieser Art durch eine weiter eindringende Analyse noch in einfache Gesetze von causaler Bedeutung zerlegt wird. Dies hat sich z. B. bei der Darstellung der Klangbewegungen durch eine Sinusreihe ereignet, wo sich ergab, dass die Glieder der letzteren als wirkliche Repräsentanten einfacher Schwingungsgesetze zu betrachten sind. An einer solchen Zerlegung complexer empirischer Gesetze pflegt dann die deductive Methode schon wesentlich betheiligt zu sein. Denn meist ist es die mathematische Analysis, die in dem Functionsausdruck des empirischen Gesetzes einfachere Beziehungen nachweist, deren Uebereinstimmung mit physikalischen Gesetzen von allgemeiner Bedeutung unmittelbar erkennbar ist. Der experimentellen Untersuchung bleibt hier nur noch die Bestätigung der etwa in die Voraussetzungen eingehenden Hypothesen oder die Ermittelung bestimmter physikalischer Constanten überlassen. So zeigt es sich auch hier, dass vermöge der umfassenden Grundlagen, die in den mechanischen Principien und in den einfacheren Gebieten der Physik für die Deduction der Naturerscheinungen gegeben sind, bei dem heutigen Zustande der Wissenschaft nur selten das Inductionsverfahren unvermischt angewandt wird. Am ehesten ist dies natürlich noch bei solchen Untersuchungen der Fall, bei denen es sich zugleich um die Entdeckung bisher unbekannter Erscheinungen handelt. Es mag daher an einem klassischen Beispiel dieser Art der oben geschilderte allgemeine Verlauf der physikalischen Induction erläutert werden: ich wähle hierzu die elektrische Induction, mit besonderer Rücksicht auf Faradays grundlegende Untersuchungen über dieselbe.

Bei der Erzeugung statischer Elektricität durch Reibung hatte du Fay zuerst beobachtet, dass die Beschaffenheit der Elektricität je nach der Natur des geriebenen Körpers eine verschiedene sein könne, da leicht bewegliche Körperchen sich abstiessen, wenn die ihnen mitgetheilte Elektricität von einerlei Quelle herstammte, dagegen sich anzogen, wenn die Elektricität verschiedenen Ursprungs, z. B. durch Reiben von Glas und Harz hervorgebracht war. Als man dann weiterhin beobachtet hatte, dass regelmässig das Reibzeug eine andere Elektricität annimmt als der geriebene Körper, so schloss

Franklin, das Wesen der Elektricitätserregung bestehe in einer Uebertragung von Elektricität, wobei der eine Körper, der positiv elektrische, einen Ueberschuss derselben aufnehme, der andere, der negativ elektrische, solche abgebe; eine Bestätigung dieser Ansicht fand er darin, dass der Funke nur von dem positiv auf den negativ elektrischen Körper übergehe, nicht umgekehrt. Dagegen erhoben sich zunächst Bedenken aus Anlass der Anziehungs- und Abstossungserscheinungen. Konnte man auch nach Franklins unitarischer Hypothese allenfalls begreifen, dass positiv und negativ elektrische Körper sich anziehen und positiv elektrische sich abstossen, so war doch kaum einzusehen, warum auch negativ elektrische einander fliehen sollten. Diese Erwägungen bestimmten Robert Symmer zur Aufstellung der dualistischen Hypothese, welcher dann die zuerst von Wilke und Aepinus beobachteten Influenzerscheinungen vollends zum Sieg verhalfen. Diese zeigten, dass ein elektrischer Körper auf einen in seine Nähe gebrachten neutralen Leiter derart einwirkt, dass auf der dem Körper zugewandten Seite ein entgegengesetzter, auf der abgewandten ein gleichartiger elektrischer Zustand entsteht. Hierdurch wurde man veranlasst, die Anziehungs- und Abstossungserscheinungen elektrischer Körper auf die Anziehungen und Abstossungen der beiden Elektricitäten zurückzuführen, die man als eine neue Art unwägbarer Fluida ansah. Es lag dann aber auch die Vermuthung nahe, dass Erscheinungen, die der elektrischen Influenz entsprächen, überall da auftreten würden, wo überhaupt eine Quelle von Elektricitätserregung gegeben sei. Diese Vermuthung fand eine Stütze in Oersteds Entdeckung der bewegenden Wirkung des galvanischen Stromes auf die Magnetnadel und in den an diese Entdeckung sich anschliessenden Beobachtungen im Gebiet des Elektromagnetismus. Nachdem zuerst durch Aragos und dann besonders durch Faradays Versuche nachgewiesen war, dass Stahl und Eisen durch einen elektrischen Strom in den magnetischen Zustand übergeführt werden können, nachdem ferner Ampère gezeigt hatte, dass ein bewegter Magnet auf einen in der Nähe befindlichen beweglichen Stromleiter, und dass ebenso zwei bewegliche Stromleiter auf einander eine bewegende Wirkung äussern, die von der Richtung der Ströme bez. der Bewegungsrichtung der Magnetpole abhängt, war die Vermuthung gerechtfertigt, dass auch ein elektrischer Strom oder ein Magnetpol in benachbarten leitungsfähigen Körpern eine elektrische Vertheilung hervorbringen werde. Diese Vermuthung gründete sich demnach theils auf das allgemeine

Princip der Correspondenz von Wirkung und Gegenwirkung, theils auf eine erwartete Analogie mit den statisch-elektrischen Erscheinungen. War der elektrische Strom fähig, Magnetismus zu erregen, so konnte man annehmen, dass umgekehrt der Magnetismus auf einen benachbarten Leitungsdraht stromerregend werde wirken können. Da man ferner auf statisch-elektrischem Gebiete von den Anziehungs- und Abstossungserscheinungen elektrischer Körper aus zu der Fähigkeit der letzteren auf umgebende Leiter eine vertheilende Wirkung zu äussern gelangt war, so war auch zu erwarten, dass der wechselseitigen bewegenden Wirkung von Magneten und durchströmten Leitern eine vertheilende Wirkung elektrischer Ströme und Magnete auf benachbarte Conductoren entsprechen werde. Dies waren die Gesichtspunkte, von denen Faraday bei seiner Untersuchung ausging, bei der es sich demnach zunächst um eine Aufsuchung der vermutheten Erscheinungen und dann um die nähere Analyse derselben handelte. Die Untersuchung selbst zerfällt wieder in zwei logische Inductionen, von denen sich die eine auf die volta-elektrische, die andere auf die magneto-elektrische Induction bezieht*).

Um vertheilende Wirkungen durch den galvanischen Strom nachzuweisen, wickelte Faraday einen Kupferdraht in mehreren von einander isolirten Windungen auf einen Holzcylinder, überzog denselben mit einer isolirenden Schichte und umgab dann die letztere mit einem zweiten Kupferdraht: die Enden des ersten Drahts wurden mit einer Volta'schen Säule, die des zweiten mit einem Galvanometer verbunden. Es zeigte sich aber zunächst keine Wirkung auf die Magnetnadel. Erst als eine stärkere Batterie gewählt wurde, zeigte sich im Moment der Schliessung und ebenso im Moment der Oeffnung derselben eine schwache Ablenkung der Magnetnadel; dagegen blieb diese während der Dauer der Schliessung völlig ruhig. Diese Erscheinungen blieben auch bei noch stärkeren Strömen ungeändert; zugleich erfolgte regelmässig die Ablenkung bei der Oeffnung in entgegengesetztem Sinne als bei der Schliessung, und sie war etwas schwächer. Faradays anfängliche Vermuthung, dass der Strom während seiner Dauer eine vertheilende Wirkung ausüben werde, schien also der Berichtigung zu bedürfen; es handelte sich aber noch darum, die sicher beobachtete Schliessungs- und Oeffnungsinduction durch weitere Versuche zu bestätigen. Zu diesem Zweck brachte

*) Vgl. namentlich die erste und zweite Reihe von Faradays elektrischen Untersuchungen. Philos. Transact. 1832. Poggendorffs Annalen d. Physik, Bd. 25, S. 91 u. 142.

Faraday die Enden des inducirten Drahtes statt mit dem Galvanometer mit einer auf eine Glasröhre gewickelten Drahtrolle in Verbindung: befand sich nun, während eine Schliessung oder Oeffnung des Batteriestroms erfolgte, eine unmagnetische Stahlnadel in der Glasröhre, so war dieselbe magnetisch geworden, und zwar nahm sie bei der Oeffnung entgegengesetzten Magnetismus an als bei der Schliessung; wurde aber die Nadel während der Dauer des Stroms in die Glasröhre gebracht und vor der Oeffnung wieder entfernt, so zeigte sie keine Spur von Magnetismus. Ebenso liess sich an der Nadel des Galvanometers keine Ablenkung wahrnehmen, wenn die Verbindung während der Dauer des Stromes erfolgte. Zur weiteren Bestätigung der sich hieraus ergebenden Bedingungen der Inductionswirkung wurden endlich zwei Kupferdrähte in langen Zickzackbiegungen auf zwei getrennten Brettern befestigt; der eine Draht wurde mit der Batterie, der andere mit dem Galvanometer verbunden: als nun das eine Brett dem andern rasch genähert wurde, zeigte das Galvanometer einen Strom an, einen entgegengesetzten bei der Entfernung; so lange dagegen beide Drähte in constanter Nähe blieben, war kein Strom wahrzunehmen. Bei der Näherung der Drähte war die Richtung des inducirten Stromes die nämliche wie bei der Schliessung, und in beiden Fällen hatte der erregte Strom die entgegengesetzte Richtung wie der erregende. Umgekehrt verhielt es sich bei der Entfernung der Drähte oder der Oeffnung der Kette. Aus allen diesen Thatsachen ergab sich demnach durch logische Induction der Satz: das Entstehen eines galvanischen Stromes erregt in einem benachbarten geschlossenen Leiter einen kurz dauernden elektrischen Strom von entgegengesetzter Richtung, das Verschwinden eines Stromes erregt einen ähnlichen Strom von gleicher Richtung.

Um die Fundamentalerscheinungen der magnetoelektrischen Induction aufzufinden, umwickelte Faraday einen starken Ring aus Schmiedeeisen mit zwei von isolirenden Hüllen umgebenen Kupferdrähten, die einander so gegenüberlagen, dass zwischen ihnen eine zolllange Strecke Eisen unbedeckt blieb. Die Enden des einen Drahts konnten mit einer galvanischen Batterie, die des andern mit einem Galvanometer verbunden werden. Auch hier zeigte sich im Moment der Schliessung und Oeffnung eine Wirkung, und zwar war dieselbe weit stärker als bei der volta-elektrischen Induction, so dass, wenn an den Enden des zweiten Drahtes Kohlenspitzen angebracht waren, zwischen denselben bei ihrer Näherung ein starker Funke übersprang. Zum Behuf der genaueren Vergleichung der volta-elektrischen und

der magneto-elektrischen Induction wurde nun ein hohler Pappcylinder mit zwei isolirt gewundenen Drahtlagen umgeben, von denen wieder die eine mit einer Kette, die andere mit dem Galvanometer in Verbindung stand: es erfolgte beim Schliessen und Oeffnen der Kette eine kaum merkliche Wirkung; als aber ein Cylinder von weichem Eisen in die Pappröhre gesteckt wurde, war diese Wirkung sehr bedeutend. Aehnliche Wirkungen wie die Elektromagnete übten natürliche Magnete sowie der Erdmagnetismus aus, und zwar zeigte es sich, dass, wenn ein Kupferdraht einem Magnete genähert wurde, die Richtung des inducirten Stromes derjenigen entgegengesetzt war, die nach Ampères Theorie in dem Magnete selber anzunehmen ist. Unter dieser Voraussetzung liessen sich also die Thatsachen der magneto-elektrischen einfach dem Gesetz der volta-elektrischen Induction unterordnen. Beide Entstehungsweisen der Induction variirte endlich Faraday, indem er verschiedene Metalle zur Verfertigung des inducirten Leiters wählte: es ergab sich, dass in allen Fällen die Erscheinungen in gleicher Weise auftraten, abgesehen von den Intensitätsunterschieden, die durch das verschiedene Leitungsvermögen der Metalle für den Strom bedingt waren.

Noch zu einer weiteren Folgerung gaben aber die Beobachtungen über die Induction eines vom Strom durchflossenen Leiters auf einen andern, der von ihm räumlich getrennt ist, Anlass. Offenbar war man nämlich berechtigt zu vermuthen, dass die einzelnen von einander isolirten Windungen eines Kupferdrahtes auch eine wechselseitige Inductionswirkung ausübten. In der That glaubte Faraday auf eine solche Wirkung schon aus der Beobachtung schliessen zu dürfen, dass ein in vielen Spiralwindungen aufgerollter Schliessungsdraht beim Oeffnen der Kette einen viel stärkeren Funken gibt als ein kurzer Schliessungsdraht, und er wies dann den durch Induction des Leiters auf sich selbst entstehenden Strom, den er den Extrastrom nannte, direct nach, indem er eine Inductionsspirale gleichzeitig mit einer galvanischen Batterie und einem Galvanometer verband und die Einrichtung so traf, dass die Magnetnadel desselben an der Ablenkung durch den Batteriestrom durch eine angebrachte Hemmung verhindert wurde, während der Extrastrom, dessen Wirkung in entgegengesetzter Richtung erfolgte, auf sie einwirken konnte*).

*) Faradays Untersuchungen, neunte Reihe. Philos. Transact. 1834. Poggendorffs Ann., Bd. 35, S. 413. Jacobi, ebend. Bd. 45, S. 132.

Der letzte Schritt aller auf die elektrische Induction sich beziehenden Untersuchungen, die Feststellung der quantitativen Gesetze der Erscheinungen, war bei der statisch-elektrischen Induction mit verhältnissmässig geringen Schwierigkeiten verbunden, da hier der zeitliche Verlauf der Vorgänge ausser Betracht bleiben konnte und es also genügte die Gesetze zu ermitteln, nach denen mit der Veränderung der Stärke der Ladung des Influenzerregers einerseits und der verschiedenen räumlichen Bedingungen (Gestalt, Grösse, gegenseitige Stellung und Entfernung der Körper) anderseits die beobachteten Wirkungen sich änderten. Diese Gesetze wurden bereits von Coulomb in seinen für die quantitative logische Induction mustergültigen Untersuchungen im wesentlichen vollständig erledigt. Nachdem er in der Drehwage ein zur Messung anziehender oder abstossender Wirkungen geeignetes Hülfsmittel aufgefunden, ermittelte er den Einfluss der Stärke der Ladung, indem er dieselbe quantitativ variirte, alle übrigen Umstände aber constant erhielt; ähnlich stellte er den Einfluss der Entfernung der Körper fest, ihrer Gestalt, der Existenz einer isolirenden Zwischensubstanz u. s. w., wobei er überall in gleicher Weise die Eliminationsmethode mit der Gradationsmethode verband, nämlich die zu eliminirenden Einflüsse constant erhielt, während die speciell zu untersuchende Bedingung in messbarer Weise variirt wurde*). Ungleich schwieriger war die Untersuchung der volta-elektrischen und der magneto-elektrischen Induction, da es sich hier um einen Vorgang handelt, der in sehr kurzer Zeit abläuft, in dieser Zeit aber stetige Veränderungen seiner Intensität erfährt. Faradays Untersuchung war daher auch im wesentlichen auf den qualitativen Nachweis der Erscheinungen beschränkt geblieben. Wollte man von hier aus zu quantitativen Bestimmungen übergehen, so konnte an eine unmittelbare Messung des ganzen zeitlichen Verlaufs der Inductionswirkung nicht gedacht werden, weil die Magnetnadel eines Galvanometers ein allzu träges Werkzeug ist, als dass sie momentanen Veränderungen zu folgen vermöchte, und es nur möglich schien, den Gesammteffect eines einzelnen Inductionsstromes durch ihre Ablenkung zu messen. In diesem Falle ist es daher nöthig gewesen, aus den sonst bekannten Thatsachen erst ein hypothetisches Gesetz in mathematischer Formulirung über den Verlauf der Inductionswirkung zu entwickeln und dieses

*) Coulomb, Mémoires de l'Acad. Paris 1775. Vgl. Gehlers physikal. Wörterbuch, 2. Aufl., Bd. 3, 2. Abth., S. 690 ff.

dann durch Messungen zu prüfen. Im Gegensatze zu dem inductiven Weg, auf welchem Coulomb die Gesetze der statischen Induction feststellte, bildet daher diese allgemeinere Untersuchung der Inductionsgesetze ein Beispiel für jene Fälle, wo die Aufstellung quantitativer Gesetze zunächst ganz ein Problem der Deduction ist, und der experimentellen Untersuchung nur die Aufgabe der Bestätigung und der Ermittelung der in der Theorie unbestimmt gelassenen numerischen Werthe zufällt.

Blicken wir auf die Gesammtheit der Untersuchungen zurück, welche dieses ganze Erscheinungsgebiet allmählich der Erkenntniss zugänglich machten, so bietet dieselbe beinahe für alle Variationen der logischen Induction, die oben erwähnt wurden, Belege dar. Die Untersuchung der statisch-elektrischen Induction geht aus von zufälligen Wahrnehmungen, die zu verschiedenen Hypothesen Anlass geben, unter denen allmählich die dualistische, verbunden mit der Annahme der Fernewirkung der elektrischen Flüssigkeiten, den Sieg davonträgt. Auf Grund dieser Hypothese unternimmt dann Coulomb die Feststellung der quantitativen Gesetze der Influenz. Der Nachweisung der übrigen Formen der Induction ist ihre hypothetische Annahme vorangegangen. Da man auch hier zunächst einen dauernden Einfluss des Stromes oder des Magnetes auf den benachbarten Leiter vermuthete, so fand die provisorische Hypothese sofort in der Beobachtung der wirklichen Erscheinungen ihre Berichtigung. Immerhin bedurfte es dazu einiger Zeit. In Faradays anfänglicher Annahme, dass der inducirte Leiter auch in der Zeit zwischen der Schliessungs- und Oeffnungsinduction in einem veränderten Zustand verharre, welchen er den „elektrotonischen Zustand“ nannte, ist ein Reflex jener ursprünglichen Vermuthung erhalten geblieben; in Folge der Erkenntniss, dass sich in dem genannten Zustand die Eigenschaften der Metalle in nichts von ihren gewöhnlichen unterscheiden, hat Faraday später jene Annahme aufgegeben. An die Nachweisung der qualitativen Erscheinungen der Induction schloss sich dann sofort die Verknüpfung der einander nahe stehenden volta- und magneto-elektrischen Induction, die überdies durch die Ampère'schen Beobachtungen und Theorien von anderer Seite her vorbereitet war. Zur statisch-elektrischen Induction blieb dagegen die Beziehung so lange eine sehr allgemeine, bis eine eindringendere theoretische Untersuchung der Inductionsgesetze vorgenommen war, und die letztere hat in diesem Fall auch erst eine Bestimmung der quantitativen Inductionsgesetze möglich gemacht. Die Anwendung

der allgemeinen logischen Inductionsregel lässt sich durch alle diese Untersuchungen verfolgen. So greifen in Faradays Arbeiten das Eliminations- und das Gradationsverfahren fortwährend in einander ein. Das letztere wendet er an, indem er die Stärke des erregenden Stromes oder Magnetes, die Zahl der Drahtwindungen verändert; das erstere, indem er eine unmagnetische Nadel in die inducirte Rolle bald während der Schliessung oder Oeffnung, bald nur während der Strom geschlossen ist bringt, oder indem er die Effecte der inducirten Rolle bald mit der Einfügung von Eisenstäben, bald ohne dieselbe prüft, u. s. w. Für die Anwendung beider Methoden bei quantitativen Untersuchungen ist Coulombs Feststellung der Influenzgesetze mustergültig. Er eliminirt die Bedingungen der Erscheinungen meistens dadurch, dass er sie constant erhält, während die eine Bedingung, deren Einfluss ermittelt werden soll, gradatim verändert wird. Nur bei der Feststellung des allgemeinen Gesetzes der elektrischen Fernewirkung eliminirt er den Einfluss der Grösse und Gestalt der Körper, indem er die Entfernungen so gross wählt, dass dagegen die Dimensionen der Körper verschwinden.

### d. Die physikalische Abstraction.

Nächst der Mechanik ist die Physik diejenige Naturwissenschaft, die von dem Verfahren der Abstraction den ausgiebigsten Gebrauch macht. Schon die Trennung der physikalischen Forschung von andern Zweigen der naturwissenschaftlichen Untersuchung ist ein specieller Fall der isolirenden Abstraction (S. 12). Die Naturgegenstände werden zu Objecten physikalischer Analyse, indem man übereinstimmende Erscheinungen, absehend von den sonstigen Eigenschaften der Körper, an denen sie vorkommen, zergliedert. So können die Gesetze der Lichtbrechung an beliebigen festen oder flüssigen durchsichtigen Körpern untersucht werden; die Aggregatform, die elastischen, thermischen und andern Eigenschaften der auf ihr Brechungsvermögen untersuchten Körper bleiben dabei zunächst ganz aus dem Spiele. Wie die Unterscheidung der Physik von andern Wissenschaften, so beruht daher auch die Gliederung derselben in ihre einzelnen Zweige auf dem nämlichen Abstractionsverfahren. Schwere, Schall, Wärme, Licht u. s. w. sind Classen von Naturerscheinungen, bei deren jeder die übrigen so viel als möglich ausser Betracht bleiben. Ursprünglich ist diese Isolation von den unmittel-

baren Unterschieden der sinnlichen Wahrnehmung ausgegangen. Schwere und Wärme entsprechen den beiden Empfindungsqualitäten des Tastsinns, der Schall ist das Object des Gehörs, das Licht das Object des Gesichtssinns. Elektricität und Magnetismus legten zuerst eine Bresche in dieses System einer naiven physikalischen Abstraction; denn die Wirkungen jener Kräfte äussern sich bald in diesem, bald in jenem Sinnesgebiet, während doch eine unmittelbare Zurückführung auf die andern Naturkräfte zunächst unmöglich schien. Dazu kamen die Beziehungen, die sich zwischen den verschiedenen Erscheinungsgebieten, wie zwischen Licht und Schall, zwischen diesem und den Wellenbewegungen der Flüssigkeiten, ergaben. Je mehr die Physik dazu gelangt ist, bestimmte Anschauungen über die Natur der den einzelnen Erscheinungen zu Grunde liegenden Bewegungsformen schon bei ihren fundamentalen Abstractionen zu verwerthen, um so mehr haben daher jene ersten Gliederungen rationelleren Eintheilungsversuchen Platz gemacht, wenn auch für die erste Auffassung des empirischen Thatbestandes die Scheidung nach den Sinnesgebieten schon insofern eine gewisse Bedeutung behält, als den verschiedenartigen Sinneseinwirkungen tiefere Unterschiede der hypothetisch angenommenen ,oder objectiv nachweisbaren Vorgänge selbst entsprechen.

Auf die physikalische Abstraction folgt ihre Umkehrung, die Colligation der elementaren Erscheinungen. Nachdem diese an einem gegebenen Object oder an einem bestimmten Zusammenhang von Objecten jede für sich untersucht sind, sucht man sich über die Art ihrer Verbindung Rechenschaft zu geben. In der Regel hat dabei eine Erscheinung den Vortritt, und die Untersuchung der übrigen schliesst sich erst an in Folge der Fragen, die von jener aus angeregt werden. Nachdem man z. B. die doppelbrechende Eigenschaft eines Krystalls erkannt hat, geht man zu der Untersuchung der thermischen, elastischen und thermo-elektrischen Erscheinungen an demselben über. Auf diese Weise gelangt die Physik durch die Verbindung der Untersuchungen zu einer umfassenden Erkenntniss sowohl der complexen Naturerscheinungen wie der einzelnen Naturobjecte, die auch als specielle Formen complexer Erscheinungen betrachtet werden können. Dadurch arbeitet sie einerseits der naturhistorischen Forschung in die Hände, der sich erst mit Hülfe der physikalischen Untersuchung eine tiefere Einsicht in die Beschaffenheit der Naturobjecte eröffnet; anderseits gewinnt sie Aufschluss über den Zusammenhang der einzelnen Erscheinungs-

gebiete und wird so zu allgemeineren Vorstellungen über deren Substrat und zu allgemeineren Naturgesetzen geführt.

In allen diesen Beziehungen ist die physikalische Abstraction eine Weiterführung der in der Mechanik geübten Abstractionsmethode, und sie ist mit dieser der mathematischen Abstraction am nächsten verwandt. Von der letzteren trennt sie nur jenes besondere Merkmal des mathematischen Verfahrens, wonach dasselbe überhaupt von dem physischen Object abstrahirt und bloss auf die zur Auffassung desselben erforderliche intellectuelle Thätigkeit Rücksicht nimmt. Dagegen haben beide Abstractionen dies mit einander gemein, dass sie nicht generalisiren, sondern isoliren. Die Mathematik scheidet aus den sinnlichen Erscheinungen die in sie eingehenden subjectiven Elemente von allgemeingültigem Charakter, die Zahlwerthe und Raumconstructionen, aus. Die in den letzteren bereits enthaltene Bewegungsanschauung aufnehmend, fügt dazu die Mechanik zwei auf alle physikalische Erfahrung anwendbare Begriffe, die der Kraft und der Masse. Die physikalische Abstraction führt auf ihren verschiedenen Gebieten immer nur zu speciellen Formen dieser Begriffe. Diesem Umstand verdankt die Mechanik ihre Stellung als die allgemeinere, zunächst der Mathematik untergeordnete Disciplin. Hinsichtlich des Ursprungs ihrer Begriffe stehen aber Physik und Mechanik auf einem Boden: beide empfangen die Anregung zu ihren Abstractionen aus der objectiven Erfahrung, und zwar ist hier die Physik die vorausgehende Wissenschaft, weil sie die speciellere ist. Auf die einzelnen Begriffe, welche die Physik von den verschiedenen Formen der Materie und ihren Bewegungsgesetzen gewinnt, gründet die Mechanik durch eine generalisirende Abstraction jene allgemeinen Begriffe von Kraft und Masse, die sie zu den geometrischen und phoronomischen Anschauungen hinzufügt. Da sich diese Generalisation nur allmählich vollziehen konnte, so hat die Mechanik in ihren Anfängen noch ganz den Charakter eines Zweigs der Physik: sie fliesst mit der Physik der Schwere zusammen und wird aus dieser Verbindung erst unter dem Miteinfluss geometrischer und phoronomischer Betrachtungen getrennt.

Mit der isolirenden vereinigt sich aber auch in der Physik die generalisirende Abstraction. Wie die Mechanik von allen einzelnen Kraftformen und von den specifischen Unterschieden der materiellen Substanz absieht, um bloss die allgemeinen Begriffe von Kraft und Masse zurückzubehalten, so vollzieht sich innerhalb der Physik selbst schon ein allmählicher Uebergang von den besonderen zu den all-

gemeineren Begriffen und Gesetzen. Für die wissenschaftliche Entwicklung der Physik ist es aber charakteristisch, dass hier die Generalisation stets die nachfolgende Abstractionsform ist. Die Galileischen Fallgesetze, die Kepler'schen Gesetze sind Erzeugnisse einer isolirenden Abstraction, das Newton'sche Gravitationsgesetz dagegen ist durch eine Generalisation aus diesen Gesetzen hervorgegangen. Indem man das Gravitationsgesetz hinwiederum mit andern einzelnen Gesetzen der Fernewirkung zusammennimmt, lässt sich daraus als letzte Verallgemeinerung das Gesetz der Abnahme der fernwirkenden Kraft mit dem Quadrat der Entfernung gewinnen. Der letztere Begriff gehört aber bereits der allgemeinen Mechanik an, da in ihm von den besonderen Bedingungen der einzelnen Naturerscheinungen abgesehen wird. Auf diese Weise führt überhaupt die physikalische Generalisation stets bei einem bestimmten Punkte aus dem Gebiete der Physik in das der Mechanik. Dieser Grenzpunkt ist daran leicht zu erkennen, dass über ihn hinaus die Verallgemeinerung eine rein begriffliche ist, während, so lange sie sich auf physikalischem Gebiete bewegt, der allgemeinere Begriff zugleich eine reale Bedeutung besitzt, insofern er die gemeinsame Ursache für eine Anzahl verschiedener Erscheinungen bezeichnet. So ist die Gravitation die gemeinsame Ursache der irdischen Schwere und der Planetenbewegungen; die nach dem umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernungen wirkende Kraft ist aber eine bloss begriffliche Conception, der in der Wirklichkeit keine gemeinsame Ursache der Erscheinungen, die ihr subsumirt werden können, entspricht. Ebenso beruht die Annahme einer Wellenbewegung des Aethers auf Grund der Gesetze der Fortpflanzung des Lichts und der elektromagnetischen Fernewirkungen auf einer realen Generalisation, der allgemeine Begriff einer Wellenbewegung dagegen hat nur eine begriffliche Bedeutung, und die Untersuchung der abstracten Gesetze dieser Bewegung fällt darum dem Gebiet der Mechanik anheim. In allen diesen Beziehungen bewährt die Mechanik ihre vermittelnde Stellung zwischen der Physik und den mathematischen Wissenschaften. Die Generalisationen der Physik werden in dem Momente zu mechanischen Abstractionen, wo sie die unmittelbare Beziehung zu concreten Erfahrungen verlieren, so dass nur jene Reflexion auf die intellectuelle Form zurückbleibt, die überall den Charakter der mathematischen Abstraction ausmacht. Von der reinen Mathematik unterscheidet sich aber die Mechanik wiederum dadurch, dass ihre Abstractionen nicht schon bei den allgemeinen Formen der Erfahrung beginnen, sondern erst an die specifisch

physikalische Erfahrung, an die Wahrnehmung der verschiedenen Formen natürlicher Vorgänge und ihre Beziehung auf gemeinsame Ursachen, sich anschliessen.

Mit Rücksicht auf ihr Verhältniss zur vorausgehenden isolirenden Abstraction hat die Generalisation der physischen Gesetze eine gewisse Verwandtschaft mit der Umkehrung jenes ersteren Verfahrens, mit der Colligation. Beide führen in verschiedener Richtung die Untersuchung, die mit der Isolation begonnen, weiter, und beide sind Verbindungsformen ursprünglich getrennter Untersuchungsgebiete, deren charakteristischer Unterschied hauptsächlich darin liegt, dass nur die Generalisation zugleich Abstraction ist. Während die Colligation verschiedenartige Erscheinungen an demselben Object verbindet, ohne dabei irgend einen Bestandtheil dieser Erscheinungen zu eliminiren, verknüpft die physikalische Generalisation gleichartige Erscheinungen an verschiedenen Objecten, indem sie zugleich diejenigen Elemente eliminirt, in denen sich die betreffenden Erscheinungen unterscheiden. Uebrigens kann auch die Colligation zu neuen Abstractionen Anlass bieten, indem sie aus der Regelmässigkeit der Verbindung gewisser Erscheinungen allgemeinere Voraussetzungen gewinnt, die über diese Verbindung Rechenschaft geben. So lassen sich z. B. die Erscheinungen der Cohäsion, der Lichtbrechung, der Leitung der Wärme und Elektricität, welche ein Körper zeigt, vereinigen, um daraus ein allgemeines Schema seiner Molecularstructur zu gewinnen. Wesentlich gefördert werden die auf solcher Grundlage ausgeführten Abstractionen, wenn es möglich ist die verschiedenen Erscheinungsgebiete auch experimentell zu verknüpfen, indem man also z. B. den Einfluss ermittelt, den die Erwärmung des Krystalls auf seine optischen Eigenschaften besitzt. In diesem auf die Colligation folgenden Abstractionsverfahren begegnen uns die Eigenschaften der isolirenden Abstraction wieder, jedoch mit einer eigenthümlichen Umgestaltung, die für die allgemeinsten Begriffe der Physik charakteristisch ist. In den Vorstellungen über die Constitution der Körper, die zum Zweck der Erklärung der Erscheinungen entwickelt werden, abstrahirt man nämlich von allen denjenigen Eigenschaften der materiellen Substrate, die für die betreffende Erklärung nicht nothwendig in Rücksicht gezogen werden müssen. In diesem Sinne betrachtet die kosmische Gravitationstheorie die Weltkörper als Punkte, in denen die von ihnen ausgehenden Wirkungen concentrirt gedacht werden. Die Molecularphysik benützt schematische Vorstellungen, in denen die zur Ableitung der einzelnen Thatsachen

nothwendigen Voraussetzungen auf ihren einfachsten anschaulichen Ausdruck gebracht sind. Sie betrachtet die Körper bald als absolut homogene Massen, deren einzelne Theile Wirkungen auf einander ausüben, die nach einem bestimmten Gesetze von ihren Entfernungen abhängen, bald als Complexe physischer Punkte, die anziehend oder abstossend auf einander wirken, oder für die bestimmte Bewegungszustände vorausgesetzt werden, u. s. w. In allen diesen Fällen ist man sich bewusst, dass solchen Abstractionen höchstens eine annähernde Gültigkeit für die Erfahrung zukommen kann. Die Abstraction selbst ist eine isolirende, insofern bei ihr ausschliesslich auf die für die Erklärung gewisser Erscheinungen wesentlichen Eigenschaften der Substanzen Rücksicht genommen wird. Sie unterscheidet sich aber von jener Abstraction, welche den Anfang der physikalischen Untersuchung bildet, dadurch, dass sie sich nicht auf die Erscheinungen selbst bezieht, sondern auf die Voraussetzungen, die man zu ihrer Erklärung erforderlich hält. Es herrscht daher bei dieser Abstraction eine viel grössere Willkür; denn meist können abstracte Voraussetzungen von verschiedener Beschaffenheit den empirischen Forderungen genügen. Namentlich aber zeigt es sich, dass sich diese hypothetischen Abstractionen unter dem Einfluss der Colligation der Thatsachen verändern. Indem die letztere regelmässige Beziehungen kennen lehrt zwischen ursprünglich getrennt gehaltenen Erscheinungsgebieten, müssen auch die abstracten Begriffe über das materielle Substrat der Vorgänge jenen Beziehungen genügen. Auf diese Weise entsteht schliesslich die Forderung, die letzten Abstractionen der Physik so zu gestalten, dass in ihnen zwar keine überflüssige Voraussetzung gemacht ist, dass sie aber doch über alle Erscheinungen Rechenschaft geben, welche die wirklichen Naturkörper unserer Beobachtung darbieten.

Die Abstractionen dieser letzten Stufe der physikalischen Untersuchung bilden die Grundlage für die Deduction der Naturerscheinungen. So ist es die isolirende Abstraction, die in ihren verschiedenen Formen zugleich den verschiedenen logischen Methoden der physikalischen Forschung parallel geht. Durch Trennung der Erscheinungen leitet sie die Induction ein und begleitet sie auf allen ihren Stadien; mittelst der Bildung abstracter Voraussetzungen über das Substrat der Erscheinungen eröffnet sie das deductive Verfahren und bildet einen wesentlichen Bestandtheil der theoretischen Naturerklärung.

### e. Die physikalische Deduction.

Nachdem durch Analyse, Induction und Abstraction die allgemeinen Voraussetzungen über die Grundlagen bestimmter Naturvorgänge sowie die Gesetze denen sie folgen gewonnen sind, beginnt das Geschäft der physikalischen Deduction. Diese kann zwei Methoden einschlagen. Als synthetische Deduction vermittelt sie die Erklärung der zusammengesetzten Erscheinungen durch Verbindung einfacher Annahmen, die entweder aus der Erfahrung abstrahirt oder zum Zweck der Deduction hypothetisch eingeführt werden. Als analytische Deduction entwickelt sie die einzelnen Erscheinungen und deren specielle Gesetze durch Zerlegung der allgemeinen Gesetze, unter denen sie als besondere Fälle enthalten sind. Da nun einfache Annahmen in der Regel durch eine Analyse der zunächst in einer mehr oder weniger verwickelten Gestalt gegebenen concreten Erfahrungen gewonnen werden, und da umgekehrt die allgemeinen aus der Verbindung specieller Gesetze zu entstehen pflegen, so setzt überall die synthetische Deduction eine analytische Untersuchung und dagegen die analytische Deduction ein synthetisches Verfahren voraus; auch kann es vorkommen, dass beide Methoden theils mit einander theils mit inductiven Erläuterungen abwechseln.

Die synthetische Deduction physikalischer Thatsachen ist in ihrer historischen Entwicklung wesentlich durch das Beispiel der Mathematik bestimmt worden. Die physikalische Untersuchung selbst würde niemals zu jenem Beweisverfahren geführt haben, wie es in den Arbeiten eines Newton und Huygens herrscht und lange Zeit als die mustergültige Darstellungsform auch in der Physik galt. Vielmehr ist es der äussere Einfluss der geometrischen Demonstrationsmethode Euklids, der sich hier das widerstrebende Material der physikalischen Deduction dienstbar gemacht hat. Gerade das bedeutendste Werk dieser Richtung, Newtons „Principien der mathematischen Naturphilosophie“, zeigt dies in der augenfälligsten Weise. Die Definitionen und Axiome, die Euklid an die Spitze seiner Elemente und ihrer Hauptabschnitte stellt, bieten für die Auffassung keinerlei Schwierigkeiten; sie erzwingen sich durch die anschauliche Beschaffenheit der Objecte, auf die sie sich beziehen, unmittelbare Anerkennung, so dass sie selbst für einen elementaren Lehrgang als naturgemässe Ausgangspunkte angesehen werden können. Ganz anders verhält es sich mit den Definitionen der Masse, der Geschwindigkeit

und der Kraft und mit den drei mechanischen Axiomen, auf die Newton seine Entwicklungen gründet. (S. 299 ff.) Sie sind von so abstracter Natur, dass an eine unmittelbare Nachweisung derselben in der Anschauung nicht zu denken ist, und sie stützen sich so sehr auf Inductionen, die erst auf dem Wege wissenschaftlicher Zergliederung möglich sind, dass eine Begründung mittelst dieser Inductionen nicht entbehrt werden kann. Dies macht sich denn auch in Newtons Darstellung geltend. Jene Begründungen, die ihm die gewählte systematische Form der Principien voranzustellen verbietet, sieht er sich genöthigt in ausführlichen Anmerkungen nachfolgen zu lassen. So schliessen sich an seine Definitionen Auseinandersetzungen über absolute und relative Zeit, absoluten und relativen Raum, wirkliche und scheinbare Bewegung, über den Begriff der Ursache und seine physischen Anwendungen; und die mechanischen Axiome erläutert er, hinweisend auf die Versuche von Galilei, Wren, Wallis und Huygens, durch experimentelle Erfahrungen. Alle diese Betrachtungen besitzen einen inductiven und zugleich analytischen Charakter. In diesem Sinne bilden sie den näheren Beleg zu der von Cotes in der Vorrede zur zweiten Auflage der Principien gemachten Bemerkung, dass die Methode eine zweifache, eine analytische und eine synthetische, sei: die Kräfte der Natur und ihre einfachen Gesetze würden aus einigen ausgewählten Erscheinungen mittelst der Analyse abgeleitet und dann mittelst der Synthese als Eigenschaften der übrigen Erscheinungen dargelegt. Wenn dies der naturgemässe Entwicklungsgang der synthetischen Deduction ist, so wird aber augenscheinlich die Darstellung desselben durch die unveränderte Annahme der Euklidischen Demonstrationsform beeinträchtigt, da diese für jene grundlegende Analyse keinen Platz lässt, so dass die leztere an einer ihrer Bedeutung nicht entsprechenden Stelle Unterkunft suchen muss.

Ein weiterer Uebelstand dieser Demonstrationsform tritt in der Art der Verwendung von Hülfslehren hervor, die für die Deduction nicht entbehrt werden können, aber doch dem Gegenstand derselben eigentlich fremd sind. Dieser Uebelstand wird um so fühlbarer, je zahlreicher die Voraussetzungen werden. Schon Euklids Elemente bringen fast die ganze damals bekannte Arithmetik in der Form einer Einschaltung, die zu den geometrischen Messungsaufgaben, deren Lösung nur mittelst der Kenntniss der Zahlen möglich ist, vorbereiten soll. In den physikalischen Darstellungen, welche die synthetische Methode wählen, nehmen solche Einschaltungen und Vor-

bereitungen noch einen grösseren Raum ein. So eröffnet Newton das erste Buch seiner Principien mit einer rein mathematischen Abhandlung „über die Methode der ersten und letzten Verhältnisse“, und der ganze Inhalt der beiden ersten Bücher, der die reine Mechanik behandelt, namentlich des ersten, verfolgt sichtlich den Zweck, die Entwicklungen des dritten Buchs über das Weltsystem vorzubereiten. Denn mit Rücksicht darauf werden von Anfang an die mechanischen Probleme ausgewählt. Die Bewegungen von Körpern durch Centripetalkräfte, in excentrischen Kegelschnitten, in beweglichen Bahnen, die Bewegungen kugelförmiger Körper, welche durch Centripetalkräfte gegen einander hingezogen werden, u. s. w., alle diese Probleme sind so beschaffen, dass bei dem Uebergang zu den speciellen Bedingungen des Weltsystems nur noch die Einführung einzelner durch die Erfahrung gegebener Data, nirgends mehr die Lösung einer neuen mechanischen Aufgabe erfordert wird. Wohl aber wird bei diesem abschliessenden Theile der Darstellung von neuem das Bedürfniss nach einer Herbeiziehung der Induction fühlbar; denn erst die durch sie ermittelten Thatsachen gestatten die Anwendung der zuvor gewonnenen allgemeinen mechanischen Sätze auf die concreten Erscheinungen. Da nun solche einzelne Data der Erfahrung bei der synthetischen Methode in die Demonstration der einzelnen Lehrsätze nicht wohl eingeführt werden können, weil das gesammte Material, über das der Beweis des Lehrsatzes verfügt, als gegeben in vorangegangenen Sätzen vorausgesetzt ist, so sieht sich Newton genöthigt, jenen Daten der Erfahrung eine ähnliche Stellung anzuweisen wie zuvor den Definitionen und Axiomen: er stellt sie unter dem Titel „Erscheinungen“ neben einigen allgemeinen methodischen Regeln über die Erforschung der Natur an die Spitze des dritten Buchs der Principien. Darin liegt freilich insofern keine Incongruenz, als jene die Mechanik einleitenden Sätze ebenfalls durch Induction begründet werden; immerhin handelt es sich dort um allgemeinste Principien, hier um specielle, meistens in einzelnen numerischen Werthen auszudrückende Thatsachen.

In vielen Fällen hat übrigens eine solche kurze und beiläufige Ergänzung des synthetischen Ganges durch Ausführungen von inductivem Charakter dem Bedürfnisse nach anschaulicher Begründung, welches besonders bei der Darstellung neuer physikalischer Lehren obwaltet, nicht Genüge geleistet, sondern die Urheber derselben sahen sich gedrungen, inductiven Entwicklungen und analytischen Deductionen einen grösseren Spielraum zu lassen, wodurch diese nun als völlig

selbständige Begründungen der synthetischen Deduction, die ihnen entweder vorausgehen oder nachfolgen kann, gegenübertreten. Ein hervorragendes Beispiel hierfür bilden Galileis Discorsi*). Wie die Begabung dieses grossen Physikers eine in eminentem Masse analytische ist, so bevorzugt er auch durchaus die analytische Deductionsmethode, in die er jedoch theils inductive Entwicklungen, theils kritische und polemische Ausführungen einstreut. Dadurch erscheint der in der Zeit der Wiedererneuerung des Platonismus beliebt gewordene Dialog bei ihm als eine nicht bloss äusserlich angeeignete, sondern dem inneren Gedankengang vollkommen angepasste Darstellungsform. Im dritten und vierten Tag der Discorsi wird aber diese Form durch synthetische Deductionen in Euklidischer Weise unterbrochen, für die zugleich die lateinische Sprache gewählt ist, während der ungezwungenere Dialog in leichtem Italienisch dahinfliesst. Dieser dritte und vierte Tag handeln von den Bewegungen schwerer Körper, und die einleitenden Worte Galileis verrathen deutlich, dass er mit Absicht gerade den wichtigsten Theil seiner Forschungen in einer Anzahl streng formulirter Axiome und Theoreme zusammenfasst. Aber der Dialog wird durch die so geänderte Form der Darstellung nicht ganz unterdrückt. Wo es nöthig scheint, setzt er in der Form einer Unterhaltung über die vorgetragenen Sätze ein, um diese näher zu erläutern und dem Leser den analytischen Gedankengang vorzuführen, durch den sie gefunden sind. Uebrigens wählte auch Newton, der die synthetische Demonstrationsmethode so hoch schätzte, in der früher von ihm verfassten populären Abhandlung über das Weltsystem**) einen vorzugsweise analytischen Weg. Er war eben der Ueberzeugung, dass die synthetische Methode zwar die logisch strengere, aber deshalb die schwierigere sei, weil die Resultate selbst immer analytisch gefunden würden. In der That war diese Ansicht gegenüber jener Handhabung der analytischen Deduction, wie sie noch zu Newtons Zeit auf physikalischem Gebiet die herrschende war, und für die uns Descartes' Naturphilosophie ein augenfälliges Beispiel darbietet, vollkommen berechtigt. Gerade sie verzichtete nämlich fast ganz auf die Anwendung mathematischer Hülfsmittel. Höchstens bediente sie sich einfachster arithmetischer Operationen oder geometrischer Constructionen. Noch aber hatte sie sich die mathematische Analysis nicht dienstbar gemacht. Erst die

---

*) Opere di Galileo Galilei, ediz. E. Albèri, t. XIII.

**) Sie ist von Wolfers seiner Uebersetzug der Principien beigefügt.

mathematische Physik des 18. Jahrhunderts vollzog diesen schon durch Descartes' analytische Geometrie nahe gelegten und durch die Erfindung der Infinitesimalrechnung vollends unvermeidlich gewordenen Schritt. Hiermit war nun aber auch der einzige Grund hinweggefallen, der gegen die sonstigen Nachtheile der synthetischen Methode ins Gewicht fiel: die mit den Hülfsmitteln der mathematischen Analysis ausgerüstete analytische Deduction liess an Strenge nichts zu wünschen übrig, und sie verband damit den grossen Vorzug, dass sie nicht bloss fertige Resultate in eine beweiskräftige Form brachte, sondern dass sie sich vor allem als ein wichtiges Hülfsmittel der Forschung selbst erwies.

Die analytische Deduction der Naturerscheinungen geht von Erfahrungsgesetzen oder von hypothetischen Voraussetzungen allgemeinster Art aus und sucht aus denselben successiv die einzelnen Erscheinungen und die speciellen Gesetze, von welchen dieselben beherrscht werden, abzuleiten. Es geschieht dies durch die Zerlegung jener allgemeinen Sätze in die besonderen Fälle, die unter ihnen enthalten sind. Der Weg, der hier eingeschlagen wird, besitzt demnach den Charakter einer Begriffsanalyse. Er unterscheidet sich aber von Begriffsanalysen anderer Art durch die anschauliche Form, welche die Allgemeinbegriffe der physikalischen Deduction vermöge der Forderung, dass sie zur Ableitung bestimmter Naturerscheinungen dienlich sein sollen, besitzen müssen. Schliesslich enthalten nämlich jene Allgemeinbegriffe Voraussetzungen, die sich theils auf die Beschaffenheit des materiellen Substrates, theils auf die causalen Beziehungen der Theile dieses Substrates zu einander beziehen. Da nun die Materie von der Physik als die unveränderliche in räumlicher Form gegebene Grundlage der Erscheinungen angesehen wird, die Gesetze ihrer Wechselwirkungen aber wegen der qualitativen und quantitativen Constanz der Materie nur die Form von Bewegungsgesetzen besitzen können, so wird durch die Festhaltung dieser allgemeinen Voraussetzungen jene Forderung der Anschaulichkeit bereits erfüllt, und im Einzelnen haben die Prämissen der Deduction nur noch der Maxime zu folgen, dass die aus ihnen abgeleiteten Folgerungen mit der Erfahrung übereinstimmen müssen.

Die Zergliederung der allgemeinen Voraussetzungen, in der das Wesen der analytischen Deduction besteht, vollzieht sich nun, wie bei jeder Begriffsanalyse, durch die Einführung specieller Bedingungen, mittelst deren man sich den in der wirklichen Erfahrung gegebenen Verhältnissen schrittweise zu nähern sucht. Eine solche Einführung

besonderer Bedingungen kann stets als ein Verfahren der Substitution angesehen werden, indem man dabei für solche Begriffselemente, denen in den ursprünglichen Voraussetzungen eine unbestimmtere und darum allgemeinere Bedeutung angewiesen war, speciellere Begriffe einführt, die irgend einem concreten Fall der physikalischen Erfahrung entsprechen. Dieses Substitutionsverfahren zerfällt in der Regel wieder in zwei Acte: in einen ersten, durch den aus der allgemeinen Voraussetzung ein einzelnes Erscheinungsgebiet nur in abstracter Weise abgeleitet wird, so dass die concreten Werthe der Erscheinungen noch nicht in Betracht kommen, sondern die in den Ausdruck der Gesetze eingeführten Grössen eine unbestimmte Bedeutung bewahren. Daran schliesst sich dann als zweiter Act die Einführung concreter Werthe in die abstract formulirten Gesetze und die damit zusammenhängende numerische Feststellung gewisser constanter Grössen, die für die messende Vergleichung der Erscheinungen wesentlich sind. Der erste dieser Acte fällt noch vollständig in den Bereich der reinen Deduction. Wenn auch bei der Substitution specieller Bedingungen eine Rücksicht auf die Erfahrung niemals fehlen kann, so ist doch diese hier keine andere als bei der Gewinnung der allgemeinsten Prämissen der Deduction: es werden Annahmen aufgestellt, von denen man erwartet, dass sie sich als conform den in der Erfahrung gegebenen Bedingungen erweisen werden, wobei aber doch der wirkliche Nachweis dieser Conformität erst durch das Gelingen der Deduction erbracht wird, zu welchem Gelingen immer auch noch der zweite Act der Substitution, die Einführung concreter Einzelwerthe an Stelle der bis dahin festgehaltenen abstracten Grössen, erfordert wird. Demgemäss beruht dieser zweite Act auf einer Herbeiziehung der Induction. Die fraglichen Einzelwerthe sind numerische Data, die durch Beobachtung oder Experiment festgestellt werden müssen. Es kann nun freilich geschehen, dass sie schon vor dem Beginn der Deduction durch eine derselben vorangehende Induction gefunden wurden; aber ebenso oft ereignet es sich, dass sich die Induction erst an die analytische Deduction anschliesst, oder dass mindestens eine Revision der früher gewonnenen experimentellen Data vorgenommen werden muss, weil die deductiv abgeleiteten Gesetze erst die exacten Fragestellungen enthalten, deren empirische Beantwortung die Theorie der Erscheinungen abschliesst.

Die Induction, die diese Vollendung der analytischen Deduction bewirkt, verfolgt regelmässig wieder zwei Ziele. Erstens sucht sie

eine Bestätigung für die Voraussetzungen der Deduction zu gewinnen, indem sie nachweist, dass die experimentell gefundenen Thatsachen mit den abgeleiteten Folgerungen übereinstimmen. Dies ist die verificirende Induction, in welcher wesentlich nur relative Grössenbestimmungen vorkommen, da aus abstracten Voraussetzungen zwar Schlüsse über die quantitativen Verhältnisse der Naturerscheinungen, niemals aber solche über die absoluten Werthe gewisser Wirkungen gewonnen werden können. Sodann sucht man die abstracten Werthe, die in die abgeleiteten Naturgesetze eingehen, durch die Messung zu fixiren, um auf diese Weise die Constanten zu ermitteln, in denen die Wirkung bestimmter Ursachen ihren quantitativen Ausdruck findet. Dies können wir die determinirende Induction nennen. Bei ihr handelt es sich stets um absolute Massbestimmungen, durch welche die concrete Grösse der Erscheinungen, über welche der abstracte Inhalt der Gesetze nichts aussagt, festgestellt werden soll. Ueberblicken wir demnach den ganzen Verlauf der analytischen Deduction sammt ihren Vorbereitungen und Ergänzungen, so lässt sich derselbe in vier Stadien trennen, von denen jedoch nur die zwei ersten der eigentlichen Deduction, die zwei letzten der auf sie folgenden Induction angehören. Sie sind: 1) die Aufstellung abstracter Voraussetzungen, 2) die Ableitung einzelner Gesetze aus diesen Voraussetzungen, 3) die Verification der Gesetze, und 4) die Determination der in die Gesetze eingehenden Constanten der Naturerscheinungen.

Bei Deductionen verwickelterer Art, bei denen die abgeleiteten Thatsachen meistens wieder in verschiedene Gruppen zerfallen, deren jede besondere Voraussetzungen erfordert, pflegt dieser regelmässige Verlauf Abänderungen zu erfahren, die sich dadurch oft noch mannigfaltiger gestalten, dass eine möglichst vollständige Darstellung naturgemäss auch jene vorbereitende Induction, die dem Beginn der analytischen Deduction vorangeht, herbeizuziehen sucht, um durch sie von vornherein die Aufstellung der Voraussetzungen zu rechtfertigen. Da nun die Verification und die Determination der Grössenwerthe der Erscheinungen ebenfalls der Induction zufallen, so kann es geschehen, dass die letztere der eigentlichen Deduction nur einen verhältnissmässig kleinen Raum übrig lässt. Aber gerade hierin verräth sich nicht zum wenigsten, wie sehr die analytische Deduction den Bedürfnissen der Naturerklärung angepasst ist, indem sie es gestattet, einen solchen Wechsel der logischen Hülfsmittel in jedem Augenblick eintreten zu lassen, sobald er durch die Beschaffenheit des Gegen-

standes gefordert ist, ohne dass dadurch der naturgemässe Gang der Entwicklungen unterbrochen wird.

Ein hervorragendes Beispiel dieser Art ist schon das bahnbrechende Werk der neueren Naturwissenschaft, die Schrift des Copernikus „De revolutionibus orbium coelestium“. Das erste Buch bringt die Begründung der allgemeinen Voraussetzungen des neuen Weltsystems. Abgesehen von speculativen Betrachtungen, denen wir heute keine bindende Kraft mehr beimessen, und die sich hauptsächlich auf die Forderungen der Vollkommenheit und der Symmetrie in der Anordnung der Gestirne beziehen, besteht diese Begründung aus einer Reihe von Inductionen. Die erste derselben bringt den Nachweis für die kugelförmige Gestalt der Erde, eine zweite stellt fest, dass die Erde nicht den Mittelpunkt der Planetenbahnen bilde, und eine dritte zeigt, dass die Grösse der Erde verschwindend im Verhältniss zu der Entfernung der Fixsterne sein müsse. Theils auf diese Gründe, theils auf den Nachweis der Unzulänglichkeit der Ptolemäischen Anschauung stützt dann Copernikus seine im 10. und 11. Capitel aufgestellte neue Hypothese von der Ordnung der Himmelskreise und von der dreifachen Bewegung der Erde. Hiermit ist die allgemeine Voraussetzung für die Deduction der Erscheinungen gewonnen. Doch setzt die letztere noch einige geometrische Hülfsmittel voraus, die in den letzten Capiteln des ersten Buchs in der von der Entwicklung der astronomischen Lehren völlig abweichenden synthetischen Form der Euklidischen Demonstration auseinandergesetzt werden. Nun beginnt erst mit dem zweiten Buch die eigentliche Deduction. Diese gliedert sich aber wieder in mehrere Theile, bei deren jedem sich sofort die Verification und Determination der Erscheinungen mit der Ableitung aus der vorangestellten Grundhypothese verbindet. In dieser Weise umfasst das zweite Buch die Theorie der täglichen Bewegungen der Erde, das dritte die der jährlichen Bewegungen und der secularen Veränderungen, das vierte die Bewegung des Mondes, das fünfte und sechste die Planetenbewegungen. Man findet hier überall das Beobachtungsmaterial an den geeigneten Stellen eingefügt in die Darstellung. Dennoch bringt es der logische Gang der letzteren mit sich, dass in der Auseinandersetzung der einzelnen Lehren die verschiedenen Stadien der analytischen Deduction meistens ihre normale Stellung bewahren.

Hatten wir hier das Beispiel einer Naturerklärung vor uns, die sich auf das engste an Thatsachen der Erfahrung anschliesst

und darum eines reichen Unterbaues von Inductionen sowie einer fortwährenden Beihülfe derselben bedarf, so liefert dagegen Descartes' Naturphilosophie den ersten umfassenden Versuch einer physikalischen Theorie, deren Voraussetzungen der inductiven Begründung fast ganz entbehren, so dass sie nur durch die nachträgliche Anpassung an die Erfahrung sich rechtfertigen können. Es wird gestattet sein, dieses Beispiel trotz seiner grossen Mängel hier anzuführen, da es für eine bestimmte Classe physikalischer Theorien eine vorbildliche Bedeutung gewonnen hat. In der That können wir zwei Hauptrichtungen unterscheiden, in denen sich seit den Anfängen der neueren Naturwissenschaft die physikalische Deduction bewegt. Die eine sucht im Sinne des grossen Werkes des Copernikus aus allgemeinen durch Induction gefundenen Erfahrungssätzen die Erscheinungen abzuleiten. Die bedeutendste Leistung in dieser Richtung, die übrigens für die Darstellung den synthetischen Weg wählt, sind Newtons Principien. Die andere sucht aus willkürlichen oder auf speculativem Wege gewonnenen Annahmen die Thatsachen der Erfahrung zu entwickeln. Hier ist Descartes' Naturphilosophie das Vorbild, das später in zahlreichen mathematischen Theorien Nachfolge gefunden hat. Die Begründung, die Descartes im Eingang des zweiten Theils seiner „Principien der Philosophie" seinen Voraussetzungen über die Materie zu geben sucht, nimmt denselben, physikalisch betrachtet, kaum den Charakter willkürlicher Hypothesen, abgesehen von der strengen Leugnung des leeren Raumes und der Annahme der qualitativen Gleichartigkeit und Constanz der Materie, für welche zwar nicht die von Descartes geltend gemachten Gründe, aber doch bestimmte Motive der Anschauung eintreten. (Vgl. Bd. I, S. 544.) Zu dieser allgemeinen Hypothese kommen dann noch drei Bewegungsgesetze, von denen die zwei ersten mit den Galilei'schen Principien der Trägheit und der geradlinigen Bewegung identisch sind, während das dritte eine falsche Anwendung des speculativen Gesetzes von der Erhaltung der Quantität der Bewegung ist. Aber diese Bewegungsgesetze spielen keine erhebliche Rolle in der nachfolgenden Deduction. Indem diese sich auf qualitative Betrachtungen beschränkt, macht sie im wesentlichen nur von den vorausgegangenen Annahmen über die Constitution der Materie Gebrauch. Nach einander werden die verschiedenen Erscheinungsgebiete, die kosmischen Bewegungen, die geophysischen Thatsachen, Schwere, Wärme, Licht, Magnetismus, abgeleitet, indem Descartes, gemäss dem Princip der analytischen Deduction, darzuthun sucht, dass sie sich aus dem aufgestellten Be-

griff der Materie mittelst der Einführung einiger besonderer Voraussetzungen über die Lage- und Bewegungsverhältnisse der Elemente als nothwendige Folgen ergeben. Mit der Erklärung der einzelnen Erscheinungen verbindet sich ausserdem noch eine Art von Verification, bei der auf die Uebereinstimmung mancher Nebenumstände mit der angenommenen Grundhypothese hingewiesen wird, wogegen die determinirende Induction in diesem Fall wegen der qualitativen Natur der Entwicklungen keine Stelle findet. Der wesentlichste Unterschied dieser Anwendungsform der analytischen Deduction von der vorigen besteht offenbar darin, dass hier die vorbereitende Induction völlig hinwegfällt, da den aufgestellten Voraussetzungen eine ihnen vor jeder einzelnen physikalischen Erfahrung zukommende Nothwendigkeit beigemessen wird. Die spätere Entwicklung der Physik hat jedoch speculative Begründungen, wie sie zu diesem Zweck Descartes anwendet, allmählich ausgeschlossen. Die gemachten Voraussetzungen wurden nun entweder als willkürliche Hypothesen behandelt, die ihre Rechtfertigung nachträglich erst durch die gelingende Deduction erlangen müssten, oder man übertrug abstracte Voraussetzungen der reinen Mechanik unmittelbar auf das physikalische Gebiet, indem man das Princip der Einfachheit, das bei der Gestaltung dieser Voraussetzungen massgebend gewesen war, auch auf die Modificationen anwandte, die mit ihnen zum Behuf der Anwendung auf bestimmte Erscheinungen nothwendig wurden.

Erst durch die Einführung der mathematischen Analysis ist es der analytischen Deduction möglich geworden, den Charakter der logischen Strenge, den bis dahin das synthetische Verfahren allein für sich in Anspruch nahm, mit den Vorzügen einer naturgemässen, ebensowohl der Untersuchung wie der Darstellung dienenden Gedankenentwicklung zu verbinden. Längere Zeit noch, nachdem die Analysis der Physik bereits völlig dienstbar geworden, dauerte es, bis das Vorurtheil, als ob die synthetische Methode allein die erforderliche Strenge gewähre, beseitigt war. Allmählich nur sprengte die mit den Hülfsmitteln der Analysis operirende Deduction die Form der synthetischen Demonstration. In den mechanischen und physikalischen Schriften eines Euler, eines Johann und Daniel Bernoulli spielt noch immer die Beweisführung in Euklidischer Manier eine hervorragende Rolle. In der Vorrede zu seiner Mechanik hat Euler dem synthetischen Verfahren vorgeworfen, dass es zwar von der Wahrheit der vorgetragenen Sätze überzeuge, dass es aber keine hinreichend klare Erkenntniss derselben verschaffe, und er hat

seine eigene Darstellung als eine analytische bezeichnet, was sie in der That nach dem vorherrschenden Verfahren in der Behandlung der einzelnen Probleme auch ist. Gleichwohl trennt er den Stoff in der hergebrachten Weise in eine Reihe lose an einander gefügter Definitionen, Lehrsätze und Aufgaben und verkümmert sich dadurch gerade einen der grössten Vorzüge der analytischen Methode, den Zusammenhang der Untersuchungen. Zugleich bemerkt man aber, dass diese Aehnlichkeit mit Euklid oder Newton nur eine äusserliche bleibt. Weitaus den grössten Raum nehmen Aufgaben und ihre Lösungen ein. Axiome fehlen ganz; dafür besitzen die wenigen Lehrsätze, die im Eingang der Hauptabschnitte vorkommen, zumeist einen axiomatischen Charakter, trotz der ihnen beigefügten ontologischen Scheinbeweise in Wolff'scher Art. Nun lässt sich die analytische Deduction eines einzelnen Falles aus den für ihn geltenden allgemeinen Gesetzen selbstverständlich immer leicht in die Form einer Problemstellung bringen, wo dann die Auflösung des Problems die eigentliche Deduction in sich schliesst. Dieses Uebergewicht der Aufgaben ist daher ein äusseres Zeichen dafür, dass hier eine Methode zu Grunde liegt, die sich nur gezwungen der synthetischen Form fügt. Das nämliche gilt von andern analytischen Arbeiten des vorigen Jahrhunderts.

Einer der Ersten, die mit Erfolg die Fesseln einer überlebten Form abstreiften, ist Lagrange, dessen „Mécanique analytique“ von massgebendem Einflusse auf die ganze nachfolgende Entwicklung der mathematischen Physik geworden ist. Obgleich sich dieses Werk nicht mit physikalischen Problemen im engeren Sinn beschäftigt, so mag wegen dieser mustergültigen Bedeutung für die jetzt herrschende Art der physikalischen Deduction hier der Gedankengang desselben skizzirt werden. Abgesehen von den historischen Einleitungen, die jedem der beiden Haupttheile, der Statik und Dynamik, vorangestellt sind, ist in diesen selbst die Entwicklung eine vollständig analoge. Zunächst wird auf dem Wege einer vorbereitenden Induction dort ein allgemeines Gesetz des Gleichgewichts, hier ein allgemeines Gesetz der Bewegung mathematisch formulirt, aus dem nun in der nachfolgenden Darstellung alle einzelnen statischen und dynamischen Gesetze analytisch entwickelt werden. Der abstracte Charakter der Mechanik bringt es in diesem Falle mit sich, dass die vorbereitende Induction nicht auf experimentelle Erfahrungen, sondern auf allgemeingültige Anschauungen sich berufen kann. Die Begründung, die Lagrange von dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten

gibt, hat durchaus den Charakter einer solchen Induction. Dieses Princip liefert ihm aber unmittelbar die allgemeine Formel für das Gleichgewicht irgend eines Systems, und mittelst einer weiteren Begriffsbestimmung über das Mass einer beschleunigenden Kraft, die sich auf eine ähnliche Induction stützt, gewinnt er im Eingang des zweiten Theils aus dem nämlichen Princip die Grundgleichung der Dynamik. Der ganze Aufbau der Mechanik vollzieht sich nun in der Form einer Analyse der an die Spitze gestellten Grundformeln. In der Statik wird die allgemeine Gleichung des Gleichgewichts zunächst auf die fortschreitende, dann auf die drehende Bewegung eines Systems angewandt; es wird das Gleichgewicht in Bezug auf den Schwerpunkt eines solchen untersucht, und es werden die Fälle nachgewiesen, in denen die allgemeine Function, welche die Gleichgewichtsbedingungen ausdrückt, zu einem Maximum oder Minimum wird. Hierauf werden analytische Methoden entwickelt, mittelst deren die verwickelten Bedingungen des Gleichgewichts irgend eines beliebigen Systems stets auf den einfachsten Fall eines freien Systems zurückzuführen sind. Daran reiht sich naturgemäss die Lösung der hauptsächlichsten einzelnen statischen Probleme, die wieder in dem verwickeltsten, darum aber in gewissem Sinne auch allgemeinsten Problem ihren Abschluss finden, nämlich in der Entwicklung der Gleichgewichtsbedingungen eines festen Körpers von beliebiger Gestalt, auf dessen sämmtliche Punkte irgend welche Kräfte einwirken. Alle diese Entwicklungen der Statik sind, abgesehen von der zu Grunde liegenden Induction, welche sich auf die unmittelbare Anschauung beruft und insofern einen mathematischen Charakter besitzt, noch von einem zweiten Begriff beherrscht, der aus einer mathematischen Abstraction hervorgegangen ist, von dem Begriff eines absolut festen Körpers. Wie dieser aus der empirischen Vorstellung der wirklichen festen Körper durch Verwandlung ihrer relativen in eine absolute Unveränderlichkeit entstand, so kann nun aber auch der flüssige Körper zu einer ähnlichen Abstraction den Anlass bieten, indem man die Flüssigkeit als eine Masse betrachtet, deren Theilchen absolut beweglich, aber nicht zusammendrückbar sind. In der That entwickelt Lagrange aus dieser Voraussetzung und aus der allgemeinen Formel des Gleichgewichts die Grundgleichungen der Hydrostatik. In ähnlicher Weise werden aus der Grundgleichung der Dynamik zunächst die allgemeinen Eigenschaften der Bewegung abgeleitet, indem die früher vielfach als selbständige Ausgangspunkte aufgestellten dynamischen Principien, wie das Princip der Erhaltung

des Schwerpunktes, der Flächen, der lebendigen Kräfte u. s. w., analytisch aus jener Grundgleichung abgeleitet werden. Hierauf wird sie in ein System von Differentialgleichungen zerlegt, durch welche die Anwendung auf die einzelnen Probleme, deren Behandlung den Schluss des ganzen Werkes bildet, erleichtert wird. Auch hier tritt endlich die Anwendung der allgemeinen dynamischen Gesetze auf eine Flüssigkeit als ein absolut labiles und incompressibles System von Theilchen hinzu. In dieser ganzen Darstellung besteht nun die Kunst der analytischen Deduction wesentlich darin, dass die allgemeinen Gleichungen durch angemessene Substitutionen in Ausdrücke für speciellere Gesetze verwandelt werden. Indem diese Substitutionen successiv den besonderen Bedingungen, die man sich eingeführt denkt, Rechnung tragen, entsteht die ganze Entwicklung aus der Zerlegung eines einzigen aus ursprünglicher Induction gewonnenen und in mathematische Form gebrachten Gesetzes. Es ist klar, dass eine derartige Ableitung einer umfangreichen Wissenschaft aus einem einzigen Grundgesetz ohne die Hülfsmittel der mathematischen Analysis unmöglich wäre. Indem sie es gestattet, den gebrauchten Symbolen die umfassendste Bedeutung zu geben, macht sie es gleichzeitig möglich, mit denselben alle Transformationen vorzunehmen, die durch die speciellen Probleme gefordert werden.

Die analytische Mechanik ist nicht bloss durch ihre formale Ausbildung das mustergültige Beispiel für die Anwendung der analytischen Deduction in der Physik geworden, sondern sie hat auch durch ihren materiellen Inhalt die Grundlage aller auf diesem Wege entwickelten physikalischen Theorien gebildet. Das regelmässig hierbei eingeschlagene Verfahren besteht darin, dass man die abstracten Voraussetzungen der Mechanik in dem durch die betreffenden Erscheinungen geforderten Sinne abändert, zugleich aber sich gemäss dem Princip der Einfachheit stets mit der möglichst kleinen Abänderung begnügt, um erst, wenn diese durch die Prüfung an der Erfahrung als nicht genügend befunden wird, zu weiteren Voraussetzungen zu schreiten. So gibt die Elasticitätstheorie die von der Mechanik festgehaltene Annahme absolut starrer Körper auf, indem sie voraussetzt, dass äussere Kräfte eine Verschiebung der kleinsten Theilchen eines festen Körpers hervorbringen. Sie bleibt aber bei der einfachsten Annahme stehen, da sie diese Verschiebung als so klein betrachtet, dass sie gegen die Dimensionen der Körper verschwindet und daher durch eine lineare Function der Entfernung der Theilchen ausgedrückt werden kann, während alle höheren Potenzen

verschwinden. Ebenso nimmt die Theorie der Capillarität an, dass die in der Hydrostatik vorausgesetzte absolute Beweglichkeit der Theilchen durch Cohäsionskräfte der Molecüle und durch Adhäsionskräfte gegenüber den Wandungen des Gefässes modificirt werde; sie macht aber hier wieder die einfachste Annahme, die möglich ist, um den Erscheinungen zu genügen, indem sie voraussetzt, dass beiderlei Molecularkräfte nur in unmessbar kleinen Entfernungen wirken, und dass daher nur die Wandschichte und die freie Oberfläche einer Flüssigkeit unmittelbar der Capillarattraction unterworfen seien. Die Theorie der Schallschwingungen geht zunächst von der bereits für die Elasticitätslehre massgebenden Vorstellung aus, dass die Theilchen eines Körpers durch bestimmte Kräfte in ihrer Gleichgewichtslage festgehalten werden; sie fügt derselben die einfache Annahme hinzu, bei der Entfernung aus der Gleichgewichtslage sei die beschleunigende Kraft dieser Entfernung proportional. Die so gewonnene Fundamentalgleichung kann nun in der verschiedensten Weise ergänzt, verändert und zerlegt werden, um auf complicirtere Fälle Anwendung zu finden. Sind die Schwingungsamplituden gross, so ersetzt man die einfache Annahme einer Proportionalität der beschleunigenden Kraft mit der Entfernung aus der Gleichgewichtslage durch die nächst einfache einer Function, welche neben der ersten auch die zweite Potenz der Entfernung enthält. Kommt der Widerstand der umgebenden Luft in Betracht, so fügt man der Fundamentalformel ein Glied bei, welches eine der Geschwindigkeit proportionale Verzögerung in der Richtung nach der Gleichgewichtslage ausdrückt, u. s. w. Wo die Deduction nicht an bestimmte der Beobachtung gegebene einfachste Erscheinungen anknüpfen kann, wie dies bei den Theorien von Wärme, Licht, Elektricität und Magnetismus der Fall ist, da kann es dann leicht geschehen, dass ganz verschiedene abstracte Voraussetzungen der reinen Mechanik die Ausgangspunkte für die Erklärung des nämlichen Erscheinungsgebietes abgeben. So bediente sich Fourier für seine Theorie der Wärmeleitung in festen Körpern einfach der hydrodynamischen Voraussetzungen, indem er die Wärme als eine bewegte Flüssigkeit betrachtete; Poisson verwerthete die Gesetze der Licht- und Wärmestrahlung, indem er die Leitung als einen Vorgang intramolecularer Strahlung behandelte. In der Theorie des Lichtes suchte man, nachdem die Undulationshypothese recipirt worden war, zunächst von der in der Mechanik bereits geläufigen Vorstellung der Schwingungsbewegung in einem continuirlichen Medium auszugehen. Als jedoch

die Entdeckung der Polarisation die Annahme der Transversalschwingungen erforderlich machte, führte diese auf die Voraussetzung von Aethermolecülen, die durch leere Zwischenräume getrennt seien. Die Bewegungsgleichungen eines solchen aus discreten Theilchen bestehenden Mediums nahmen dann eine Form an, die sie zur Ableitung wenigstens einer grossen Zahl der Lichterscheinungen besonders geeignet machte. Weiter noch wurde man im Gebiet der elektrischen und magnetischen Erscheinungen genöthigt sich von den einfachen Voraussetzungen zu entfernen, welche die Mechanik aus den allgemeinsten Eigenschaften der Naturkörper abstrahirt hat. Namentlich war dies der Fall, so lange man an der Annahme besonderer elektrischer Medien festhielt. Seitdem jedoch die elektromagnetische Lichttheorie und die Bestätigung einer grossen Anzahl ihrer Folgerungen die Einheit der elektrischen, der magnetischen und der Lichterscheinungen im höchsten Grade wahrscheinlich gemacht haben (S. 350), reduciren sich die in allen diesen Gebieten vorhandenen Schwierigkeiten wesentlich auf das allgemeine Problem der Aetherschwingungen, ein Problem dessen Lösung theils wieder mechanischer Art ist, theils aber auch, wie alle Aufgaben der Molecularmechanik, von dem endgültig wohl niemals zu schlichtenden Streit über die Eigenschaften und Kräfte der Materie abhängt.

Auf diese Weise ist die physikalische Theorie auf allen Gebieten aus den mathematischen Voraussetzungen der Mechanik durch eine allmähliche Hinzufügung weiterer Annahmen hervorgegangen, in deren Aufstellung man sich einerseits durch den Wunsch möglichster Annäherung an die abstracten mechanischen Vorstellungen, anderseits durch die Forderung der Uebereinstimmung der Folgerungen mit der Erfahrung bestimmen liess. Setzt man voraus, wie es die neuere Physik thut, dass die mechanischen Gesetze für alle Naturerscheinungen gültig sind, so kann eine solche Uebereinstimmung mit der Erfahrung nur dadurch bewirkt werden, dass die Physik an die Stelle der abstracten Annahmen über das Substrat der Bewegungen, welche die Mechanik im möglichsten Anschlusse an die Geometrie aufstellt, andere Annahmen über jenes Substrat sowie specifische Voraussetzungen über die Bewegungszustände desselben treten lässt. Der empirische Inhalt der physikalischen Forschung findet daher schliesslich seinen allgemeinsten Ausdruck in den hypothetischen Voraussetzungen über die Materie und in den Gesetzen für den Zusammenhang der Naturerscheinungen. Gleichwohl geht schon aus jener gemischten Entstehungsweise der

physikalischen Deductionen hervor, dass sowohl der Begriff der Materie wie die allgemeinsten Naturgesetze nicht schlechthin Abstractionen aus der Erfahrung, sondern dass sie diejenigen Abstractionen sind, welche den mathematischen und mechanischen Anforderungen in möglichst hohem Masse entsprechen. Insofern nun in Geometrie und Mechanik der Antheil der reinen Anschauung an der äussern Erfahrung enthalten ist, finden in dieser Abhängigkeit zugleich die früher erörterten erkenntnisstheoretischen Beziehungen des Substanz- und Causalbegriffs zu den Anschauungsformen ihren geläuterten wissenschaftlichen Ausdruck. (Vgl. Bd. I, S. 614 ff.)

## 2. Die Hülfsmittel der physikalischen Forschung.

Der natürliche Anfang aller physikalischen Beobachtung ist die unmittelbare Sinneswahrnehmung. So bewundernswerth aber auch unsere Sinneswerkzeuge den praktischen Zwecken des Lebens angepasst sind, so wenig genügen sie den Bedürfnissen exacter Beobachtung. Durch die willkürliche Beweglichkeit des Auges, durch seine leichte Accommodation für Nähe und Ferne, durch die combinirte Function beider Augen bei der Tiefenwahrnehmung ist das Gesichtsorgan in unübertrefflicher Weise dazu geschickt, uns eine rasche Orientirung über die räumlichen Verhältnisse der umgebenden Aussenwelt zu ermöglichen. Vermöge der wunderbaren Vorrichtungen des inneren Ohrs zur Zerlegung des Schalls und zur Dämpfung der Schallschwingungen vermag unser Gehörorgan mit erstaunlicher Leichtigkeit eine grosse Zahl gleichzeitiger Klänge zu unterscheiden und dem schnellsten Wechsel auf einander folgender Schalleindrücke ohne Verwirrung zu folgen. Aber hinsichtlich der Schärfe des Bildes, der Vermeidung der Farbenzerstreuung, der Feinheit der Einstellung ist das Auge ein optisches Werkzeug von mässiger Güte, und zu genauen räumlichen Messungen schon deshalb ungeeignet, weil es meistens nicht gestattet, die zu messenden Objecte direct zu vergleichen, sondern sich mit ihrer successiven Schätzung begnügen muss. Ebenso verschafft uns das Gehör nur ungenaue Vorstellungen von der Stärke des Schalls, und über die Form der Klangbewegungen gibt es unmittelbar keinen Aufschluss. Noch weniger genügen die übrigen Sinne den Ansprüchen exacter Messung, und diese Mangelhaftigkeit der äusseren Werkzeuge der Beobachtung wird schliesslich verstärkt durch die Unsicherheit, mit der unser Bewusst-

sein den zeitlichen Verlauf der Erscheinungen quantitativ zu schätzen vermag. Dadurch bleibt aber eine der wichtigsten Aufgaben der physikalischen Forschung, die Zeitbestimmung der Ereignisse, fast ganz unerledigt. So wird von allen Seiten her die Naturbeobachtung zur Erfindung künstlicher Werkzeuge angetrieben, die unsere Sinne bei der Untersuchung der Erscheinungen unterstützen sollen. Dieses Bedürfniss ist dort am frühesten fühlbar geworden, wo die natürlichen Hülfsmittel am meisten zu wünschen übrig lassen, bei den schliesslich von psychologischen Factoren abhängigen Bestimmungen der Ausdehnung räumlich oder zeitlich getrennter Objecte und der relativen oder absoluten Dauer der Ereignisse. Massstab und Cirkel, die einfachsten Werkzeuge räumlicher Messung, diese frühesten Hülfsmittel der Mathematik, sind daher zugleich die ersten Apparate physikalischer Forschung; ihnen zunächst kommt der Gnomon, die primitive Sonnenuhr, als Werkzeug der Zeitmessung. Daran schliesst sich die Erfindung des Archimedes, die Wage, das Instrument der Massebestimmung der Körper. Viel später und zumeist unter dem directen Einflusse der experimentellen Richtung der neueren Physik sind die mannigfaltigen Vorrichtungen entstanden, welche, wie Fernrohr und Mikroskop, unmittelbar die Leistungsfähigkeit unserer Sinne zu verstärken suchen. Die logische Betrachtung wird diese historische Reihenfolge einigermassen umkehren müssen, indem sie die Hülfsmittel voranstellt, die der physikalischen Beobachtung dienen, und an sie erst jene anschliesst, welche bei der Messung der Naturerscheinungen wirksam sind. Beide greifen natürlich vielfach in einander ein, denn jede exacte Beobachtung wird zur Messung, die ihrerseits nichts anderes als eine Form der Beobachtung ist. Immerhin bezeichnet die Möglichkeit des bloss qualitativen Gebrauchs eine Grenze, welche die allgemeineren Hülfsmittel der Beobachtung von den specielleren der Messung scheidet. Die Unterordnung der Messung unter die Beobachtung kommt aber darin zum Ausdruck, dass die Hülfsmittel der Beobachtung häufig unmittelbar oder mit geringen Abänderungen zugleich als Messungswerkzeuge Anwendung finden.

### a. Die physikalische Beobachtung.

Mit Rücksicht auf den nächsten Zweck, dem die verschiedenen Hülfsmittel der Beobachtung dienen, lassen sich dieselben in zwei Hauptclassen bringen. Die erste enthält Vorrichtungen, welche die

Leistungsfähigkeit unserer Sinne zu erhöhen streben; die zweite Veranstaltungen, welche dazu bestimmt sind, die Erscheinungen eines bestimmten Sinnesgebietes dergestalt umzuwandeln, dass sie der Wahrnehmung eines andern Sinnes, dem genauere Hülfsmittel zu Gebote stehen, zugänglich werden.

Die Hülfsmittel zur Analyse der Wahrnehmungen theilen sich nach den zwei Sinnesorganen, die bei der Beobachtung eine hervorragende Rolle spielen, in optische und in akustische. Unter ihnen sind die ersteren von überwiegender Bedeutung, der Herrschaft entsprechend, die der Gesichtssinn in unserer Auffassung der Aussenwelt ausübt. Durch die optischen Hülfsmittel kann entweder eine blosse Schärfung der natürlichen Sinneswahrnehmung erstrebt werden, oder es kann sich dabei um eine Zerlegung der Erscheinungen handeln, deren unsere Sinnesorgane an und für sich unfähig sind. Im ersten Fall ist die Analyse der Wahrnehmungen eine rein physiologische: die beobachteten Erscheinungen behalten vollständig den Charakter, den sie bei dem natürlichen Sehen besitzen; dieses wird nur befähigt, die Verhältnisse der räumlichen Anordnung der Objecte genauer zu bestimmen und daher Details dieser Anordnung zu erkennen, die der natürlichen Wahrnehmung entgehen. Fernrohr und Mikroskop sind die zwei wichtigen Hülfsmittel, die diesen Zwecken dienen. Im zweiten Fall ist die Analyse der Wahrnehmungen eine physikalische: die Erscheinungen werden durch künstliche Hülfsmittel in Elemente zerlegt, die der physiologische Vorgang des Sehens niemals zu unterscheiden vermöchte, zu deren genauer Auffassung dann aber weiterhin die Hülfsmittel der ersten Classe Anwendung finden können. Hierher gehören die Vorrichtungen zur spektroskopischen Zerlegung des Lichtes und zur Untersuchung der Polarisationserscheinungen. Naturgemäss sind die Hülfsmittel der ersten Art früher als die der zweiten ausgebildet worden. Jene sind zwar aus experimentellen Erfahrungen hervorgegangen, dienen aber selbst noch ausschliesslich der Beobachtung; bei diesen schliesst jede einzelne Anwendung ein Experiment in sich, und nur durch die regelmässige Form, in der sich das experimentelle Verfahren mit der Beobachtung verbindet, erhalten die in Rede stehenden Hülfsmittel die Bedeutung von Beobachtungsinstrumenten, die ebenso wie Mikroskop oder Fernrohr in jedem Augenblick der Untersuchung zu Gebote stehen.

Die Kenntniss der Wirkungen convexer und concaver Linsengläser und das an dieselbe sich anschliessende Studium der Gesetze

der Lichtbrechung führten so unmittelbar zu der Construction des Fernrohrs und des Mikroskops, dass diese Instrumente fast gleichzeitig und, wie es scheint, unabhängig an mehreren Orten erfunden wurden, daher bekanntlich über dem ersten Urheber der Idee ein gewisses Dunkel schwebt. Diese Idee ist bei beiden Instrumenten die nämliche. Wie schon ein einfaches convexes Brillenglas das Auge befähigt, entfernte Objecte in grössere Nähe zu bringen und sie dadurch deutlicher zu erkennen, so will das optische Instrument dies theils für die Objecte selbst, theils und vorzüglich aber für die Bilder möglich machen, die durch die Sammlung der von ihnen ausgehenden Strahlen entworfen werden. Unterstützt wird die so ermöglichte Zergliederung durch die hinzutretende Ablenkung der Lichtstrahlen, welche eine Vergrösserung des Bildes bewirkt. Die zergliedernde Kraft des Instrumentes beruht ganz und gar auf der ersten dieser Bedingungen, auf der Annäherung des Bildes oder des Objectes selbst an das Auge. Die weitere Vergrösserung soll nur dem auf diese Weise gewonnenen Bilde die für die deutliche Auffassung der einzelnen Theile erforderliche Ausdehnung geben. Diese gemeinsamen Zwecke werden bei beiden Instrumenten nur durch die verschiedenen Aufgaben denen sie dienen modificirt. Die Objecte des Fernrohrs stehen nicht in der Macht des Beobachters. Hier kann nicht der Gegenstand selbst, sondern nur das von ihm auf dioptrischem oder katoptrischem Wege entworfene Bild in beliebige Nähe gerückt werden; um ein klares Bild zu gewinnen, müssen zugleich möglichst viele der von dem Object ausgehenden Lichtstrahlen durch Linsengläser oder Concavspiegel von bedeutender Oberfläche gesammelt werden. Das mikroskopische Object dagegen steht ganz unter der Herrschaft des Beobachters. In den einfachsten Fällen (bei der Lupe oder dem einfachen Mikroskop) kann daher die durch eine Convexlinse ermöglichte Annäherung des Objectes an das Auge den Zwecken der Zergliederung genügen. Bei dem zusammengesetzten Mikroskop wird, ähnlich wie bei dem Fernrohr, zunächst durch ein System von Sammellinsen ein reelles Bild entworfen, das dann erst durch ein direct vor das Auge gebrachtes Convexglas betrachtet wird. Aber da das Object beliebig genähert und in seitlicher Richtung verschoben werden kann, so geniesst man hier den Vortheil, sich mit einer sehr kleinen Oberfläche der Objectivlinse begnügen und daher die brechende Kraft derselben durch verstärkte Krümmung erhöhen zu können. Beiden Instrumenten gemeinsam sind dagegen diejenigen Vorrichtungen, welche die Schärfe der entworfenen Bilder

zu erhöhen streben, indem sie theils durch Ablenkung der Randstrahlen, theils durch geeignete Combination von Linsensystemen die durch die Kugelgestalt der Linsen bedingte Lichtzerstreuung sowie die prismatische Wirkung der Gläser beseitigen. Auf diesen grossentheils dem späteren Fortschritt der Optik zu dankenden Verbesserungen beruht hauptsächlich die Vervollkommnung der neueren Instrumente. Da sich aber die durch die unzureichende Sammlung der Lichtstrahlen entstehenden Uebelstände aus nahe liegenden Gründen bei den mikroskopischen Objecten in viel empfindlicherer Weise geltend machen als bei den teleskopischen, so gehört die umfangreichere wissenschaftliche Anwendung des Mikroskops erst einer verhältnissmässig neuen Zeit an. Das Fernrohr wurde sofort nach seiner Erfindung zu dem mächtigsten Werkzeug in den Händen der Astronomen. Nicht nur lieferte es in den Beobachtungen der Jupitermonde und der Lichtgestalten der Venus durch Galilei, der Rotationen des Mars durch Cassini die wichtigsten Beweismittel für das Copernikanische System, sondern bald wurde es auch durch die Einfügung des Fadenkreuzes und in Verbindung mit dem Mikrometer ein Messungswerkzeug von bis dahin nicht erreichter Genauigkeit. Als solches ist es dann zu terrestrischen und physikalischen Zwecken ein unentbehrliches Hülfsmittel geworden. Das Mikroskop hat nach der ersten Aufsehen erregenden Entdeckung, die es vermittelte, der Auffindung der Spermatozoen durch Leuwenhoek, durch die zahlreichen Täuschungen, zu denen es verführte, zunächst mehr Verwirrung gestiftet als gefördert. Erst unserem Jahrhundert war es vorbehalten, die grosse Wichtigkeit dieses Instrumentes für die verschiedensten Zweige der Naturlehre ans Licht zu stellen.

Der neueren Entwicklung der experimentellen Physik gehören auch durchgehends diejenigen optischen Hülfsmittel an, die nicht eine Schärfung der Wahrnehmung, sondern eine *physikalische Analyse der Erscheinungen* bezwecken. Wie Teleskop und Mikroskop auf die Gesetze der Lichtbrechung durch Linsengläser, so stützt sich das *Spektroskop* auf die Gesetze der Farbenzerstreuung durch Prismen. Die instrumentelle Anwendung ist hier der physikalischen Kenntniss der prismatischen Wirkungen verhältnissmässig spät erst nachgefolgt, da sich jene Anwendung nicht auf die Farbenzerstreuung als solche, sondern auf gewisse mit derselben verbundene Erscheinungen stützte. Diese Erscheinungen bestanden in den dunkeln Fraunhofer'schen Linien des Sonnenspektrums sowie in den hell leuchtenden Linien und Bändern, welche glühende Metall-

dämpfe durch das Prisma gesehen darbieten. Erst als durch Kirchhoff und Bunsen diese beiden Thatsachen mit einander in Verbindung gebracht waren, als man erkannt hatte, dass ein dunkles Linienspektrum aus einem hellen regelmässig in Folge der Absorption der Strahlen eines glühenden Gases durch die abgekühlten Theile des nämlichen Gases entsteht, wurde die prismatische Zerlegung des Lichtes ein zu den verschiedensten Zwecken verwendbares Untersuchungshülfsmittel. Bald dient dieselbe einfach zur Erkennung der in einer gegebenen Lichtquelle enthaltenen Farbenmengungen; bald soll mit Hülfe der hellen oder dunkeln Linien entschieden werden, ob das ausgesandte Licht zu einem Emissions- oder Absorptionsspektrum Veranlassung gibt, um hieraus Rückschlüsse auf die physikalische Constitution des lichtgebenden Körpers und die Beschaffenheit des Verbrennungsprocesses zu machen; bald soll durch die Feststellung der Lage der hellen oder dunkeln Linien und ihre Vergleichung mit den Spektrallinien bekannter Stoffe die chemische Constitution eines Körpers ermittelt werden. Endlich kann bei durchsichtigen Substanzen die Veränderung, die der Durchtritt des Lichtes durch dieselben in dem Spektrum einer bekannten Lichtquelle hervorbringt, theils zur Erkenntniss der Absorptionswirkungen, theils wieder zur chemischen und physikalischen Charakterisirung Verwenwendung finden.

Während das Spektroskop das Licht unmittelbar in seine einzelnen Brechbarkeitsstufen zerlegt, sucht man bei den Polarisationsapparaten über die in einem Lichtstrahl vorhandenen Schwingungsrichtungen auf dem Wege der Ausschliessung Aufschluss zu gewinnen. Der Grund hierfür liegt darin, dass wir Licht von verschiedener Brechbarkeitsstufe unmittelbar durch die Farbe zu unterscheiden vermögen, dass dagegen verschieden polarisirtes Licht dem Auge vollkommen gleich erscheint. Objectiv kann daher die Schwingungsrichtung des Lichtes nur daran erkannt werden, dass ein Körper, der das Licht polarisirt, Licht von entgegengesetzter Schwingungsrichtung zurückhält. Da nun in dem gewöhnlichen Licht Schwingungen von allen möglichen Richtungen vorkommen, so ist es für die Entscheidung der Frage, ob irgend ein durchsichtiger Körper polarisirende Eigenschaften besitze, stets erforderlich, dass das zu seiner Prüfung verwendete Licht durch eine polarisirende Vorrichtung bereits auf eine Schwingungsrichtung zurückgeführt sei. Weil aber ausserdem die untersuchten Körper in den dünnen Schichten, in denen sie noch eine hinreichende Durchsichtig-

keit besitzen, die polarisirende Eigenschaft nur in geringem Grad zeigen, so muss dem Polariskop eine solche Einrichtung gegeben werden, dass es die geringste Veränderung in der Schwingungsrichtung noch deutlich angibt. Zu diesem Zweck wird also das gewöhnliche Licht durch zwei polarisirende Vorrichtungen geleitet, zwischen denen das Untersuchungsobject eingeschaltet ist. Sind nun beide Vorrichtungen so gegen einander gedreht, dass die zweite das durch die erste polarisirte Licht vollständig auslöscht, so wird die leiseste Veränderung, welche die eingeschaltete Substanz in der Schwingungsrichtung hervorbringt, durch eintretende Licht- und Farbenerscheinungen angezeigt. Das Wesen dieses Verfahrens besteht also darin, dass es die Wirkungen, die ein Körper auf die Schwingungsrichtung des ihn durchsetzenden Lichtes ausübt, ermittelt, indem es zunächst einen Grenzzustand herstellt, von dem aus jede Veränderung leicht zu erkennen ist. Dadurch ist zugleich das Princip an die Hand gegeben, welches eine Messung der polarisirenden Wirkung gestattet, da sich die eingetretene Veränderung der Schwingungsrichtung stets durch eine veränderte Stellung der Polarisationsapparate zu einander compensiren lässt. Der Grad der zur Wiederherstellung jenes Grenzzustandes erforderlichen Stellungsänderung lässt dann unmittelbar auf die polarisirende Wirkung zurückschliessen. Durch die Anwendung dieses Princips ist der Polarisationsapparat das feinste Hülfsmittel für die qualitative und quantitative Untersuchung der Molecularstructur der Körper geworden, das namentlich in solchen Fällen, wo dieselbe bestimmte Richtungsunterschiede erkennen lässt, wie bei den Krystallen oder organischen Geweben, von unschätzbarem Werthe ist.

Sehr spät erst ist die Ausbildung akustischer Werkzeuge zur Analyse der Wahrnehmung den optischen Hülfsmitteln nachgefolgt. Kaum lässt sich der einfachen Verwendung der Schallreflexion und der Leitung durch feste Körper, wie sie zum Zweck der Verstärkung des Schalls und seiner Uebertragung in grössere Entfernung seit lange im Gebrauch sind, die Bedeutung eines wissenschaftlichen Hülfsmittels beilegen. Erst das Telephon und das Mikrophon haben, wie ihre Namen schon andeuten, für das Ohr das nämliche zu leisten gesucht wie das Teleskop und das Mikroskop für das Auge. Aber dabei zeigt sich freilich die Inferiorität des Schalls als physikalischen Hülfsmittels darin, dass bei diesen Apparaten Elektricität und Magnetismus herbeigezogen werden müssen, um die erwünschte Fernewirkung und Verstärkung der Schalleffecte

hervorzubringen. Auch ist es, so gross die praktische Bedeutung dieser neuen Hülfsmittel ist, kaum wahrscheinlich, dass sie für wissenschaftliche Untersuchungen weiter als zu gewissen nebensächlichen Zwecken Anwendung finden werden. Denn das Telephon kann unserm Ohr immer nur Schallquellen erschliessen, die sich in leicht zugänglicher Ferne befinden, und das Mikrophon vermag nur Eindrücke zu verstärken, nicht neue Wahrnehmungen unserm Ohr zuzuführen. Ebenso sind die Hülfsmittel zur physikalischen Analyse der akustischen Erscheinungen hier von verhältnissmässig unvollkommener Beschaffenheit, abgesehen von dem Sinnesorgan selbst, welches durch seine natürliche Fähigkeit der Klanganalyse dem Auge überlegen ist. Einigermassen lässt sich die Unterstützung der Klanganalyse durch verstärkende Resonatoren, welche auf bestimmte Töne abgestimmt sind, den spektroskopischen und polariskopischen Hülfsmitteln vergleichen. Mit den letzteren namentlich haben sie das Princip gemeinsam, gewisse Schwingungsarten vor andern zu bevorzugen. Aber da sie die übrigen Klangbestandtheile nicht völlig ausschliessen und die ursprüngliche Stärke des bevorzugten Tones in unbestimmter Weise vergrössern, so haben sie fast nur als Hülfsmittel, welche die Uebung des Sinnesorganes in der Unterscheidung der Töne fördern helfen, eine Bedeutung.

Verräth sich schon in dem Uebergewicht der optischen Werkzeuge vor denen der übrigen Sinne die grössere Bedeutung des Gesichtssinns, so tritt diese herrschende Rolle noch deutlicher hervor bei jenen Hülfsmitteln der physikalischen Beobachtung, welche die Erscheinungen eines bestimmten Sinnesgebiets dergestalt umwandeln, dass sie der Wahrnehmung eines andern einer genaueren Auffassung fähigen Sinnes zugänglich werden. Diese *Hülfsmittel zur Transformation der Erscheinungen* sind nämlich durchweg dahin gerichtet, andersartige Sinneseindrücke umzuwandeln in *Eindrücke des Gesichtssinns*. So gewinnen wir die Vorstellung der Schwere der Körper ursprünglich durch den Tastsinn. Aber die *Wage* ersetzt diesen Eindruck durch ein Gesichtsbild, welches eine genaue Schätzung des Gleichgewichts zweier schwerer Körper und auf diesem Wege eine quantitative Abstufung aller Körper in Bezug auf ihre Schwere gestattet. Nur die Schwere gasförmiger Körper, wie der Luft, lässt sich, wie sie der Wahrnehmung durch den Tastsinn in der Regel unzugänglich ist, so auch auf dem gewöhnlichen Wege der Wägung im allgemeinen nicht bestimmen. Aber das Barometer verwandelt den Druck der Luft in eine Erscheinung des Gesichts-

sinns. Bei dem Queksilberbarometer besteht diese in der in einer luftleeren Glasröhre emporsteigenden Quecksilbersäule, bei dem Aneroidbarometer in den durch den äusseren Luftdruck bewirkten Krümmungsänderungen einer kreisförmig gebogenen und luftleeren elastischen Röhre, welche Aenderungen durch die Uebertragung auf ein Zeigerwerk deutlicher sichtbar und messbar gemacht werden. Aehnlich wird in dem Thermometer die Ausdehnung einer Flüssigkeit durch die Wärme benützt, um ein räumliches Mass der Temperaturänderungen zu gewinnen. Bei dem Thermogalvanometer wird der nämliche Zweck durch eine doppelte Transformation erreicht, indem man zuerst durch einen Temperaturunterschied einen elektrischen Strom erzeugt, der dann seinerseits wieder die Ablenkung einer Magnetnadel hervorbringt. Für die praktische Beobachtungskunst ist die Wirkung des elektrischen Stromes auf den Magnet vor allem deshalb von unschätzbarem Werthe geworden, weil es sich hier um die Herstellung eines sichtbaren Vorgangs handelt, der leicht wahrzunehmen und in seinen quantitativen Veränderungen zu verfolgen ist. Uebrigens beruhen auch alle andern Hülfsmittel für die Beobachtung elektrischer Wirkungen auf irgend einer Umwandlung in sichtbare Bewegungsvorgänge, mögen nun diese, wie bei dem Elektrometer und der elektrischen Drehwage, Bewegungen der elektrisirten Körper selbst sein oder, wie bei der Volta'schen Wasserzersetzung, der Galvani'schen Zuckung des Froschschenkels und der Beobachtung des elektrischen Lichtbogens, auf bestimmten Transformationen in chemische, physiologische und optische Erscheinungen beruhen. So bewundernswerth die Fähigkeit des Ohres ist, eine Menge gleichzeitiger Klänge deutlich zu unterscheiden, so kann doch die physikalische Analyse der Schallschwingungen die Darstellung derselben in räumlichen Bildern nicht entbehren, wobei die Bewegungen schwingender Körper entweder unmittelbar oder mit Hülfe gewisser Wirkungen, die sie auf andere leicht bewegliche Körper hervorbringen, sichtbar gemacht werden. So liefert der Vibrograph, indem er die Aufzeichnung der Schwingungen eines starren Körpers auf einen mit gleichförmiger Geschwindigkeit rotirenden Cylinder besorgt, bleibende Bilder der vergänglichen Erscheinung, an denen sich sowohl die Schnelligkeit wie die Form der Schwingungen studiren lässt. Bei dem von Lissajous erfundenen Vibrationsmikroskop werden die schwingenden Bewegungen eines Körpers, z. B. einer Violinsaite, durch einen an ihm angebrachten lichtreflectirenden Punkt kenntlich gemacht, den man durch ein Mikroskop beobachtet,

welches, an einer Stimmgabel befestigt, parallel der Saitenlänge in regelmässige Schwingungen versetzt wird. Man erhält so das Bild einer aus zwei zu einander senkrechten Schwingungen resultirenden Bewegung, aus der sich, da die Schwingungsform der Stimmgabel bekannt ist, diejenige der Saite reconstruiren lässt. Bei der Erzeugung von Klangfiguren dienen die Formen, in denen sich der auf schwingende elastische Platten gestreute Sand gruppirt, zur Erkennung der Knotenlinien, aus denen dann wiederum Rückschlüsse auf die Schwingungsform der Platte möglich werden.

### b. Die Messung der Naturerscheinungen.

Von dem Streben, die Wahrnehmungen der übrigen Sinnesgebiete in Gesichtserscheinungen umzuwandeln, ist die Beobachtung vor allem auch in allen den Fällen geleitet, wo sie Hülfsmittel zur Messung der Erscheinungen zu gewinnen sucht. Die exacten Masse, über welche die Physik verfügt, zerfallen in Raummasse, Gewichtsmasse und Zeitmasse. Da aber die Feststellung der beiden letzteren stets auf räumliche Messungen zurückführt, so besteht jede exacte Messung in der Bestimmung der räumlichen Eigenschaften von Gewichtsobjecten oder, da die geometrischen Elemente aller räumlichen Beziehungen die gerade Linie und der Winkel sind, schliesslich in der Messung von geraden Linien und Winkeln. Diese vielseitige Verwendung der einfachen geometrischen Masselemente würde freilich nicht möglich sein, wenn uns nicht durch die Empfindungen des Tast- und Muskelsinnes die Kraftvorstellung gegeben wäre, und wenn nicht allen Wechsel der Wahrnehmungen die Zeitvorstellung begleitete. Aber diese Vorstellungen entziehen sich jeder genaueren unmittelbaren Messung. Sie sind gerade zureichend, um das Bedürfniss nach exacten Kraft- und Zeitmassen zu erwecken; aber dieses Bedürfniss beginnt erst in dem Moment befriedigt zu werden, wo sich, vermöge jener Tendenz unsere ganze Anschauung der Aussenwelt in Gesichtserscheinungen umzuwandeln, die Zeit sowohl wie das Gewicht in räumlichen Vorstellungen fixirt haben. Für die Zeit fällt dieses Ereigniss in die frühesten Anfänge des menschlichen Denkens, für das Gewicht, das uns noch heute der nächste unserer unmittelbaren Wahrnehmung zugängliche Repräsentant des Kraftbegriffs ist, geschah der nämliche Schritt sogleich bei der ersten Begründung der wissenschaftlichen Statik durch Archimedes.

Zu astronomischen und geodätischen Zwecken ist seit uralter Zeit das Längenmass für die Messung der geradlinigen Entfernung und die Kreistheilung für die Messung des Winkels im Gebrauch gewesen. Auch nöthigten jene Zwecke frühe schon über das primitive Verfahren des gewöhnlichen Lebens, welches nur mittelst der unmittelbaren Anlegung des Messungswerkzeuges an den Gegenstand eine Messung auszuführen weiss, hinauszugehen, um mit Hülfe der Anbringung geeigneter Visirpunkte die Winkeldistanzen enfernter Objecte direct zu ermitteln, und um ihre linearen Entfernungen durch die Combination solcher Winkelmessungen mit der Ausmessung leicht zugänglicher näherer Lineardistanzen auf dem Wege der geometrischen Construction und der Rechnung zu bestimmen. Gleichwohl befanden sich alle diese Messungsmethoden noch auf ihrer Kindheitsstufe, da man jede beliebige Messungsaufgabe mit zureichender Genauigkeit erledigt glaubte, wenn sie auf die unmittelbare Vergleichung mit einem gegebenen Massstab zurückgeführt war. Ein erster Schritt zur Verfeinerung solcher Messungen geschah, als man durch verschiedene Hülfsmittel die Schätzung der Bruchtheile der Masseinheiten zu verbessern suchte, was zuerst von den Astronomen nicht lange vor der Zeit Tychos durch die Ziehung von Transversalen zwischen den entgegengesetzten Endpunkten der benachbarten Theilungslinien eines Massstabes versucht wurde. Aber es ist bezeichnend, dass das vollkommenere, noch jetzt gebrauchte Hülfsmittel dieser Art, der Nonius, erst aufkam, als gleichzeitig auch das Fernrohr durch die Einfügung des Fadenkreuzes zu Messungszwecken Verwendung fand. Noch mehr ist die Einführung anderer Hülfsmittel zur Verfeinerung der Messungen direct an die Benützung der optischen Instrumente, des Fernrohrs und des Mikroskops, gebunden gewesen. Die Erhöhung der Leistungsfähigkeit des Auges liess nach einem Hülfsmittel suchen, welches die Genauigkeit der Einstellung auf die Visirpunkte vergrösserte. Dieses Hülfsmittel wurde in der Mikrometerschraube gefunden, deren Vortheil auf der Transformation einer verhältnissmässig umfangreichen Kreisbewegung in eine sehr kleine lineare Bewegung beruht, so dass sie mittelst der Vorbeiführung des Massstabes an dem Objecte noch minimale Bruchtheile der Masseinheit abzulesen gestattet. Auf der Anwendung der Mikrometerschraube beruhen daher wiederum die Hülfsmittel zur Anfertigung der genauesten und feinsten Massstäbe, wie sie durch die Benützung der vergrössernden optischen Instrumente zu Messungen erforderlich geworden sind. Je empfindlicher diese Hülfsmittel der

Messung sich gestaltet haben, um so mehr musste man zugleich bestrebt sein, die bei jeder Messung gleichwohl unvermeidlichen Fehler durch wiederholte Beobachtungen und durch die Ermittelung und Berücksichtigung der vorhandenen Fehlerquellen zu eliminiren. So wird es begreiflich, dass, während in der Periode Hipparchs die Fehler der astronomischen Messungen noch halbe Winkelgrade und zu Tychos Zeiten einige Minuten betragen konnten, sie heute höchstens um den Werth einer Secunde zu schwanken pflegen. Ganz in entsprechender Weise hat sich aber die physikalische Messung auf allen Gebieten vervollkommnet, und mit Hülfe des Mikroskops und des Mikrometers ist überdies eine genaue Messung zahlreicher Objecte möglich geworden, die wegen ihrer Kleinheit für eine frühere Zeit unmessbar und häufig selbst unsichtbar waren.

Im Gegensatze zu diesen hauptsächlich durch die Verwendung der optischen Instrumente bedingten Umgestaltungen, welche die Längen- und Winkelmessung erfuhren, ist das Hülfsmittel für die Bestimmung der bewegenden Kraft der Körper, die Wage, im Princip unverändert geblieben: sie ist nur in der technischen Ausführung vervollkommnet worden, und ihr Anwendungsgebiet hat sich stetig erweitert. Zunächst lag es nahe, das Princip des Hebels mit dem ebenfalls von Archimedes gefundenen Gesetz der Gewichtsabnahme der Körper in Flüssigkeiten zu verbinden, um auf diese Weise die zur absoluten Gewichtsbestimmung der Körper dienende Hebelwage gleichzeitig als hydrostatische Wage zu specifischen Gewichtsbestimmungen zu benützen. Beruht in beiden Fällen die Messung des Gewichts auf der mit dem Auge leicht erkennbaren Herstellung der Gleichgewichtslage des Wagebalkens, so konnte nun aber auch umgekehrt der Grad der Ablenkung aus dieser Lage dem nämlichen Zweck dienen, ein Princip welches bei der Zeigerwage und in verschiedentlich modificirter Form auch bei der Federwage und dem Aräometer oder, unter Benützung von Flüssigkeiten zur Druckbestimmung, bei dem Barometer und Manometer Anwendung findet. Eine wichtige Umgestaltung der Wage für wissenschaftliche Zwecke ist endlich die Drehwage, bei welcher die Drehung eines elastischen Fadens, an welchem ein gleicharmiger Hebel aufgehängt ist, zur Messung irgend welcher anziehender oder abstossender Kräfte, die an dem einen der beiden Hebelarme angreifen, benützt wird. Auf das Princip der Drehwage führt die Anwendung drehbarer Magnete für die Messung elektrischer und magnetischer Fernewirkungen zurück. Während die gewöhnliche Hebelwage wegen der

Forderung des Gleichgewichtszustandes, die bei ihr erfüllt sein muss, nur für die Messung constant bleibender Gewichte dienen kann, machen diejenigen Formen der Wage, die statt dessen den Grad der Abweichung aus einer bestimmten Gleichgewichtslage benützen, eine unmittelbare Verfolgung etwaiger Veränderungen in der Zeit möglich, und manche von ihnen, wie das Manometer, die Drehwage, der Magnetstab, gestatten ausserdem eine ähnliche Verwendung der Gleichgewichtsmethode wie bei der gewöhnlichen Hebelwage. Alle diese Instrumente, die auf das Princip der Wage zurückführen, bedienen sich, welcher Art die Naturkräfte auch sein mögen, deren Wirkungen gemessen werden sollen, schliesslich der Vergleichung mit bestimmten Gewichtsgrössen fester oder flüssiger Körper. Theils geschieht dies unmittelbar, wie bei der gewöhnlichen Hebelwage, dem Barometer und Manometer, dem auf einer Spitze drehbaren Magnete, theils auf indirecte Weise, wie bei der Federwage, der Drehwage und dem an drehbaren Fäden aufgehängten Magnete. In diesen Fällen wird der elastische Widerstand, der zu überwinden ist, wenn Bewegungen von bestimmter Grösse zu Stande kommen sollen, zunächst in Gewichtseinheiten bestimmt. Auf diese Weise bildet die Schwere das gemeinsame Mass für alle andern einer exacten Messung zugänglichen Naturkräfte. In der That ist sie dazu auch in bevorzugter Weise geeignet wegen ihrer absoluten Constanz an einem gegebenen Beobachtungsorte und wegen ihrer verhältnissmässig geringen und leicht zu bestimmenden Unterschiede in den verschiedenen Gegenden der Erde. Gerade aber weil das Gewicht das gemeinsame Mass abgibt für alle andern Naturkräfte, kann durch dasselbe die Kraft der Schwere selbst nicht gemessen werden. Indem diese auf jedes Theilchen eines schweren Körpers die nämliche Wirkung ausübt, ist die Grösse des Gewichts immer nur ein Mass der Masse oder der Menge der dem Einfluss der Schwere unterworfenen in einem Körper vorhandenen Materie. Will man dieses Mass überdies unabhängig machen von den räumlichen Verschiedenheiten der Schwerkraft auf der Erdoberfläche, so muss es überall auf die nämliche Grösse reducirt werden. Darum dient in der rationellen Mechanik nicht das Gewicht $P$, sondern der Quotient $\frac{P}{g}$ als Mass der Masse. Die Grösse $g$, welche die Intensität der Schwere an einem gegebenen Ort bezeichnet, wird aber durch die Beschleunigung gemessen, die ein Körper in einer gegebenen Zeit durch die Wirkung der Schwere erfährt. Bei diesem Punkte führt daher die Intensitätsmessung wieder

zurück auf eine Längenmessung, mag man nun unmittelbar den Weg ermitteln, der in Folge der erlangten Beschleunigung von einem fallenden Körper in der Zeiteinheit zurückgelegt wird, oder mag man diesen Weg aus der Länge des einfachen Pendels berechnen, das eine Schwingung in der Zeiteinheit der Secunde vollendet.

Durch ihre Constanz am Beobachtungsorte und durch die Leichtigkeit, mit der ihre Wirkungen in einfache räumliche Masse umgesetzt werden können, empfiehlt sich die Schwere in so hohem Grade als Massstab aller Naturkräfte, dass eine andere für uns in dieser Rolle kaum denkbar ist. Dieses Verhältniss bedingt aber wieder eine eigenthümliche Ausnahmestellung. Die Intensität der Schwere selbst kann auf statischem Wege niemals ermittelt werden. Die Wage gestattet immer nur die Massen, d. h. die Mengen der Materie zu messen, auf welche die constante Schwerkraft wirkt. Für andere Naturkräfte dagegen ist eine statische Messung ausführbar, indem man einfach die schweren Massen bestimmt, die durch sie im Gleichgewichte gehalten werden. In allen Fällen, wo die Intensität der Naturkräfte die zureichende Constanz besitzt, macht diese statische Methode die grösste Genauigkeit möglich, weil sie nur eine einzige räumliche Messung, nicht aber ausserdem noch eine Zeitbestimmung erfordert. Auf diese Weise dient die Schwerkraft zu zwei Arten der Intensitätsbestimmung: zunächst ist sie bei der Gewichtsbestimmung der Körper das geläufige Mass für die Menge der ponderabeln Materie, und sodann wird sie, indem beliebige andere Naturkräfte in Gewichtsgrössen bestimmt werden, zum allgemeinen Mass der Kräfte, die ausser der Schwere auf die ponderable Materie wirken können. Dagegen ist bei der Messung der Schwere selbst nur die einer beliebigen Masse in einer gegebenen Zeit ertheilte Beschleunigung verwendbar: darum muss in diesem Falle stets mit der räumlichen Messung eine Zeitmessung verbunden werden. Aber hier bietet nun die absolute Constanz der Schwere an dem Beobachtungsorte den Vortheil dar, dass die Zeit, während deren die Wirkungen gemessen werden, beliebig lang genommen werden kann, wie dies in der That bei den Pendelversuchen geschieht, so dass dadurch wieder der Nachtheil der doppelten Messung ausgeglichen wird.

Durch die Zurückführung aller andern Naturkräfte auf das Mass der Schwerkraft ist es der physikalischen Forschung erst möglich geworden, von den qualitativen Eigenthümlichkeiten, welche die einzelnen Erscheinungen für die Sinneswahrnehmung darbieten, ganz zu abstrahiren, und indem diese Reduction auf die Schwere die Idee

der Einheit der Naturkräfte praktisch vorausnahm, hat sie nicht nur den Begriff der Transformation vorbereitet, sondern auch, nachdem sich dieser in der Erfahrung bestätigt hatte, demselben sofort die erforderlichen Massmethoden zur Verfügung gestellt. Ausserdem ist durch die Reduction auf die Schwere und die Erkenntniss der Transformationen ein neuer Begriff entstanden, welcher sich für viele Anwendungen geeigneter erweist als der Kraftbegriff, mit dem er sich früher deckte, nämlich der Begriff der Energie. Unter ihr versteht man allgemein die Fähigkeit zur Herbeiführung einer Ortsveränderung von Massen oder, da wir eine solche Ortsveränderung als Arbeit bezeichnen, kürzer ausgedrückt: die Fähigkeit zur Leistung von Arbeit. Diese Fähigkeit ist nothwendig immer selbst an bestimmte Massen gebunden, sei es dadurch, dass dieselben in einer Bewegung begriffen sind, die sie an andere Massen mittheilen können, sei es dadurch, dass sie in eine Lage gebracht sind, in welcher die Schwere oder eine andere Naturkraft eine bewegende Wirkung auf sie auszuüben strebt. Im ersten dieser Fälle wird die Energie als actuelle oder kinetische, im zweiten als potentielle oder auch als Energie der Lage bezeichnet. Die kinetische Energie fällt in ihrer mechanischen Bedeutung mit dem früher erörterten Begriff der „lebendigen Kraft" zusammen, und sie wird daher durch das der letzteren entsprechende Product $\frac{1}{2} mv^2$ gemessen (S. 306).

Neben dem Begriff der Energie behält aber derjenige der Kraft die ihm seit der Begründung der Mechanik beigelegte Bedeutung, welche Newton in die Definition zusammenfasste: „Kraft ist das gegen einen Körper ausgeübte Bestreben, seinen Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung zu ändern." Die Energie ist eine durch die Reduction auf die Schwere veranlasste Unterform dieses Kraftbegriffs. Wir nennen eine Kraft dann Energie, wenn wir von den Bedingungen ihres Ursprungs absehen und nur auf ihre Messung durch das Gleichgewicht oder die Bewegung schwerer Massen Rücksicht nehmen. Die uniforme Messung ist es, die hier jene Abstraction von den Entstehungsbedingungen veranlasst, und die zugleich die Nützlichkeit des so gebildeten Begriffs bedingt. Bei der wirklichen Messung der Erscheinungen kann, eben weil dieselbe mittelst der Schwere geschieht, immer nur die Energie in Betracht kommen. Aus diesem Grunde hat sich denn auch die Anwendung des allgemeineren Begriffs der Kraft auf diejenigen Fälle zurück-

gezogen, in denen wir bei der Bezeichnung der Bedingungen einer bestimmten Bewegungserscheinung die Reduction auf die Schwere ausser Acht lassen. Dies geschieht aber vorzugsweise dann, wenn wir ausdrücklich den specifischen Charakter einer einzelnen Bewegungsursache oder des übereinstimmenden Grundes eines allgemeinen Erscheinungsgebietes hervorzuheben wünschen. In diesem Sinne unterscheiden wir etwa die Dampfkraft und die Wasserkraft als verschiedene Motoren, oder bezeichnen wir ganz allgemein Licht, Wärme, Elektricität und die Schwere selbst als verschiedene Naturkräfte.

Insofern die Schwere nur eine Naturkraft unter andern ist, kann man nun aber auch den so entstandenen Begriff der Energie verallgemeinern, indem man die thermische, elektrische, magnetische, chemische u. s. w. Energie der mechanischen Bewegungsenergie coordinirt und die Aufgabe der physikalischen Forschung lediglich darauf richtet, die quantitativen Beziehungen zu ermitteln, in denen diese verschiedenen Energieformen in einander übergehen können*). Diese Auffassung bietet den Vortheil dar, dass sie die Theorie der Transformationen der Naturkräfte von allen Voraussetzungen über die Beschaffenheit der Materie, insbesondere auch von dem Postulat, dass alle Naturvorgänge auf mechanische Bewegungsvorgänge zurückführbar seien, unabhängig macht. Dies ist bei dem gewöhnlichen, an den mechanischen Begriff der lebendigen Kraft sich anlehnenden Energiebegriff nicht der Fall. Denn derselbe setzt nicht bloss voraus, dass die übrigen Formen actueller Energie eventuell in Bewegungsenergie umgewandelt werden könnten, sondern dass sie selbst in letzter Instanz Bewegungsenergie seien. Er macht dadurch bestimmte Hypothesen über die materiellen Elemente, welche die Träger der Energie sind, sowie über die Beschaffenheit ihrer Bewegungen erforderlich. Anderseits hat aber jene allgemeinere Auffassung des Energiebegriffs den Nachtheil, dass sie auf eine jede anschauliche Darstellung desselben verzichtet, ausgenommen bei der Bewegungsenergie schwerer Körper, wo eine solche unmittelbar in der Beobachtung gegeben ist. Nun kann zweifellos ein zeitweiliger

*) Eine solche allgemeinere Auffassung des Energiebegriffs wird bereits gestreift von G. Helm, Die Lehre von der Energie, Dresden 1887, und Max Planck, Das Princip der Erhaltung der Energie, Leipzig 1887, S. 96 ff. Eingehender ist sie durchgeführt worden von W. Ostwald in seinen „Studien zur Energetik", Sitzungsber. der Leipziger Ges. der Wiss. 1891, S. 271, 1892, S. 211 ff., und Lehrbuch der allgemeinen Chemie, 2. Aufl. II, S. 1—51.

Verzicht auf das Postulat der Anschaulichkeit, das, wie oben (S. 278 ff.) erörtert, von Anfang an das treibende Moment für die mechanische Naturanschauung gewesen ist, nützlich sein, namentlich so lange die mechanischen Hypothesen über gewisse Naturvorgänge noch der zureichenden Sicherheit entbehren. Indessen ist es unleugbar, dass gerade der Zusammenhang der verschiedenen Erscheinungsgebiete, wie er in dem Princip der Erhaltung der Energie seinen nächsten quantitativen Ausdruck findet, immer wieder zur Aufstellung mechanischer Vorstellungsweisen und eben damit auch zu einer Umdeutung anderer Energieformen, wie der thermischen, der elektrischen, in mechanische Bewegungsenergie herausfordert. So ist die mechanische Wärmetheorie zunächst durch die Beobachtung der Beziehungen zwischen Volum und Temperatur gasförmiger Körper veranlasst worden, das Wesen der Wärme in mechanischen Bewegungen der Theilchen zu erblicken*). So führt ferner die elektromagnetische Lichttheorie auf Schwingungsbewegungen eines materiellen Mediums zurück; oder für Denjenigen, der dieser Theorie seine Zustimmung versagt, ergibt sich wenigstens aus dem gesammten Zusammenhang der Lichterscheinungen, vor allem aus der Existenz der Interferenzerscheinungen, die Nothwendigkeit der Voraussetzung irgend einer oscillirenden Bewegung. Da aber eine Bewegung ohne ein Substrat das sich bewegt undenkbar ist, so ist damit auch die Ableitung der Lichterscheinungen aus einem mechanischen Vorgang ein unumgängliches Erforderniss**). Damit ist in allen diesen Fällen die Forderung einer Umsetzung jener bloss begrifflich fixirten Energie-

---

*) Vgl. das auf S. 74 f. angeführte Beispiel einer analytischen Deduction aus diesem Gebiete.

**) Allerdings hat Ostwald der letzteren Annahme zu entgehen gesucht, indem er die „strahlende Energie“ nicht auf die Schwingungen eines materiellen Mediums zurückführt, sondern als eine in oscillirender Bewegung befindliche Energie definirt. Gerade dieser aus einem anschaulichen und einem rein begrifflichen Bestandtheil zusammengesetzte Doppelbegriff scheint mir aber schlagend zu beweisen, dass der Energiebegriff selbst eine Zerlegung fordert, die auf Elemente der Anschauung zurückführt. Eine reale Bewegung kann nur als die Ortsveränderung eines im Raum gegebenen realen Substrates definirt werden. Dieses reale Substrat kann sich uns bloss durch Kraftwirkungen, die von ihm ausgehen, oder durch Kräftefunctionen, als deren Träger wir es betrachten, verrathen. Aber dass solche bloss begrifflich zu fixirende Kräftefunctionen selbst sich bewegen, dies scheint mir eine Forderung zu sein, die nicht erfüllt werden kann, ohne dass man sich irgend ein Substrat hinzudenkt.

werthe in die anschauliche Form der Bewegungsenergie von selbst gegeben, und wenn die Unsicherheit der Theorien eine eindeutige Feststellung letzterer Art in manchen Fällen, namentlich bei den elektrischen und magnetischen Energiewerthen, noch nicht möglich macht, so kann dies jene Forderung selbst nicht aufheben. Auch ist vom logischen Standpunkte aus hervorzuheben, dass man sich über den eigenthümlichen Charakter der Evidenz, den das Energieprincip mit gewissen allgemeinen Voraussetzungen der Mechanik theilt, nur Rechenschaft zu geben vermag, wenn man sich alle Energie an ein bestimmtes unveränderlich im Raum gegebenes Substrat gebunden denkt, dessen Veränderungen in Lageänderungen seiner Theile, und dessen Wirkungsfähigheit demnach allein in Bewegungsenergien bestehen kann, wogegen die rein begriffliche Fixirung des Energiebegriffs genöthigt sein würde, die Triftigkeit der Gründe, vermöge deren wir dem Energiegesetz vor seiner speciellen Nachweisung in jedem einzelnen Fall bereits eine allgemeine Wahrscheinlichkeit zugestehen, völlig zu leugnen, im Widerspruch mit dem Einflusse, den jenes Princip thatsächlich als heuristische Hypothese von axiomatischem Charakter in der Entwicklung der Wissenschaft ausgeübt hat*).

---

*) Vgl. hierzu die Formulirung dieses Princips als Axiom, Bd. I, S. 621. Freilich hat man geglaubt, den Satz von der Erhaltung der Energie aus andern Sätzen, und zwar namentlich aus dem so genannten Satz „von der Unmöglichkeit des Perpetuum mobile“ beweisen zu können: so Helmholtz (Ueber die Erhaltung der Kraft. Berlin 1847, S. 7 ff.), Mach (Geschichte und Wurzel des Satzes von der Erhaltung der Arbeit. Prag 1872, S. 36 ff.) und M. Planck (Das Princip der Erhaltung der Energie, Leipzig 1887, S. 138 ff.). Dieser Beweis ist aber logisch betrachtet nicht ein inductiver Beweis, wie Planck meint, sondern ein Cirkelbeweis, da der Satz von der Unmöglichkeit des Perpetuum mobile in der allgemeinen physikalischen Bedeutung, in der er hier gemeint ist, vollständig den Satz von der Erhaltung der Energie bereits einschliesst. In der Polemik, die Planck bei dieser Gelegenheit gegen die Behauptung führt, dass das Energieprincip a priori gewiss sei, übersieht er gerade den Fall, der bei den allgemeinen Voraussetzungen der Mechanik und Physik stattfindet: diese Voraussetzungen, vom Trägheitsprincip an bis zum Satz von der Erhaltung der Energie, sind nämlich nicht Axiome im mathematischen Sinne, d. h. durch die unmittelbare Anschauung evidente Sätze, sondern sie sind Hypothesen von einem den Axiomen verwandten Charakter, insofern ihnen der Versuch, sie anschaulich verwirklicht zu denken, a priori eine grössere Wahrscheinlichkeit verleiht als andern etwa möglichen Hypothesen. Auf diese Weise erklärt sich ebensowohl die der Erfahrung vorauseilende Entdeckung solcher Sätze wie die immer bestehen bleibende Forderung, dass sie mit der Erfahrung in Uebereinstimmung stehen. (Vgl. Bd. I, S. 544, 618 ff.) Den Bedenken, welche Edm.

Jene Reduction auf die Schwere, aus der mit dem Begriff der Energie auch das Princip der Erhaltung der Energie hervorgegangen ist, setzt übrigens voraus, dass die verschiedenen Formen der Energie, die gemessen werden sollen, den erforderlichen Transformationen zugänglich sind. Diese Bedingung trifft nun bei zwei Erscheinungsgebieten, welche sich an und für sich in hohem Grade zur Anwendung exacter Beobachtungen eignen, noch nicht zu, nämlich beim Schall und beim Licht. Die Messung von Schall- und Lichtintensitäten ist darum bis jetzt hinter der Messung der Intensität anderer Naturkräfte zurückgeblieben. Entweder beschränkt man sich darauf, aus theoretischen Voraussetzungen Werthe abzuleiten, ohne sie durch Beobachtung zu verificiren, oder man sieht sich auf die unmittelbare Vergleichung von Empfindungsstärken, also auf das ursprünglichste und ungenaueste Verfahren der Intensitätsmessung angewiesen. Um die Unterscheidung unter diesen beschränkenden Bedingungen möglichst zuverlässig zu machen, wendet man dann das nämliche statische Princip an wie bei der gewöhnlichen Form der Gewichtsbestimmung durch die Wage: man bestimmt z. B. bei den photometrischen Vorrichtungen die Stärke zweier Lichtquellen, indem man durch Abstufung ihrer Entfernungen von einem auffangenden Schirm zwei einander gleich erscheinende Lichtintensitäten hervorbringt, worauf sich das gesuchte Intensitätsverhältniss aus dem Verhältniss der Quadrate der Entfernungen der beiden Lichtquellen ergibt. Da das Licht hierbei keine merkliche Transformation in eine andere Bewegungsform erfährt, so ist eine solche Bestimmung immerhin so genau, als es die Schätzung mit dem Auge gestattet. Es ist übrigens kaum zu zweifeln, dass sich mit dem weiteren Fortschritt der Physik auch die Messung der Schall- und Lichtstärken der allgemeinen Tendenz zur Messung der Kraftgrössen mittelst der

---

Koenig (Die Entwicklung des Causalproblems, II, Leipzig 1890, S. 448) gegen eine axiomatische Auffassung des Energiegesetzes geltend gemacht hat, dass man vor der Entdeckung Mayers einen Verlust von Energie für möglich, einen Verlust von Materie aber für unmöglich hielt, und dass wir das Quantum der Materie nach dem Gewicht und nicht nach Energiewerthen messen, kann man, wie ich glaube, entgegenhalten, dass die historische Reihenfolge nicht immer über den logischen Zusammenhang der Principien entscheidet (wobei übrigens zu bemerken ist, dass als Princip a priori das Energiegesetz schon vor Mayer, namentlich von Leibniz ausgesprochen wurde), und dass das Mass der Substanz mittelst der Kraft als ein einseitiges und unzulängliches betrachtet werden kann, welches durch das Mass der Wirkungsfähigkeit ergänzt werden muss.

Bewegungen schwerer Massen nicht entziehen wird. Der Zeitpunkt dazu dürfte gekommen sein, sobald eine geeignete Transformation gefunden ist, welche die Benützung des elektrischen Stroms und seiner Wirkungen auf den Magnet und dadurch abermals die Hülfe des Princips der Wage gestattet. Uebrigens ist leicht ersichtlich, wie selbst jene unvollkommene Form der Intensitätsmessung, welche die unmittelbare Vergleichung von Empfindungsstärken benützt, keine Ausnahme von der Regel bildet, dass die gerade Linie und der Winkel die Elemente aller exacten Messungen sind. Denn das wirkliche Mass für die Vergleichung wird hierbei immer erst durch die Abmessung der Entfernungen gewonnen, in denen sich die verschiedenen Licht- oder Schallquellen befinden müssen, wenn der subjective Eindruck der gleiche sein soll.

In einer neuen und eigenthümlichen Form tritt uns schliesslich diese Uebertragung in das räumliche Mass bei der dritten und letzten Classe allgemeiner Messungshülfsmittel entgegen, bei den Zeitmassen. Eine objective Zeitmessung setzt eine Bewegung voraus, bei der in gleichen Zeiten gleiche Räume zurückgelegt werden. Ist diese Voraussetzung erfüllt, so liefert die Eintheilung des durchlaufenen Raumes unmittelbar die entsprechende Theilung der Zeit. Eine dauernde Bewegung solcher Art ist vermöge der begrenzten Beschaffenheit unseres Gesichtsraumes nur in periodischer Form möglich, so also, dass der bewegte Körper in regelmässigen Zeitzwischenräumen immer wieder zu dem nämlichen Ort zurückkehrt. Diese Bedingung bot sich schon für die Anfänge des menschlichen Denkens in den periodischen Bewegungen der Gestirne dar. Ihre Verwendung zu Zeitmassen war daher eine so nahe liegende Handlung, dass man sich der Willkürlichkeit derselben nicht einmal bewusst wurde, sondern geneigt war in der regelmässigen Bewegung der Gestirne die objective Existenz der Zeit selbst zu erblicken. Man kann es als ein Glück für die Wissenschaft betrachten, dass dieses sich alsbald mit einem zweiten Vorurtheil verband, ohne welches der Gedanke einer objectiven Zeitmessung kaum möglich gewesen wäre. Die Zeit einer Erdrotation ist viel zu gross, als dass sich aus unmittelbarer Anschauung eine Gewissheit darüber gewinnen liesse, ob jede solche Periode der andern gleich ist, und die Bewegung der Gestirne erfolgt für unsere Wahrnehmung viel zu langsam, als dass sich ohne andere Hülfsmittel entscheiden liesse, ob sie eine gleichförmige ist. Nichts desto weniger ist bis in die neueren Zeiten niemals den Menschen ein Zweifel an der Gleichförmigkeit der täg-

lichen Bewegungen der Gestirne gekommen*). Erst diese Voraussetzung aber lieferte die Möglichkeit einerseits zur Eintheilung des Tages in kleinere Zeittheile und anderseits zur Messung grösserer Zeiträume. Für jene bot der Stand der Sonne, der aus der Länge oder Richtung des Schattens nach empirischen Regeln leicht zu bestimmen war, für diese boten die Perioden der Mond- und der Sonnenbewegung die nächstliegenden und zugleich wegen ihrer relativen Constanz die bleibenden Hülfsmittel dar. Aber so gut dieselben im ganzen, nachdem sie nur erst durch die geeigneten Correctionen in Uebereinstimmung gebracht waren, den Zwecken der Zählung grösserer Zeiträume entsprachen, so wenig genügten sie dem Bedürfniss nach einer Messung kleiner Zeittheile, wie es sich einigermassen schon im praktischen Leben und späterhin noch in viel höherem Grade bei physikalischen Beobachtungen geltend machte. Die Sonnenuhr erlaubt im günstigsten Fall Unterschiede von einigen Minuten zu schätzen, und sie versagt ihre Dienste ganz, wenn die Sonne nicht sichtbar ist. Frühe schon verfiel man daher zu solchen Zwecken auf die Benützung der Schwerkraft. Die Wasser- und Sanduhren, deren man sich bereits im Alterthum bediente, sind noch in den Anfängen der neueren Physik zu physikalischen Zwecken benützt worden, und im wesentlichen der nämliche Gedanke lag den um dieselbe Zeit aufkommenden Räderwerken zu Grunde, bei denen man Gewicht und Reibungswiderstände so gegen einander abgeglichen hatte, dass die Fallbewegung des ersteren zu einer annähernd gleichförmigen wurde. Eine rationellere Verwendung der Schwerkraft begann erst mit der von Huygens gelehrten Benützung des Pendels zur Regulation der Bewegungen. Während man bei den Wasseruhren mit gleichem Niveaustand und bei den Räderwerken mit Widerständen der niemals in exacter Weise zu lösenden Aufgabe einer völlig gleichförmigen Bewegung in unzureichenden Annäherungen zu entsprechen gesucht, ersetzte die Pendeluhr die continuirliche durch eine stossweise Bewegung und begnügte sich mit der exacten Gleichheit der einzelnen durch die Pendelschläge abgetrennten Zeittheile. Alle neueren Chronometer und Chronoskope haben dieses Princip adoptirt, auch wenn sie sich nicht direct eines Gewichts zur Erzeugung der Bewegung und des Pendels zur Regulirung derselben bedienen. Statt des Gewichts kann eine gespannte Feder das Räder-

*) Ueber die dieser Voraussetzung zu Grunde liegenden logischen Postulate vgl. Bd. I, S. 488 ff.

werk in Bewegung setzen, und statt des Pendels kann ein oscillirendes Schwungrad, dessen Bewegungen ebenfalls durch Federkraft unterhalten werden, den Gang der Uhr reguliren. Ein anderes Hülfsmittel, welches namentlich bei rasch ablaufenden, zur Messung sehr kleiner Zeittheile dienenden Chronoskopen Anwendung findet, ist ein schwingender Stab oder eine Stimmgabel, die durch ihre gleich bleibende Tonhöhe die Gleichmässigkeit der Bewegung sichern. Nicht selten zieht man es aber auch für physikalische Zwecke vor, auf den gleichmässigen Gang des Uhrwerks zu verzichten und mittelst der Registrirung von Pendelschlägen oder Stimmgabelschwingungen auf einer bewegten Fläche, auf welcher gleichzeitig die Momente des Eintritts bestimmter Ereignisse markirt werden, die absolute oder relative Zeitdauer derselben zu messen. Auf diese Weise ist allen zeitmessenden Hülfsmitteln von der Bewegung der Gestirne bis zur schwingenden Stimmgabel die Eigenschaft des periodischen Verlaufs der Bewegungen gemeinsam. Je kleiner aber die Zeittheile sind, die gemessen werden sollen, um so kürzer muss die Periode der Bewegung sein, die als Mass dient. Mit der Feinheit des Hülfsmittels steigen ferner die Vorsichtsmassregeln, durch welche die genauen Zeitangaben desselben sichergestellt werden müssen; denn einerseits werden die objectiven Störungen der Bewegung bedeutender, und anderseits erreichen die subjectiven Fehler der Messungen relativ grössere Werthe. Während die Veränderung, welche die tägliche Bewegung der Erde durch die vorhandenen Reibungswiderstände erfährt, erst nach vielen Jahrtausenden merklich wird, bedürfen die periodischen Bewegungen des Pendels, der Unruhe, des schwingenden Stabes entweder einer fortwährenden Berücksichtigung der Temperatur und wo möglich einer sorgfältigen Compensation der Temperatureinflüsse sowie einer häufig wiederholten Reduction auf das unveränderlich gegebene Mass der Sternzeit, wenn die Angaben der Instrumente vergleichbar bleiben sollen. Die Messung kleinster Zeittheilchen endlich findet an den Schranken unserer sinnlichen Wahrnehmung ihre Grenzen. Wir können diese Grenzen verengern, indem wir die Zeitbestimmung der Ereignisse dadurch, dass wir diese sich selbst registriren lassen, unabhängig machen von der schwankenden Aufmerksamkeit des Beobachters, und wir können für die Ausmessung der auf solche Weise in eine Raumstrecke übertragenen Zeit noch mikroskopische und mikrometrische Hülfsmittel herbeiziehen. Damit ist aber auch hier das äusserste Mass der Genauigkeit erreicht. Indem jede exacte Messung, auch die Ge-

wichts- und die Zeitmessung, schliesslich auf räumliche Messungen zurückführt, ist naturgemäss von der Schärfe, mit der wir eine räumliche Strecke durch das Auge unter Herbeiziehung optischer Hülfsmittel zu messen vermögen, alle Messung der Naturerscheinungen abhängig.

### c. Die mathematischen Hülfsoperationen der physikalischen Untersuchung.

Auf die grosse Bedeutung, welche die mathematische Analysis als Werkzeug der physikalischen Deduction besitzt, wurde bereits hingewiesen (S. 383 ff.). Die so entstandene rein mathematische Behandlung der Physik, durch welche sich diese zu einem Zweig der angewandten Analysis erhoben hat, ist aber allmählich aus der fortwährenden Benützung geometrischer und arithmetischer Operationen hervorgewachsen, deren die physikalische Untersuchung schon bei der inductiven Verarbeitung der durch die Beobachtung gegebenen Thatsachen bedarf. Während die analytische Behandlung der physikalischen Probleme nur gewisse Voraussetzungen der Beobachtung entnimmt und diese wieder zur Bestätigung gewisser Folgerungen sowie zur numerischen Feststellung bestimmter Grössen herbeizieht, im übrigen aber durchaus in der Form einer selbständigen mathematischen Untersuchung verläuft, greifen jene mathematischen Hülfsoperationen in wechselnder Weise in den Gang der Untersuchung ein; sie werden immer nur für einzelne Zwecke, die sich aus den Resultaten der Beobachtung oder des Experimentes ergeben, benützt, und ihre Anwendung gleicht daher vollständig derjenigen der instrumentellen Hülfsmittel, welche die genaue Messung der Erscheinungen ermöglichen. In der That bilden die mathematischen Hülfsoperationen eine unerlässliche Ergänzung der physikalischen Messungswerkzeuge, weil die selbstverständliche Bedingung für die Anwendung der letzteren darin besteht, dass die zu messenden Erscheinungen unsern instrumentellen Hülfsmitteln unmittelbar zugänglich sind. Wo dies nicht der Fall ist, da kann eine Messung nur dann ermöglicht werden, wenn die Erscheinungen mit andern direct messbaren in bestimmten gesetzmässigen Beziehungen stehen, welche einen Ausdruck in mathematischer Form zulassen, und aus welchen sie in Folge dessen mittelst bestimmter mathematischer Operationen abgeleitet werden können. Ueberall daher, wo physikalische Grössen nur auf diesem *indirecten* Wege gemessen werden können, sind

mathematische Hülfsoperationen die Werkzeuge solcher Messung. Weil aber nur an verhältnissmässig wenige unter den Erscheinungen, auf deren genaue Kenntniss es uns ankommt, unsere verschiedenen Masse direct angelegt werden können, so fällt die Mehrzahl der physikalisch wichtigen Grössen einer indirecten Messung anheim, die in der mathematischen Ableitung der gesuchten Grössen aus andern durch die directe Messung gefundenen besteht.

Da alle physikalischen Masse auf Raummasse zurückführen, so bildet die geometrische Construction den natürlichen Ausgangspunkt dieser Hülfsoperationen, und erst an sie schliessen sich die arithmetischen Verfahrungsweisen an, durch welche es schliesslich möglich wird, die gefundenen Grössen in bestimmten Zahlwerthen auszudrücken. Bei der Anwendung der geometrischen Hülfsconstructionen stützt sich die Physik einfach auf die Sätze der Geometrie, die es möglich machen, aus gewissen Bestimmungsstücken eines Raumgebildes von bekannten Eigenschaften andere zu finden, welche nicht unmittelbar gegeben sind. Die wissenschaftliche Physik ist hier zunächst bei der Feldmesskunst in die Lehre gegangen. Freilich aber bedurfte sie bald genauerer Methoden als diese, um die Beziehungen zwischen den Elementen aller räumlichen Messung, dem Winkel und der Geraden, in ausgiebigster Weise zu verwerthen. Aus diesem Bedürfniss sind zuerst innerhalb der Alexandrinischen Astronomie die trigonometrischen Methoden entstanden, die man bald auch zur Berechnung der Bogen und Winkel auf der Kugel anwenden lernte*).

Indem die neuere Physik nicht bloss die bleibenden räumlichen Lageverhältnisse der Körper, sondern die mannigfaltigen Formen ihrer Bewegung vor das Forum ihrer Untersuchungen zog, konnten ihr die für den ersteren Zweck erfundenen trigonometrischen Methoden nicht mehr genügen, sondern sie musste die reicheren Hülfsmittel verwerthen, welche die Geometrie der Curven, namentlich der Kegelschnittslinien, gewährte. Nichts desto weniger blieb noch lange Zeit, gemäss dem natürlichen Entwicklungsgang dieser Hülfsoperationen, den geometrischen Constructionen die eigentliche Lösung der Probleme vorbehalten, und es wurde dadurch zugleich für die Darstellung der Untersuchungsergebnisse das Festhalten an der Euklidischen Demonstrationsform unterstützt. Erst jene Verwerthung der arithmetischen Hülfsmittel, welche die analytische Geometrie geschaffen, eröffnete

*) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I, S. 312, 349.

einem freieren Ineinandergreifen geometrischer und analytischer Methoden die Bahn; insbesondere aber wirkte in dieser Beziehung der herrschend gewordene analytische Gang der physikalischen Deduction auf die specielleren Hülfsoperationen zurück, die gelegentlich in dem Verlauf einer inductiven Untersuchung benützt werden. Es konnte hier um so leichter eine der analytischen Deduction verwandte Behandlungsweise Platz greifen, als jede durch die Rechnung vermittelte indirecte Messung eben nur insoweit auf Induction beruht, als sie auf eine ursprüngliche directe Messung zurückführt, wogegen das mathematische Verfahren selbst in diesen Fällen immer in einer Deduction besteht. So ist es schliesslich nur noch der Umfang, in welchem man die Deduction handhabt, und die Frage, ob sie bloss auf der sicheren Grundlage bestimmter Messungen, oder ob sie ausgehend von irgend welchen hypothetischen Voraussetzungen geübt wird, wodurch sich die mathematischen Hülfsoperationen der physikalischen Untersuchung von der allgemeineren Form der mathematisch-physikalischen Deduction unterscheiden.

Ursprünglich beschränkte sich nun die Anwendung der Hülfsoperationen ganz und gar auf die Ermittelung indirect gegebener Grössen, indem man voraussetzte, dass jeder directen Messung an und für sich unmittelbare Wahrheit zukomme. Eine solche Voraussetzung ist aber irrig, weil dabei keine Rücksicht genommen ist auf die mannigfachen Fehlerquellen der Beobachtungen, die in der Beschaffenheit unserer Sinnesorgane, in der Ungenauigkeit der instrumentalen Hülfsmittel sowie in der unzureichenden Aufmerksamkeit des Beobachters ihre Quellen haben. Die wiederholte Messung eines und desselben Gegenstandes musste frühe schon durch die Schwankungen der Resultate diese Unsicherheit der einzelnen Beobachtung verrathen, und sie führte zugleich auf jene einfache arithmetische Hülfsoperation, deren wir uns in den einfachsten Fällen noch heute zur Erzielung genauerer Ergebnisse bedienen, auf die Bildung des arithmetischen Mittels. Die gesteigerten Ansprüche der neueren physikalischen Beobachtungskunst zeigten aber bald, dass dieses Verfahren für exacte Zwecke meistens unzureichend ist. Zunächst werden durch dasselbe alle die Fehler nicht eliminirt, die aus constanten Fehlerquellen unserer Sinnesorgane oder instrumentellen Hülfsmittel entspringen. Auch nachdem durch eine genaue Controle der letzteren sowie durch eine angemessene Variation der Beobachtungen diese constanten Fehler eliminirt wurden, sind aber die übrig bleibenden zufälligen Schwankungen der einzelnen Messungen keineswegs von

solcher Beschaffenheit, dass sie sich durch die Bildung des arithmetischen Mittels aus einer grösseren Anzahl von Fällen vollständig ausgleichen. Denn die Voraussetzung, dass ein Fehler ebenso oft in positivem wie in negativem Sinne begangen werden könne und in beiden Fällen durchschnittlich gleich gross sei, kann im allgemeinen nur für die elementaren Bedingungen, aus denen der wirklich begangene Fehler hervorgeht, nicht aber für diesen selbst als zulässig anerkannt werden. Die Abweichung des wirklich begangenen Fehlers von dem wahren Werthe wird vielmehr von dem Gesetze abhängig sein, nach welchem sich die Wahrscheinlichkeit einer Abweichung mit der Grösse derselben vermindert. Dieses Gesetz kann, wie Gauss gezeigt hat, durch eine Exponentialfunction dargestellt werden, auf deren Anwendung demnach die exacten Methoden zur Ausgleichung der Beobachtungsfehler beruhen.

Im wesentlichen die nämlichen Methoden können aber noch zu einem weiteren Zweck, der mit der directen Grössenmessung zusammenhängt, Anwendung finden. Bei verwickelteren Erscheinungen, wie auf physikalischem Gebiete besonders die Meteorologie sie darbietet, können nämlich durch objective Naturbedingungen ähnliche, nur meist noch umfangreichere Abweichungen der Einzelwerthe einer Erscheinung gegeben sein, wie sie bei der wiederholten Messung eines Gegenstandes in Folge subjectiver Bedingungen stattfinden. Die Regenmenge eines Ortes wechselt von Tag zu Tag, die Temperatur, der Druck und Feuchtigkeitsgehalt der Luft sind fortwährenden Schwankungen unterworfen. Nichts desto weniger können wir zum Zweck gewisser Vergleichungen nach Mittelwerthen aller dieser Grössen fragen. Hier entspricht der Mittelwerth nicht einem wirklichen, sondern einem idealen Object, welches möglicherweise in keinem einzigen der beobachteten Fälle verwirklicht ist. Auch hier beschränkt man sich zuweilen auf die Bildung des arithmetischen Mittels. Erscheint dieses ungenügend, so wird nun aber, entsprechend der veränderten Bedeutung der Mittelwerthe, die Art, wie die Beobachtungen weiter verarbeitet werden, eine wesentlich andere. Denn es handelt sich ja nicht darum, dem arithmetischen Mittel eine Grösse zu substituiren, die mit dem wahren Werth der physikalischen Erscheinung genauer zusammentrifft, sondern den idealen Durchschnittswerth einer Summe von Erscheinungen mit ähnlichen Durchschnittswerthen gleicher Art oder mit andern begleitenden Erscheinungen, die meistens ebenfalls zuvor auf ideale Mittelwerthe reducirt wurden, in Beziehung zu setzen. Auf diese Weise soll

einerseits eine Uebersicht über den gesammten Verlauf und Zusammenhang der Erscheinungen vermittelt, anderseits aber auch eine einigermassen sicherere Vorausbestimmung derselben ermöglicht werden. Insoweit der letztere Zweck zur Geltung kommt, sind dann wieder mathematische Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen unerlässlich. Der zuerst genannte Zweck, die Combination verschiedener idealer Mittelwerthe, erfordert dagegen die nämlichen mathematischen Hülfsmittel, die überhaupt bei der Combination physikalischer Beobachtungen angewandt werden. Der nächste Schritt besteht hier darin, dass man den Verlauf einer Erscheinung oder den Zusammenhang der Erscheinungen gleicher Art an verschiedenen Orten auf geometrischem Wege zur Darstellung bringt, indem man die beobachteten Mittelwerthe als die Ordinaten einer Curve betrachtet, deren Abscissen entweder der Zeit oder einer stetigen Folge von Beobachtungsörtern entsprechen. Jede solche graphische Darstellung hat die Bedeutung eines empirischen Gesetzes; in Ermangelung einer zureichenden Kenntniss der Ursachen einer Erscheinung, substituirt das empirische Gesetz hier wie überall den ursächlichen Bedingungen, als deren Function die Erscheinung anzusehen wäre, entweder den gleichförmigen Zeitverlauf oder eine stetige Abmessung im Raume, da alle Vorgänge, die überhaupt eine Gesetzmässigkeit zeigen, eine solche durch eine gewisse Regelmässigkeit in ihrem zeitlichen Verlauf oder in ihrer räumlichen Vertheilung verrathen müssen. (Vgl. oben S. 27.) Aus der graphischen Darstellung kann dann immer auch, wenn es wünschenswerth scheint, eine analytische Formel abgeleitet werden, welche die Berechnung des idealen Durchschnittswerthes der Erscheinung für einen beliebigen Zeitpunkt oder Ort gestattet. Immerhin pflegt man zu einer derartigen analytischen Umformung der graphischen Darstellung nur in solchen Fällen zu schreiten, wo entweder die einzelnen Abweichungen von den idealen Mittelwerthen nicht allzu gross sind, oder wo mit Herbeiziehung der Hülfsmittel der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu praktischen Zwecken Vorausbestimmungen für die Zukunft getroffen werden sollen. Die analytische Verwerthung der graphischen Darstellungen ist überdies im allgemeinen dann eine schwierigere, wenn nicht die Zeit, sondern der Raum die unabhängig Veränderliche ist, auf welche die Erscheinungen bezogen werden. Da bei dem Raume in der Regel zwei und unter Umständen sogar drei Dimensionen berücksichtigt werden müssen, nach denen sich die Erscheinungen abstufen, so wird schon die graphische Darstellung eine verwickeltere, und sie vermag im

allgemeinen nur durch unvollkommene Hülfsmittel, z. B. durch Farben- und Lichtabstufungen bei den kartographischen Versinnlichungen, die Gesetze der räumlichen Ausbreitung einer Erscheinung zum Ausdruck zu bringen. Eine analytische Formel aber würde sich in solchen Fällen so complicirt gestalten, dass man die einfache Zusammenstellung der Durchschnittswerthe in tabellarischer Gestalt vorzieht. Mit Hülfe dieser lässt sich dann unter Umständen auch eine vereinfachte graphische Darstellung gewinnen, indem man gewisse ausgezeichnete Werthe herausgreift, oder indem man einfach die Punkte, für die überhaupt der Durchschnittswerth einer Erscheinung der nämliche ist, durch eine Curve verbindet. So hat z. B. Dana durch die so genannten Isokrymen alle diejenigen Punkte der Meeresoberfläche verbunden, an denen die Temperatur während 30 auf einander folgender Tage gleich niedrig ist. Die Isothermen veranschaulichen die Vertheilung der Temperatur an der Erdoberfläche, indem sie als Monatsisothermen die Punkte gleicher mittlerer Monats-, als Jahresisothermen die Punkte gleicher mittlerer Jahrestemperatur verbinden. Die auf der Erdoberfläche nach allen Richtungen veränderliche Erscheinung ist auf diese Weise auf ein System linearer Veränderungen zurückgeführt, die sich unmittelbar leicht übersehen lassen. Dies ist aber nur durch einen Kunstgriff ermöglicht: an die Stelle der Abhängigkeit der Temperatur vom Orte setzt man eigentlich eine Abhängigkeit des Ortes von der Temperatur, indem man bestimmt, welche Bewegungen auf der Erdoberfläche ausgeführt werden müssten, wenn man immer nur Orte passiren wollte, für die gewisse constante Temperaturverhältnisse existiren.

### d. Die physikalische Constantenbestimmung.

Eine besonders wichtige Verwendung finden die mathematischen Hülfsoperationen bei der Bestimmung jener Grössen, die als unveränderliche Masse der einzelnen Naturerscheinungen dienen, und die man darum als physikalische Constanten bezeichnet. Bei weitem in den häufigsten Fällen sind die Constanten nicht selbst gegeben, aber sie können aus bestimmten Daten der Beobachtung durch verhältnissmässig einfache arithmetische Operationen gefunden werden. Nun beziehen sich, wie früher bemerkt, alle unsere Messungen auf räumliche Grössen, Gewichte und Zeiten, von denen die beiden letzteren wieder auf die ersteren, d. h. auf die Messung von geraden Linien und Winkeln, zurückführen. Dies findet auch in den

Einheiten, die man für jene drei fundamentalen Begriffe festgesetzt hat, seinen Ausdruck. Diese Einheiten sind schliesslich willkürliche, und wenn man unter ihnen das Meter zuweilen als eine „natürliche Einheit" bezeichnet hat, so sollte dies nicht die willkürliche Feststellung ausschliessen, sondern nur darauf hinweisen, dass die Erhaltung dieser Einheit als einer in der Natur objectiv gegebenen Grösse, nämlich als des zehnmillionten Theils des Erdquadranten, nicht von der Aufbewahrung künstlicher Massstäbe abhängig sei. Uebrigens ist diese Absicht durch die Ungenauigkeiten der Gradmessung, aus der die Feststellung des Metermasses hervorging, vereitelt worden, so dass in Wahrheit doch nur durch die Aufbewahrung der Normalmasse die Erhaltung der Einheit verbürgt wird. Aehnlich ist die Zeitsecunde schliesslich eine willkürliche Einheit, obgleich sie von der Tageslänge abhängt, deren Wahl zur Zeitmessung so nahe lag, dass sie wohl kaum zu umgehen war. Die Gewichtseinheit endlich, das Gramm als Gewicht eines Cubikcentimeter Wasser im Zustand seiner grössten Dichte, ist einerseits auf die Längeneinheit, anderseits auf die Wahl eines Körpers gegründet, der durch seine Verbreitung und die Constanz seiner Eigenschaften ein besonders geeignetes Messungshülfsmittel zu sein schien. Auf diese Weise führen die Längen- und Zeiteinheit auf je ein Bestimmungsstück, die erste auf eine geradlinige Strecke, die zweite auf einen Winkel, die Gewichtseinheit aber auf zwei Bestimmungsstücke, nämlich auf das Längenmass und auf die specifische Dichte des Wassers, zurück. Die meisten physikalischen Constanten enthalten daher entweder Längen- und Zeitangaben oder Längen-, Zeit- und Gewichtsangaben, wobei diese Elemente in multiplicativer Form verbunden und nach den angegebenen Einheiten gemessen werden. Wegen der Beziehung, die zwischen dem Längen- und dem Gewichtsmass besteht, pflegt man hierbei übereinstimmende Einheiten beider zu combiniren, also das Millimeter mit dem Milligramm oder das Centimeter mit dem Gramm. Ausserdem können aber auch noch Zahlen entweder für sich oder in Verbindung mit einer der genannten Masseinheiten den Werth von Constanten gewinnen. Solche Zahlen drücken bald die Häufigkeit einer gewissen Erscheinung aus, wie z. B. bestimmter Schall- oder Lichtwellen, und werden dann mit der Zeiteinheit verbunden, bald bezeichnen sie eine Winkelgrösse, wie der so genannte Randwinkel in der Theorie der Capillarität, bald beziehen sie sich auf unveränderliche Relationen bestimmter Grössen, wie die Brechungsindices in der Optik.

Das Gebiet der physikalischen Constantenbestimmung ist vermöge der Verschiedenheiten, die gewisse gleichförmig festzustellende Grössen je nach der individuellen Beschaffenheit der Naturkörper darbieten, unermesslich. Die Dichtigkeiten, Elasticitätscoëfficienten, Brechungsindices, Capillaritätsconstanten u. s. w. variiren in der mannigfaltigsten Weise; jede einzelne Bestimmung bietet darum ein verhältnissmässig beschränktes, meist nur gewissen praktischen Zwecken dienendes Interesse dar. Von weit grösserer Bedeutung sind diejenigen Constantenbestimmungen, bei denen man für die Wirkungen der unveränderlich gegebenen Naturkräfte ein einheitliches Mass zu gewinnen sucht. Je nachdem von den drei wesentlichen Bestimmungselementen der räumlichen Strecke (bez. des Winkels), der Zeit und der Masse nur eines oder zwei oder drei in Betracht kommen, lassen sich ein-, zwei- und dreidimensionale Constanten unterscheiden. Die eindimensionalen sind allgemein einfache Raumgrössen, und zwar in der Regel Längen, seltener Winkel. Hierher gehören die Dimensionen des Erdsphäroids, die kosmischen Entfernungsbestimmungen, die Wellenlängen der Töne und Farben u. s. w. Man erhält sie durch Multiplication der gewählten Längeneinheit oder irgend einer Potenz derselben mit einer Zahl, in deren genauer Bestimmung in diesem Fall die eigentliche Aufgabe der Constantenbestimmung besteht. Die zweidimensionalen Constanten enthalten in der Regel die Factoren der Länge (seltener des Winkels) und der Zeit. Sie umfassen alle Geschwindigkeitsbestimmungen, welche durch Division der durchlaufenen Länge oder des Drehungswinkels durch die Zeit erhalten werden. Die so gewonnene Zahl bedeutet dann die in der Secunde zurückgelegte Strecke und besteht demgemäss aus dem Product einer Zahl in die Längeneinheit dividirt durch die Zeiteinheit. Hierher gehören die Constanten der Licht-, Schall-, Elektricitätsgeschwindigkeit u. s. w. Auch die Bestimmung des elektrischen Stromwiderstandes führt auf das Geschwindigkeitsmass zurück. Zweidimensionale Constanten, welche die Elemente der Länge und der Masse enthalten, besitzen dagegen nur eine beschränkte Bedeutung, und solche mit den alleinigen Elementen der Masse und der Zeit sind principiell unmöglich. Zu einer Constanten der ersteren Art führt nämlich bloss der Begriff des Trägheitsmomentes in Bezug auf Drehung, welcher durch das Product einer Masse in das Quadrat ihres kürzesten Abstandes von der Drehungsaxe gemessen wird, also die Bestimmung einer Länge und einer Masse voraussetzt. Eine

ähnliche Bedeutung besitzt der Begriff des magnetischen Momentes, der in analoger Weise zusammengesetzt ist. Doch ist leicht zu bemerken, dass in dem Begriff des Drehungsmomentes derjenige der Geschwindigkeit verborgen liegt, wenn auch wegen des vorausgesetzten statischen Verhaltens von einer Zeitbestimmung abgesehen werden kann. Dadurch bildet derselbe den Uebergang zu den Constanten der folgenden, dritten Classe, aus denen er durch Elimination des Zeitbegriffs hervorgegangen ist. Diese dreidimensionalen Constanten enthalten neben den Elementen der Raumstrecke und der Zeit noch dasjenige der Masse. Bezeichnet man daher die Einheiten dieser drei Elemente mit $l$, $t$ und $m$, so führt jede Constantenbestimmung dieser Art bei der gewöhnlich gewählten Aufeinanderfolge der Elemente auf einen Ausdruck von der Form

$$n \,.\, m^x \, l^y \, t^z,$$

worin $n$ eine Zahl ist, deren Ermittelung das eigentliche Object der Messung darstellt, während $x$, $y$, $z$ ganze oder gebrochene, positive oder negative Potenzen bedeuten können. Hierher gehören zunächst die Constanten der verschiedenen Kraftformen, wie der Schwere, der Wärme, der elektrischen und der magnetischen Kräfte, ausserdem alle diejenigen Constanten, durch die in irgend einer Weise die Wirkungen dieser Kräfte auf materielle Massen unter besonderen Bedingungen gemessen werden: so in der Mechanik die Energie einer bewegten Masse, die Arbeit einer Kraft, das Drehungsmoment bei einer drehenden Bewegung, der hydrostatische Druck einer Flüssigkeit, in der Elektricitätslehre die Potentialfunction eines elektrischen oder magnetischen Stromelements, die Intensität eines Stromes, die elektromotorische Kraft u. s. w.*).

---

*) Vgl. Herm. Hertwig, Physikalische Begriffe und absolute Masse. Leipzig 1880. Nimmt man den allgemeinen Energiebegriff in dem oben (S. 409) angeführten Sinne zur Grundlage der physikalischen Constantenbestimmungen, so lässt sich, wie Ostwald ausgeführt hat, statt der Masse als drittes Bestimmungselement neben Länge und Zeit die Energie selbst einführen. (Sitzungsber. der Ges. der Wiss. zu Leipzig, 1891, S. 283.) Der abstracte Charakter jenes allgemeinen Energiebegriffs bringt es dann mit sich, dass nur noch die zwei Dimensionen der Länge und der Zeit eine geometrische Veranschaulichung zulassen, während die Energie eine rein begriffliche Grösse bleibt. Zugleich aber fordert in diesem Fall auf jedem einzelnen Gebiet das Masselement der Energie eine Zerlegung, die derjenigen der Bewegungsenergie in Masse und Geschwindigkeitsquadrat analog ist. So zerfällt die Wärmeenergie in Wärmecapacität (oder Entropie) und Temperatur, die elektrische Energie in Elektricitäts-

Unter diesen Constanten besitzen die der Naturkräfte selbst eine hervorragende Bedeutung, weil sie die unveränderlichen Grössen darstellen, von denen schliesslich alle andern hier in Betracht kommenden Werthe abhängen. Unter ihnen steht wieder die Schwerkraft in erster Linie, da sie denjenigen Constantenbestimmungen, welche das Element der Masse enthalten, zu Grunde gelegt wird. Zum Mass der Schwere dient die Fallbeschleunigung. Diese aber wird gemessen, indem man die Geschwindigkeit bestimmt, die in einem frei fallenden Körper durch die während einer Secunde continuirlich einwirkende Schwere erzeugt wird. Diese gewöhnlich mit $g$ bezeichnete Constante der Schwerkraft beträgt unter dem Aequator 9781 Mm. und wächst von da nach den Polen stetig in Folge der abnehmenden Centrifugalbeschleunigung der Erde. Der Umstand, dass die Schwerkraft die Masseinheit für alle andern Naturkräfte abgibt, kommt hierbei insofern zur Geltung, als die für sie gefundene Zahl an und für sich nur jene auf die Zeiteinheit bezogene Länge bedeutet, und dass sie daher ungeändert bleibt, welche Gewichtseinheit man auch wählt. Die Constante der Schwerkraft würde also ebenso gut durch das Product 9781 Grm.-Mm.-Sec. wie durch das andere 9781 Mgr.-Mm.-Sec. ausgedrückt werden können, und nur die Rücksicht auf die Gleichmässigkeit der Längen- und der Gewichtsdimension verleiht dem letzteren Ausdruck den Vorzug, bei dem deshalb auch die Angabe der Gewichtseinheit hinwegbleiben kann. Dies ist nun nicht mehr gestattet bei den Massangaben über andere Naturkräfte, denen man die Einheiten der Schwerkraft zu Grunde legt. Jeder Ausdruck besteht daher in diesem Falle aus vier Gliedern, nämlich aus einer Zahl und den drei Einheitswerthen des Gewichts, der Länge und der Zeit. Die nach diesem Princip vorgenommenen Massbestimmungen pflegt man absolute zu nennen, um sie von den für einzelne Zwecke nicht selten gebrauchten conventionellen Massen zu unterscheiden. Eine strenge Durchführung des absoluten Masssystems ist nur da möglich, wo die betreffenden Naturkräfte entweder eine unmittelbare Vergleichung mit der Schwerkraft zulassen, wie dies z. B. bei der Constanten der Newton'schen

---

menge und Potential u. s. w. Die Energie kann also zwar als Massfactor gewählt werden, sie kann aber niemals die Bedeutung eines wirklichen Masselementes annehmen. Auch weist das erste der beiden Elemente, in die sie zerfällt, überall auf besondere, in den Zuständen der Materie begründete Bedingungen hin, auf deren Analyse man vorläufig Verzicht leistet, um von allen Hypothesen über die Eigenschaften der Materie absehen zu können.

Gravitation stattfindet, oder wo eine Transformation der in irgend einer andern Form gegebenen Energie in Energie der Schwerkraft möglich ist. In diesem Fall, der bei der Messung der Wärme nach absolutem Mass vorkommt, wird demnach das Princip der Erhaltung der Energie vorausgesetzt. Die Wärmeeinheit, die man meistens bei dieser Messung benützt, bleibt dabei aber insofern willkürlich, als man von einer bestimmten Substanz, dem Wasser bei seinem Gefrierpunkt, und in der Regel sogar von einer conventionellen Temperatureinheit, dem Grad der hunderttheiligen Thermometerscala, ausgeht. Hierauf beruht die gewöhnliche Bestimmung des Wärmeäquivalents, nach welcher die Wärmeeinheit einer Energie der Schwere von 430 Kilogr.-Meter entspricht. Besser genügt es der Forderung eines absoluten Masses, wenn man umgekehrt als Wärmeeinheit diejenige Wärmemenge bezeichnet, die der Einheit der Bewegungsenergie gleichkommt, und danach auch die Temperatureinheit als diejenige Temperaturerhöhung bestimmt, welche diese absolute Wärmeeinheit an der Gewichtseinheit des Wassers bei constantem Druck hervorbringt. In noch höherem Grade werden jedoch willkürliche Festsetzungen bei andern Naturerscheinungen erforderlich. So gehen die üblichen Massbestimmungen elektrischer und magnetischer Wirkungen gegenwärtig noch von zwei Begriffen aus, für die sich bis jetzt nur willkürliche Einheiten finden lassen: von dem Begriff einer Quantität freier Elektricität und dem einer Quantität freien Magnetismus. Als Einheiten dieser Quantitäten setzt man nicht, wie es sein müsste, die Einheiten der ponderomotorischen Wirkungen, denen sie äquivalent sind, sondern die Einheiten der ponderomotorischen Wirkungen, die sie in der Entfernung hervorbringen. In beiden Fällen dient demnach diejenige Menge von Elektricität oder Magnetismus als Einheit, die in der Einheit der Entfernung der Einheit der Masse eine Beschleunigung Eins ertheilt. Von diesen elektrostatischen und elektromagnetischen Einheiten unterscheidet sich dann die elektrodynamische nur dadurch, dass sie an Stelle der Quantität der Elektricität oder des Magnetismus die Intensität zweier auf einander wirkender Stromelemente einführt. Die Einheit der Intensität wird dann aber wieder nach der Einheit der Elektricitätsmenge bestimmt, indem man unter jener die Intensität eines Stromes versteht, in welchem in der Zeiteinheit durch jeden Querschnitt die Elektricitätsmenge Eins sich bewegt. Diesen mechanischen Einheiten zieht man übrigens meistens die von Gauss eingeführte elektromagnetische Constantenbestimmung vor, bei der jede elektro-

dynamische Wirkung auf eine ihr gleiche magnetische reducirt wird. Alle diese Massbestimmungen, zwischen denen feste Beziehungen stattfinden, stimmen wieder darin überein, dass sie die drei Dimensionen der Masse, der Länge und der Zeit enthalten.

## 3. Das Substrat der Naturerscheinungen.

Die physikalische Deduction stützt sich auf gewisse Fundamentalbegriffe, die in den verschiedensten Erklärungsgebieten gleichförmig wiederkehren und darum eine principielle, von den besonderen Bedingungen der einzelnen Erscheinungen unabhängige Bedeutung in Anspruch nehmen. Diese Fundamentalbegriffe beziehen sich theils auf das Substrat der Naturerscheinungen, theils auf die allen Naturvorgängen gemeinsamen Gesetze. Beide werden durch die Induction vorbereitet; sie bilden unter jenen Hypothesen, mit deren successiver Prüfung sich das inductive Verfahren beschäftigt, die letzten und allgemeinsten. Sie unterscheiden sich aber von den specielleren Hypothesen, die ihnen vorausgehen, dadurch, dass der Induction selbst eine Bestätigung oder Widerlegung derselben unmöglich ist. Aus diesem Grunde bilden sie die Ausgangspunkte der Deduction, deren Aufgabe in dem Nachweis besteht, dass die einzelnen durch Induction gefundenen Erscheinungen mit jenen Voraussetzungen übereinstimmen. Die Art dieser Verification bringt es mit sich, dass sie im allgemeinen keine vollkommen bindende ist. Denn ein derartiger Nachweis der Uebereinstimmung schliesst nicht aus, dass noch andere Hypothesen zu dem nämlichen Zwecke tauglich sein würden. Diese relative Unsicherheit der fundamentalen Begriffe macht sich aber bei den Hypothesen über das Substrat der Naturerscheinungen in höherem Masse geltend als bei den allgemeinen Naturgesetzen. Denn während die letzteren nur hinsichtlich ihrer Tragweite und speciellen Anwendungsweise einer unbegrenzten Vervollständigung fähig sind, bewahren die ersteren fortwährend den Charakter willkürlicher Annahmen, die zwar durch die Prüfung an der Erfahrung mannigfache Correcturen erleiden, niemals aber in zwingender Weise bestimmt werden können. Dieses Verhältniss ist in den Bedingungen der Erkenntniss begründet. Die Naturgesetze sind uns unmittelbar in den Beziehungen des empirischen Geschehens gegeben, und ihre Allgemeingültigkeit wird durch den logischen Zwang des Causalprincips gefordert: hier kann daher nur die be-

sondere Form der Gültigkeit noch Zweifeln begegnen; das Substrat der Erscheinungen dagegen bleibt uns nothwendig stets unbekannt: wir können hier immer nur die Möglichkeit unserer Annahmen behaupten, insofern wir nachweisen, dass die Folgerungen aus denselben mit der Erfahrung übereinstimmen.

### a. Continuitätshypothese und Atomistik.

Die logischen Motive, die zu der Aufstellung des Begriffs der Materie geführt haben, und die allgemeinen Postulate der Anschauung, die bei der Ausbildung dieses Begriffs wirksam gewesen sind, wurden bei der Untersuchung des Substanzbegriffs bereits erörtert*). Hier bleibt uns daher nur übrig, die methodologische Bedeutung der Hypothesen zu würdigen. Für die Deduction der Naturerscheinungen sind dieselben nicht zu entbehren. Aber ihre Unentbehrlichkeit darf nicht dazu verführen, in ihnen mehr zu sehen als logische Hülfsmittel, deren wir uns zur Ausfüllung der vielfachen Lücken, die uns in der Verbindung der Thatsachen begegnen, bedienen müssen. Ueber das nicht in die Erfahrung tretende Wesen der Dinge können sie niemals etwas aussagen, sondern sie können immer nur angeben, in welcher Weise die Herstellung eines lückenlosen causalen Zusammenhangs zwischen den Erscheinungen für uns denkbar ist. Diese Aufgabe schliesst die Forderung in sich, dass aus den Voraussetzungen über das Substrat der Naturerscheinungen die in der Anschauung gegebenen allgemeinen Eigenschaften der Naturobjecte sowie die Begriffe, die wir über ihre wechselseitigen Relationen uns bilden, abgeleitet werden können. Da man nun aber bald im unmittelbaren Anschlusse an die in der Wahrnehmung gegebenen Eigenschaften der Dinge, bald vorzugsweise geleitet von begrifflichen Forderungen die Voraussetzungen über die Materie zu gestalten sucht, so wird hierdurch nicht weniger als durch das tiefere Eindringen in den Zusammenhang der Erscheinungen ein Wechsel der Hypothesen veranlasst. Von zwei entgegengesetzen Motiven der sinnlichen Wahrnehmung ist dieser Wechsel bestimmt worden. Indem einerseits die Raumerfüllung als die constanteste Eigenschaft der Körperwelt erscheint, wurzeln hierin die Continuitätshypothesen, welche die Stetigkeit des Raumes zugleich als die Grundeigenschaft der

*) Bd. I, S. 524 ff. Ueber die Geschichte des Begriffs der Materie (bis auf Kant einschl.) vergl. R. Abendroth, Das Problem der Materie. I. Leipzig 1889, S. 172 ff.

Materie ansehen. Indem anderseits die Existenz discreter, in wechselnden räumlichen Verhältnissen stehender Objecte als die Bedingung aller Veränderungen in der Natur betrachtet wird, entspringen hieraus die atomistischen Vorstellungen, welche kleine untheilbare Körperchen von verschiedener oder von gleichförmiger Gestalt als Elemente voraussetzen.

Beiderlei Hypothesen sind an sich in gleicher Weise vereinbar mit dem allgemeinen Grundsatz der Constanz der Materie, der alle Veränderungen in der Körperwelt auf Bewegungen eines unveränderlichen Substrates zurückzuführen verlangt. Sie sind daher noch in neueren Zeiten für verschiedene Gebiete des physischen Geschehens neben einander der Deduction der Erscheinungen zu Grunde gelegt worden*). So sind namentlich die Arbeiten von Laplace über die Fortpflanzung des Schalls, von Navier und Poisson über die Theorie der Elasticität, von Fourier über die Fortpflanzung der Wärme von der Continuitätshypothese ausgegangen, die sie je nach Bedürfniss bald auf die ponderable Materie, bald auf ein imponderables Fluidum bezogen. Die atomistische Anschauung dagegen ist der neueren Physik zunächst von der Chemie entgegengebracht worden, in der die Motive zu ihrer Annahme die zwingendsten waren. Auch für die specifisch physikalischen Phänomene hat jedoch vielfach schon frühe die Analyse der Erscheinungen zu atomistischen Vorstellungen geführt. So legen Huygens wie Newton atomistische Anschauungen zunächst ihrer Optik, dann aber auch der Erklärung anderer Erscheinungen zu Grunde**). Ebenso sah sich später Coulomb durch seine Analyse der Wirkungen des Magnetes zu solchen genöthigt. Den Schlusspunkt dieser Entwicklung bildet die auf Grund der Interferenz- und Polarisationserscheinungen unternommene mathematische Behandlung der Undulationstheorie durch Fresnel, Cauchy u. A.

Sobald nun selbst nur für einzelne Erscheinungsgebiete der Uebergang zur Atomistik geboten schien, musste die Continuitätsvorstellung nothwendig auch in denjenigen Theilen der theoretischen Physik, in denen sie an sich zureichend gewesen wäre, im Interesse einer einheitlichen Naturerklärung zurückweichen. Der Sieg ist daher in diesem Streit im ganzen der atomistischen Theorie geblieben. Uebrigens lag die Tendenz zu einem solchen Ausgang schon in der

*) Ueber die ältere Entwicklung dieser Hypothesen bis zu Newton vgl. Kurd Lasswitz, Geschichte der Atomistik. 2 Bde. Hamb. u. Leipzig 1890.

**) Newton, Princip. Lib. II, Sect. VIII, l. c. p. 329. Ueber Huygens vgl. Lasswitz a. a. O. II, S. 341 ff.

Beschaffenheit der physikalischen Continuitätstheorien. Diese sahen sich nämlich, um die Probleme der mathematischen Analyse zugänglich zu machen, genöthigt, die continuirliche Materie in irgendwie gestaltete und sich unmittelbar berührende Theilchen zu zerlegen, eine Vorstellung nach der insbesondere die hierher gehörigen Annahmen zur Elasticitätstheorie den Namen der Contacthypothesen erhalten haben. Die Theilchen, in die man sich die Körper zerlegt dachte, wurden aber wieder in Bezug auf ihre Massenmittelpunkte in Betracht gezogen, so dass in den Entwicklungen der Contacthypothesen eigentlich immer schon eine atomistische Anschauung verborgen war.

Diese Tendenz, die dem mathematischen Werkzeug der physikalischen Deduction ihren Ursprung verdankt, erstreckt sich aber noch weiter. Indem die algebraische Analysis eine rein begriffliche Behandlung der Naturerscheinungen ermöglicht, lässt sie die im Interesse der Anschaulichkeit vorausgesetzte räumliche Ausdehnung der materiellen Elemente als ein unwesentliches Attribut erscheinen. Was für die mathematische Betrachtung dieser Elemente in Rücksicht kommt, ist schlechthin nur der geometrische Ort. Waren von den beiden im Eingang erwähnten Bedingungen in den älteren Formen der Continuitätshypothese sowie der Atomistik die anschaulichen die überwiegenden gewesen, so kam daher nun unter dem bestimmenden Einfluss der mathematischen Abstraction eine Zeit, in der die begrifflichen allein noch Geltung besassen. Eine bedeutsame Rolle bei dieser Wendung der Dinge spielte jener Begriff der fernewirkenden Kraft, wie er als allgemeinstes Ergebniss der Abstraction aus der Gravitationstheorie Newtons hervorgegangen war. Bei der Annahme fernewirkender Kräfte verzichtete man auf jede Beziehung zu geläufigen mechanischen Vorstellungen; aber begrifflich hatte man den grossen Vortheil, den aus der Entfernung auf einander wirkenden Körpern mathematisch blosse Massenpunkte substituiren zu können. Gebieterisch forderte diese Anschauung vermöge der leichten mathematischen Einkleidung die sie zuliess die Uebertragung auf die verschiedenen Gebiete der Molecularphysik. So sind aus dieser rein begrifflichen Auffassung jene Ansichten hervorgegangen, die wir als dynamische Atomistik bezeichnen können, weil sie sich auf den bereits von Leibniz zur Geltung gebrachten Satz berufen, dass uns die Materie nur durch die Kräfte gegeben sei, die von ihr ausgehen.

Eine solche begriffliche Umgestaltung ist nun an sich sowohl

bei der Continuitätsvorstellung wie bei der Atomistik möglich. In der That ist Kants dynamische Theorie der Materie eine Form der Continuitätshypothese, die sichtlich ebenso sehr von dem Newtonschen Gesetz der Fernewirkungen wie von jenem Leibniz'schen Grundsatze bestimmt wird. Aber es ist bemerkenswerth, dass diese Theorie offenbar deshalb die physikalische Brauchbarkeit einbüsste, weil sie bei der Annahme über die abstossenden Kräfte dem Princip der Fernewirkung untreu wurde, indem sie in diesem Fall nur eine unmittelbare Contactwirkung statuirte. Eine Materie, die durch die Wechselwirkung einer solchen „Flächenkraft“ mit der fernewirkenden Kraft zu Stande kam, war unfähig der physikalischen Deduction zu dienen. Darum sind in den verwandten dynamischen Contacthypothesen der Physiker auch die abstossenden Molecularkräfte zu fernewirkenden Kräften geworden; nur ist vorausgesetzt, dass die Molecularkräfte überhaupt nach einer Function der Entfernung abnehmen, welche sehr rasch sinkt und daher für jede messbare Distanz verschwindend klein wird. In Folge dessen sahen sich aber diese Hypothesen meistens veranlasst, die anziehenden und abstossenden Kräfte an verschiedene Substrate zu binden, die ersteren an die ponderable Materie, die letzteren an das so genannte Wärmefluidum, eine Annahme die, sobald man von der schwer vollziehbaren Vorstellung einer Durchdringung der verschiedenen Materien absah, wiederum atomistische Anschauungen nahe legte, um so mehr als diese, wie oben bemerkt, in den Abstractionen, deren sich die analytische Behandlung bediente, im Grunde schon eingeschlossen waren.

### b. Die dynamische Atomtheorie.

Mehr als die Continuitätshypothese ist die Atomistik ursprünglich von dem Bedürfniss nach einer anschaulichen Gestaltung des wirklichen Geschehens ausgegangen. Indem sie zunächst von dem Grundsatze der Constanz der Materie bestimmt wurde, übertrug sie zugleich die geläufigen Vorstellungen vom Stoss der Körper auf die Atome, die sich, abgesehen von ihrer Kleinheit, nur durch die absolute Härte, die man ihnen zuschrieb, von den aus der Erfahrung bekannten festen Körpern unterschieden. Diese bereits durch die antike Atomistik entwickelten Vorstellungen sind von der neueren zunächst nur unerheblich modificirt worden. Einerseits liess man die verschiedene Gestalt der Demokritischen Atome fallen und begnügte sich mit der einfachsten Form der kugelförmigen Atome; anderseits

sah man sich genöthigt, zum Behuf der Ableitung der verschiedenen Kräfteformen verschiedene Atome mit verschiedenartigen Eigenschaften einzuführen. Für die speciellere Gestaltung dieser Vorstellungen wurde schliesslich die Annahme der fernewirkenden Kräfte massgebend. Nach ihr schienen sich von selbst die Erscheinungen den zwei Classen der Anziehungs- und Abstossungskräfte unterzuordnen, wobei dann diese zwei Kräfteformen an zwei verschiedene Arten von Atomen gebunden wurden. So entstand die in der neueren theoretischen Physik, namentlich in der Elasticitätslehre und Optik, herrschend gewordene Unterscheidung der Körperatome und der Aetheratome. Den ersteren schrieb man eine Anziehungskraft unter sich und gegen die Aetheratome zu; die letzteren, deren Kräfte übrigens überhaupt nur in Moleculardistanzen merklich seien, sollten sich wechselseitig abstossen. Die nämliche Absicht, die Kant mit seinen zwei entgegengesetzten Kräfteformen verfolgt hatte, wurde hier in einer Weise erreicht, die der mathematischen Analyse bessere Angriffspunkte darbot. Nachdem diese Vorstellungen in der Optik Eingang gefunden, versuchte man es mit ihrer Hülfe auch die sonstigen imponderablen Fluida zu verbannen. Das Wärmefluidum machte in Folge der Begründung der mechanischen Wärmetheorie den Oscillationen der ponderablen Atome Platz. Für die Elektricität liess sich der Lichtäther benützen, sei es nun dass man mit W. Weber positive und negative Aetheratome annahm, die sich rotirend um die ponderablen Theilchen bewegten, sei es dass man mit C. Neumann die eine der beiden Elektricitäten als eine unveränderliche Eigenschaft der ponderablen Atome betrachtete.

In diesen neueren Entwicklungen wurde im allgemeinen die Voraussetzung leerer Zwischenräume zwischen den Atomen strenger festgehalten als in der antiken Atomistik, die in dem Stoss der Atome ein Ereigniss angenommen hatte, bei dem jedesmal eine unmittelbare Berührung eintrete. Dort dagegen machte es das angenommene Gesetz der Wirkungen zwischen den Atomen unmöglich, dass diese über eine gewisse Grenze sich näherten. Auf diese Weise blieb das Princip der Stetigkeit aufrecht erhalten, indem sich jede Wirkung streng genommen in eine Fernewirkung verwandelte. Der so zur Ausbildung gelangende Begriff der Wirkungssphäre des Atoms erlaubte es aber weiterhin, der Hypothese jene Wendung zu geben, welche in der mathematischen Behandlung der Atomwirkungen vorbereitet war. Abstrahirte diese schon völlig von der Ausdehnung der Atome, indem sie dieselben lediglich als Kraft-

centren in Betracht zog, so schien die Umsetzung dieser mathematischen Abstraction in eine physikalische Voraussetzung um so näher zu liegen, als damit die Fragen über Gestalt und Grösse der Atome ohne weiteres hinwegfielen, Fragen die sich jeder Beantwortung entziehen, da das einzige, was eventuell einer Messung zugänglich sein kann, eben die Wirkungssphäre des Atoms ist. Hiermit war der Uebergang zur einfachen Atomistik vollzogen, wie sie im vorigen Jahrhundert zuerst von Boscovich entwickelt und dann in dem gegenwärtigen in engerem Anschlusse an die mathematische Theorie von Ampère, Cauchy u. A. ausgebildet wurde. Die Atome betrachtete man hier als ausdehnungslose Punkte, deren jedem eine Wirkungssphäre zukomme, die von der ihm inhärirenden Centralkraft abhänge. Man verzichtete demnach auf jede Congruenz mit den sinnlich wahrnehmbaren Eigenschaften der Naturobjecte und begnügte sich damit, die wesentlichen Eigenschaften der Materie rein begrifflich festzustellen*).

Zuweilen verband sich aber mit dieser Annahme noch das Streben, auch die Verschiedenartigkeit der Atome zu beseitigen. Der physische Punkt, wie er an sich keine Verschiedenheiten erkennen lasse, sollte sich auch in seinen Wirkungen gleichförmig verhalten. In dieser Richtung haben namentlich Boscovich und in neuerer Zeit Fechner die Statthaftigkeit der einfachen Atomistik zu erweisen gesucht. Auch Cauchy hat die nämliche Annahme einem Theil seiner analytischen Untersuchungen zu Grunde gelegt. Es ist selbstverständlich, dass hierbei die Einfachheit des Substrates nur auf Kosten der Einfachheit der angenommenen Wirkungen desselben erreicht werden konnte. Denn es musste nun eine complicirtere Form der Kräftefunction eingeführt werden, welche anziehende und abstossende Wirkungen als specielle Fälle unter sich begreift. Selbst mittelst derartiger Hülfsannahmen gelang es aber nicht, solche Erscheinungen abzuleiten, die, wie z. B. die Doppelbrechung des Lichtes in Krystallen, auf eine verschiedenartige Anordnung der Theilchen nach verschiedenen Richtungen hinweisen. Für die Zwecke der analytischen Deduction hielt man daher im allgemeinen an der Annahme eines so genannten Doppelmediums aus Körper- und Aetherpunkten fest.

---

*) Fechner, Ueber die physikalische und philosophische Atomenlehre. 2. Aufl. Leipzig 1864, S. 147 ff.

### c. Die kinetische Atomtheorie.

Die zuletzt erwähnten Hypothesen wurden zunächst durch die Anschauungen erschüttert, welche hinsichtlich mancher sonst auf eine Distanzwirkung der Atome bezogener Erscheinungen die *mechanische Wärmetheorie* herbeiführte. Während man früher das Ausdehnungsbestreben der Gase vom statischen Gesichtspunkte aus auf ein Uebergewicht der Repulsivkräfte der Aetheratome zurückgeführt hatte, lehrte die Auffassung der Wärme als einer Bewegung der Theilchen die nämliche Erscheinung weit befriedigender aus der fast unbeschränkten Beweglichkeit der Molecüle im gasförmigen Zustand erklären*). Waren damit für einen speciellen Fall die abstossenden Kräfte direct aus molecularen Stosswirkungen abgeleitet, so schien es nun geboten, ähnliche Voraussetzungen auch für andere Fälle anscheinender Repulsivwirkungen zu versuchen. Und war erst einmal das Princip der Actio in distans für die Repulsivwirkungen beseitigt, so konnte es auch für die Attractionserscheinungen kaum länger Stand halten. Nicht bloss für Elektricität und Magnetismus, für welche die Beziehungen zu Licht und Wärme solche Vorstellungen nahe legten, ging man daher wieder auf die Annahme von Contactwirkungen zurück, sondern auch für die Erklärung der Schwere begann man theils an ältere Hypothesen anzuknüpfen, welche die Schweranziehung durch unmittelbare Stosswirkungen eines im Weltraum bewegten Aethers veranschaulicht hatten, theils suchte man die Gravitation mit den der elektrischen und magnetischen Fernewirkung zu Grunde gelegten Bewegungen in Beziehung zu bringen**). Mangelt es nun auch solchen Annahmen immer noch an dem Nachweis einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation, dem hier allein entscheidende Bedeutung zukommen würde, so lässt sich doch nicht verkennen, dass sich, sobald nur erst die übrigen Naturkräfte den Gesichtspunkten der kinetischen Atomistik vollständig unterworfen wären, auch die Gravitation dem Zwang der gleichen Anschauung kaum länger entziehen könnte, um so mehr da das Gesetz der Ab-

---

*) ~~Koenig~~, Grundzüge einer Theorie der Gase, 1856. Clausius, Abhandl. über die mechanische Wärmetheorie. Bd. 2, 1867.

**) Isenkrahe, Das Räthsel von der Schwerkraft, 1879. S. T. Preston, Phil. Mag. (5) IV, 206, 364; V, 117, 297. A. Korn, Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen. Berlin 1892. Th. Schwartze, Electricität und Schwerkraft. Berlin 1892.

nahme ihrer Intensität mit dem Quadrat der Entfernung unmittelbar auf die räumliche Uebertragung einer Bewegung hinzuweisen scheint. Mit der Beseitigung der Actio in distans war aber gegenüber der rein begrifflichen Auffassung des materiellen Substrates wieder die Forderung der Anschaulichkeit erhoben, während zugleich die Voraussetzung einer Berührung der Elemente beim Stoss die Rückkehr zu Continuitätsvorstellungen begünstigte. Denn es kann zwar die mechanische Gastheorie ihre Molecüle ebenfalls im Sinne der dynamischen Atomistik aus Kraftpunkten und Aethersphären aufgebaut und dadurch die Stösse der Gastheilchen in moleculare Fernewirkungen umgewandelt denken. Immerhin schien durch den Grundgedanken der kinetischen Atomistik der Versuch näher gelegt, alle Naturerscheinungen wo möglich aus dem unmittelbaren Contact der bewegten Atome zu erklären. Dies aber konnte nur geschehen, wenn man zugleich zur Continuitätshypothese zurückkehrte oder mindestens die Vorstellungen der letzteren mit denjenigen der kinetischen Atomistik verband.

### d. Rückkehr zu Continuitätsvorstellungen.

Den entscheidenden Anstoss zur Ausbildung solcher Vorstellungen gab die neuere elektromagnetische Lichttheorie. Sie bot neben dem grossen Vorzug, dass sie die bisher getrennten und zuweilen immer noch auf verschiedene materielle Medien zurückgeführten Phänomene des Lichts, der Elektricität und des Magnetismus vereinigte, noch den weiteren, dass sie die Schwierigkeiten beseitigte, die den Voraussetzungen der theoretischen Optik anhafteten. Nachdem durch die Erscheinungen der Interferenz die Undulationstheorie sicher begründet und durch die Entdeckung der Polarisation die Wellenbewegung des Lichts als eine transversale, analog der Bewegung einer schwingenden Saite oder der Wellen an der Oberfläche des Wassers, nachgewiesen war, bereitete das Problem, diese transversale Form der Lichtwellen mit einer irgendwie wahrscheinlichen Constitution des Aethers in Verbindung zu bringen, neue Schwierigkeiten. Betrachtet man mit Fresnel und seinen der dynamischen Atomistik huldigenden Nachfolgern den Aether als ein elastisches Medium, das aus einzelnen Atomen besteht, deren Abstände im Vergleich zur Länge der Wellen hinreichend gross sind, so können sich zwar, wie Fresnel zeigte, in einem solchen Medium transversale Wellen fortbewegen. Immerhin würden auch longitudinale

möglich sein, und sie würden bei jeder Reflexion oder Brechung aus den Transversalwellen hervorgehen müssen. Nur wenn man den Aether als incompressibel voraussetzt, wenn man ihm also die Eigenschaften eines starren Körpers, nicht einer Flüssigkeit beilegt, können die transversalen Schwingungen in ihm unter allen Umständen erhalten bleiben. Die Vorstellung einer solchen Constitution ist aber angesichts der Thatsache, dass die Weltkörper bei ihrer Bewegung durch den äthererfüllten Weltraum keinen merklichen Widerstand erfahren, schwer vollziehbar, und auch die Hülfshypothese, dass sich der Aether nur gegenüber den Lichtwellen wegen ihrer enormen Geschwindigkeit wie ein fester Körper, in allen andern Beziehungen wie eine Flüssigkeit verhalte*), ist kaum geeignet, jenes Bedenken hinwegzuräumen. Dies verhält sich nun anders bei der elektromagnetischen Lichttheorie. Sie geht von der Annahme aus, dass alle elektrischen und magnetischen Erscheinungen auf Schwingungen in zwei zu einander senkrechten Ebenen beruhen, so zwar dass diese beiden Schwingungsformen stets mit einander verbunden sind, indem die elektrischen Schwingungen senkrecht zur Polarisationsebene, die magnetischen innerhalb derselben erfolgen. Für das Verhältniss der Elektricität zum Magnetismus kann diese Voraussetzung als experimentell bewiesen gelten**). Die Erfordernisse der Undulationstheorie des Lichtes ergeben sich aber, sobald man annimmt, dass die Wellenlänge solcher Schwingungen auf Milliontheile derjenigen Grösse herabsinkt, die sie bei den gewöhnlichen elektrodynamischen Wirkungen besitzt. Mit dieser Kleinheit der Lichtwellen lässt sich dann auch die Thatsache in Zusammenhang bringen, dass bei ihnen bleibende Verschiebungen des Aethers nicht nachzuweisen sind, während die ponderomotorischen Wirkungen der Elektricität und des Magnetismus aus solchen Verschiebungen abgeleitet werden können. Im übrigen sind die Fortpflanzungsgesetze der Lichtwellen und der elektromagnetischen Wellen durchaus übereinstimmender Art: diese wie jene pflanzen sich nur im Aether, nicht aber durch eigentliche Fernewirkung fort, und die früher so genannten Nichtleiter, die Dielektrika, die im allgemeinen auch die das Licht fortpflanzenden Medien sind, erscheinen als die wahren Träger der elektromagnetischen Schwingungen, während die so genannten Leiter, namentlich die Metalle, dieselben nur schwierig

---

*) Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Optik. Leipzig 1891, S. 4 f.

**) Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft. S. 190 ff.

und nur bis in eine gewisse Tiefe aufnehmen: eben diese Eigenschaft macht sie aber gerade geeignet, die auf sie übergehenden elektrischen Schwingungen zusammenzuhalten und in sich fortzupflanzen, ohne sie merklich an die Umgebung zu übertragen*). Da nun nach dieser Theorie die Aetherschwingungen immer in zwei zu einander senkrechten Richtungen transversal erfolgen, nicht, wie nach der elastischen Theorie, bloss in der einen, zur Polarisationsebene senkrechten Richtung, in der sie bei grosser Wellenlänge als Elektricität, bei sehr kleiner innerhalb gewisser Grenzen als Licht wahrgenommen werden, so kann ein Uebergang der Transversal- in Longitudinalwellen nicht stattfinden, auch dann nicht, wenn der Aether ein zusammenhängendes, absolut flüssiges Medium ist, welches den in ihm bewegten Körpern keinen Widerstand leistet. Denn jene beiden zu einander senkrechten Transversalschwingungen lassen sich als die Componenten einer Wirbelbewegung betrachten, die in der Richtung der Axe des Wirbels fortschreitet. Aus solchen Wirbeln lässt sich dann insbesondere auch jene drehende Wirkung der Magnete auf die Schwingungsrichtung des polarisirten Lichtes ableiten, aus der Faraday zuerst auf einen inneren Zusammenhang dieser Erscheinungen geschlossen hatte.

Demnach gestattet diese Theorie, indem sie Elektricität und Magnetismus aus der Reihe der fernewirkenden Kräfte verschwinden lässt und, ähnlich wie Licht, Schall und Wärme, auf schwingende Bewegungen der Materie zurückführt, nicht nur eine einheitlichere Betrachtung der Naturvorgänge, sondern sie macht auch eine Reihe bis dahin unerklärter Zusammenhänge begreiflich. Bleibt aber als einzige Naturkraft, die bis dahin nicht aus einem bestimmten Bewegungszustand der Materie abgeleitet werden konnte, die Gravitation zurück, so wird dadurch die Vermuthung verstärkt, dass dies auch für sie noch gelingen und damit die alte, dem Einheitsbedürfniss der Theorie längst widerstrebende Trennung des Aethers und der ponderablen Materie mit ihren verschiedenen Eigenschaften gänzlich beseitigt werde. Dennoch würde auch dann ein wichtiges Gebiet von Thatsachen übrig bleiben, das mit zwingender Kraft immer wieder auf atomistische Vorstellungen zurückweist: es besteht in

*) Ueber das Verhältniss der elastischen zur elektromagnetischen Lichttheorie vgl. P. Volkmann, Vorlesungen über die Theorie des Lichts, Leipzig 1892, über das Verhältniss der Maxwell'schen zu einigen anderen Elektricitätstheorien Poincaré, Elektricität und Optik, deutsche Uebersetzung I, II. Berlin 1892.

jener Constanz der Eigenschaften gegebener materieller Aggregate, welche von der Chemie auf die Unveränderlichkeit gewisser Elementarstoffe bezogen wird, und in den hiermit zusammenhängenden festen quantitativen Verbindungsverhältnissen dieser Stoffe. Gehören auch diese Thatsachen zunächst nicht der Physik selbst an, so kann dieselbe doch bei der Aufstellung ihrer fundamentalen Hypothesen unmöglich die Forderungen einer so sehr in ihr Arbeitsgebiet eingreifenden Wissenschaft unberücksichtigt lassen*). Auch die Continuitätshypothese sieht sich also genöthigt, für alle diese der so genannten ponderablen Materie zukommenden Eigenthümlichkeiten an dem Begriff des Atoms festzuhalten oder aber Vorstellungen zu entwickeln, welche geeignet sind die atomistische Hypothese zu ersetzen. In der That ist ein Versuch dieser Art von W. Thomson gemacht worden**). Ein Wirbelfaden in einer vollkommenen, nicht zusammendrückbaren Flüssigkeit würde, wie Helmholtz***) gezeigt hat, unzerstörbar sein; beim Versuch ihn zu zerschneiden würde er in die verschiedensten Formen gebracht, nicht aber wirklich zerschnitten werden können, ausgenommen wenn er irgendwo mit der Grenze der Flüssigkeit in Berührung käme, also, auf die Materie angewandt, niemals, da die Materie keine Grenze besitzt. Nach dieser Vorstellungsweise würden demnach die Wirbel des Aethers das sein, was wir sonst die Atome der ponderablen Materie nennen, und es würde damit zugleich das oben erwähnte Streben nach einer Vereinheitlichung des Begriffs der Materie befriedigt werden.

### e. Logische Prüfung der Hypothesen.

In der geschilderten Entwicklung der hypothetischen Voraussetzungen über die Materie lassen sich deutlich zwei Bestrebungen erkennen. Das erste besteht darin, dass man den Begriff der materiellen Elemente und ihrer Bewegungszustände in einer Weise zu bestimmen sucht, welche die möglichst einheitliche Ableitung der Naturerscheinungen gestattet; das zweite darin, dass man sich diese Elemente in ihren Eigenschaften möglichst entsprechend den Eigenschaften der sinnlich wahrnehmbaren Körper denkt. Diese beiden Bestrebungen treten nun in einen Kampf mit einander, indem die

*) Ueber die besonderen Erfordernisse der chemischen Atomistik vgl. übrigens unten Cap. III.

**) Proceedings of the Roy. Soc. 1867.

***) Crelles Journ. 1858, Bd. 56.

begrifflichen Forderungen gewisse aus der sinnlichen Wahrnehmung stammende Vorstellungen unmöglich machen. So beseitigt das Bedürfniss, die Erscheinungen von Wärme, Licht, Schall u. s. w. im Zusammenhang abzuleiten, von vornherein die Vorstellung, dass den Atomen auch die optischen, thermischen, akustischen Eigenschaften zukommen, die wir an den wirklichen Körpern beobachten. Wollte man dies annehmen, so würde ja ohne weiteres der Begriff der Materie mit der Vorstellung der Körper identisch werden, d. h. jener Begriff selbst würde damit aufgehoben sein. In der That beschränkt man sich daher auf die Forderung, dass die Elemente der Materie diejenigen allgemeinen Eigenschaften besitzen, welche die Mechanik zum speciellen Gegenstand ihrer Untersuchungen nimmt. In diesem Sinne ist die Aufstellung irgend welcher theoretischer Annahmen über die Materie in Wahrheit nichts anderes als eine Consequenz der allgemeinen Voraussetzung der neueren Physik, dass alle Naturvorgänge auf mechanische Processe zurückzuführen seien. (Vgl. oben S. 326 ff.) Damit ist nun aber jener Kampf, in den das Postulat der Begreiflichkeit und das der Anschaulichkeit mit einander gerathen sind, noch keineswegs geschlichtet. Wenn wir feststellen, dass die Eigenschaften der Materie so zu denken seien, wie sich die Mechanik die der Körper vorstellt, so ist damit zwar die Ausdehnung im Raume und allenfalls auch die Undurchdringlichkeit gegeben. Ob aber die Theilchen der Materie starr oder elastisch, absolut verschiebbar gegen einander oder zusammenhängend seien u. dergl. mehr — alles dies bleibt völlig dahingestellt, weil die Mechanik selbst bald diese bald jene Voraussetzung macht je nach der besonderen Gruppe mechanischer Phänomene, mit deren Untersuchung sie es zu thun hat. Nur eines ist allen ihren Untersuchungen gemeinsam: überall geht sie von Voraussetzungen aus, die sich bei den wirklichen Körpern niemals vollständig verwirklicht finden, und ihre Resultate erhalten daher im allgemeinen auch für die wirklichen Körper erst Geltung, wenn nachträglich empirische Beschränkungen hinzugefügt werden, wobei diese wieder so viel als möglich auf gewisse allgemeine Voraussetzungen zurückführen, ohne dass sich jedoch hierbei jemals das wirkliche Verhalten der Dinge völlig erschöpfen liesse. So untersucht die Mechanik absolut starre und absolut elastische, absolut feste und absolut flüssige Körper, aber gerade das, was der wirkliche Körper immer ist, ein Mittleres zwischen solchen abstract gedachten Zuständen, vermag sie nur durch eine nachträgliche Verbindung verschiedener abstracter Voraus-

setzungen, und auch dann immer nur in irgend welchen Annäherungen, zu deuten.

Ist die mechanische Interpretation der Erscheinungen der Zweck aller Hypothesen über die Materie, so kann demnach von vornherein nicht erwartet werden, dass diese Hypothesen auch nur in Bezug auf die mechanischen Eigenschaften der Materie dem wirklichen Verhalten irgend welcher realer Körper entsprechen werden. In der That enthält daher jede der zur Geltung gelangten Hypothesen einen Widerspruch gegen die Anschauung, und sie alle unterscheiden sich nur dadurch, dass dieser Widerspruch bei jeder an einer andern Stelle zum Vorschein kommt. Die dynamische Atomistik setzt in ihrer folgerichtigen Form Kraftpunkte voraus: der bewegte Punkt ist aber lediglich die einfachste begriffliche Conception der abstracten Mechanik. Die kinetische Atomistik nimmt ausgedehnte absolut starre Körper von willkürlicher, nach der verbreitetsten Annahme von kugelförmiger Gestalt an: der starre Körper ist aber zwar ein minder einfacher, doch ist er darum nicht weniger ein ebenso abstracter Begriff wie der Punkt. Endlich die Hypothese der Wirbelatome setzt an die Stelle dieses Grundbegriffs der Mechanik fester Körper den der abstracten Hydrodynamik: den Begriff der absolut reibungslos beweglichen Flüssigkeit. Besitzt in dieser Beziehung keine der gegenwärtig um die Herrschaft kämpfenden Hypothesen einen Vorzug vor der andern, so bleibt die dynamische Atomistik höchstens darin gegenüber der kinetischen und der Continuitätshypothese scheinbar im Nachtheil, dass diese die Fernewirkung vollständig beseitigen, indem sie alle Vorgänge auf die Action und Reaction bei der unmittelbaren Berührung zurückführen, während im Gegentheil die dynamische Atomistik eigentlich alle Wirkungen als Fernewirkungen betrachtet. Auf der andern Seite nöthigt aber die Continuitätshypothese zu auffälligeren Widersprüchen mit den wirklichen Eigenschaften der uns in der Erfahrung gegebenen stetig ausgedehnten Körper; und die Annahme starrer Atome führt zu der Vorstellung, dass ein gegen eine feste Wand stossendes Atom momentan seine Geschwindigkeit in eine entgegengesetzt gerichtete umwandle. Wollte man aber, um dieser Schwierigkeit zu entgehen, elastische Atome voraussetzen*), so bliebe, sobald man den Begriff des Atoms im absoluten Sinne nimmt, das Bedenken, dass die Eigenschaft der Elasticität eine Verschiebung und Wechselwirkung der

*) Helmholtz, Populäre wissensch. Vorträge, 3. Heft, S. 13.

Theilchen des elastischen Körpers einschliesst und daher, wie dies die Existenz der Elasticitätstheorien bezeugt, zu einer Zerlegung nöthigt, die den Begriff des absoluten Atoms wieder aufhebt. Und hält man etwa die Annahme starrer Atome deshalb für zulässig, weil auch bei einer plötzlichen Geschwindigkeitsänderung das Princip der Erhaltung der Energie gewahrt bleiben könne*), so wird hier abermals der Versuch gemacht, die Forderungen der Anschauung durch rein begriffliche Feststellungen zu befriedigen. In ähnliche Widersprüche mit der Anschauung verwickelt sich endlich die Annahme von Wirbelatomen, welche die immerhin vorstellbare Annahme einer Unvergänglichkeit kleinster Theilchen durch die physikalisch unvollziehbare einer ins Unendliche fortdauernden Bewegung ersetzt. Dem gegenüber bietet die dynamische Atomistik den Vorzug dar, dass sie auf das Bestreben, die Materie selbst mit anschaulichen Eigenschaften auszustatten, von vornherein verzichtet, indem sie vielmehr von der Forderung ausgeht, die begrifflichen Voraussetzungen über dieselbe seien so zu gestalten, dass die Wirkungen jener Eigenschaften mit den in der Anschauung gegebenen Erscheinungen übereinstimmen. Dieser Vorzug war es, der denjenigen Physiker, der, wie kein Anderer vor ihm, den endlichen Fernewirkungen den Boden entzogen hat und von ihrer Unwahrscheinlichkeit auch auf dem Gebiet, wo sie noch angenommen werden, bei der Gravitation, durchdrungen war, Faraday, bestimmte, an der Vorstellung von Kraftpunkten, die in unendlich kleinen Entfernungen wirken, festzuhalten. In der That sind diese beiden Fälle einer Actio in distans immerhin insofern verschieden, als die Fernewirkung zwischen Weltkörpern ein Vorgang sein würde, der unserer unmittelbaren sinnlichen Wahrnehmung angehört, während die Wechselwirkung der Atome in ihren unendlich kleinen Entfernungen, wie jede Voraussetzung über die Materie, ein hypothetischer Begriff bleibt, den wir nach Anleitung der mathematischen Postulate der abstracten Mechanik zu construiren haben, ohne dass wir für diesen Begriff jemals eine völlige Uebereinstimmung mit den Gegenständen der sinnlichen Wahrnehmung erreichen können. Gleichwohl hat das Widerstreben, das Faraday mit so vielen Physikern gegen die endlichen Fernewirkungen theilte, zwar ein zureichendes Motiv in dem Versuch, die Voraussetzungen über die verschiedenen Kräftefunctionen möglichst überein-

*) O. E. Meyer, Die kinetische Theorie der Gase. Breslau 1877, S. 239 f. Lasswitz, Atomistik und Kriticismus, S. 96 ff., Geschichte der Atomistik, II, S. 384 ff.

stimmend zu gestalten; es besteht aber darum noch keine Berechtigung von der „Unmöglichkeit“ einer Fernewirkung zu reden. In der That ist eine unmittelbare, durch keinerlei Zwischenvorgänge vermittelte Wirkung der Sonne auf die Erde an und für sich ebenso vorstellbar wie die hypothetische Wirkung eines Atoms auf ein anderes durch eine unendlich kleine Entfernung oder die Wirkung eines Körpers auf einen andern in unmittelbarer Berührung. Auch die Wirkung des mechanischen Stosses ist uns ja nur deshalb begreiflich, weil sie sich in der Erfahrung immer und immer wieder darbietet, und wenn man diese Wirkung noch dadurch dem Verständnisse näher zu bringen sucht, dass man sie mit der Undurchdringlichkeit der Körper in Beziehung bringt, so wird damit eigentlich nur eine Erfahrungsthatsache durch eine Folgerung erläutert, die selbst aus jener Thatsache gezogen wurde. Nun ist, wenn wir, wie es wissenschaftlich gefordert ist, den Begriff der Erfahrung über das unmittelbar Wahrgenommene hinaus auf das aus Wahrnehmungen mit Nothwendigkeit Erschlossene erweitern, ganz gewiss die Wirkung der Sonne auf die Erde eine ebenso constante und anschauliche Erfahrung wie die Wirkung des Stosses auf den gestossenen Körper. Davon also, dass die eine dieser Wirkungen a priori wahrscheinlicher wäre als die andere, kann keine Rede sein. Vielmehr kann sich hier überall da, wo verschiedene Voraussetzungen möglich sind, immer nur aus der Uebereinstimmung mit anderen Thatsachen der Erfahrung eine Wahrscheinlichkeit für die eine oder andere Annahme ergeben. Betrachtet man die Frage von diesem Gesichtspunkte aus, so bestehen nur zwei Gründe, die gegen die Annahme einer endlichen Fernewirkung angeführt werden können: der erste liegt darin, dass, nachdem die elektromagnetischen Fernewirkungen auf die Bewegungen durch ein Zwischenmedium zurückgeführt sind, die Gravitation als einzige Erscheinung übrig bleibt, auf die der Begriff der Fernewirkung in jenem ursprünglichen Sinne anzuwenden ist; der zweite, vielleicht gewichtigere besteht darin, dass sich auch für die Gravitation die nämliche Kräftefunction bewährt, wie für diejenigen Kräfte, die sich, wie Licht und Schall, durch einen Bewegungsvorgang fortpflanzen. Dem steht vorläufig als entscheidendes Argument für die Fernewirkung der Gravitation die Thatsache gegenüber, dass jede Fortpflanzung einer Bewegung Zeit braucht, und dass eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Gravitation bis jetzt nicht nachgewiesen werden konnte. Bei dieser Sachlage wird man sagen müssen, dass alle Hypothesen, welche die Schwere auf irgend

welche moleculare Contact- oder unendlich kleine Fernewirkungen zu reduciren suchen, über die Forderungen der Erfahrung hinausgehen und daher nach streng methodischen Grundsätzen bis jetzt ungerechtfertigt sind. Dies würde sich aber freilich in dem Augenblick ändern, wo irgendwie eine wenn auch noch so kleine Fortpflanzungsdauer der Gravitation wahrscheinlich gemacht werden könnte. Die Möglichkeit, dass dies noch geschehe, wird nun um so weniger bestritten werden können, als die Vorstellung, irgend eine Kraft erstrecke ihre Wirkungen momentan in unendliche Entfernungen, Schwierigkeiten herbeiführt, die uns nöthigen, hier den Thatbestand der Erfahrung lediglich so auszudrücken, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit als unmessbar gross für unsere bisherigen Hülfsmittel anzusehen sei. (Vgl. unten 4, c.)

Hält man nun, wie es diese Entwicklung verlangt, an der Forderung fest, dass nur die nothwendigen mathematischen Voraussetzungen, frei von zufälligen und willkürlichen Zugaben der Einbildungskraft, in den Hypothesen über die Materie ihren Ausdruck finden, so wird offenbar die einfache dynamische Atomistik solcher Forderung am meisten gerecht. Denn jede mathematische Theorie materieller Vorgänge ist genöthigt, mit dem Begriff des Kraftpunktes zu operiren, indem die Ausgangs- und Angriffspunkte bestimmter Wirkungen stets als mathematische Punkte gedacht werden. Die Zeit zur Ausgleichung aller in der Entwicklung der Hypothesen über die Materie hervorgetretenen Gegensätze ist aber augenscheinlich weder gekommen, noch ist es überhaupt wahrscheinlich, dass diese Ausgleichung anders als in sehr langsamer Annäherung allmählich erreicht werde. Denn da der Begriff der Materie ein allezeit hypothetischer bleibt, so ist im allgemeinen stets eine Mehrheit von Voraussetzungen denkbar, die dem Zweck der Naturerklärung genügen*). Von logischer Seite lässt sich deshalb nur auf die allgemeine Richtung, in der sich die Anschauungen entwickeln, und auf die erkenntnisstheoretischen Forderungen hinweisen, denen jede Theorie nachkommen muss. Die Richtung der Entwicklung ist unzweifelhaft. Nachdem die rohen, vielfach mit überflüssigen Nebenvorstellungen belasteten älteren Hypothesen durch die begrifflichen

*) Dieser logischen Möglichkeit entspricht es, dass neben den oben erwähnten noch eine grosse Zahl anderer Theorien existirt, die ebenfalls zum Theil vollständig mathematisch ausgearbeitet worden sind. Die obige Darstellung musste sich auf diejenigen beschränken, die sich eine dauerndere Bedeutung in der Entwicklung der Physik errungen haben.

Entwicklungen, die von der Newton'schen Gravitationstheorie und der mathematischen Abstraction ausgegangen waren, die erforderliche Läuterung erfahren haben, wird überall die Nothwendigkeit fühlbar, die unter diesen Einflüssen entstandenen abstracten Theorien im Interesse der Anschaulichkeit umzugestalten, und an dieser Umgestaltung kommt dem Streben der neueren Physik, statische Verhältnisse auf Bewegungsvorgänge zurückzuführen, ein hervorragender Antheil zu. Die hierin angedeutete Richtung entspricht aber zugleich den logischen Forderungen, die an eine Theorie der Materie zu stellen sind. Diese ist das Substrat der in der äusseren Anschauung gegebenen Erscheinungen. Stimmt die physikalische Erfahrung mit dem logischen Trieb, alle Erscheinungen auf Bewegungsvorgänge dieses Substrates zurückzuführen, im allgemeinen überein, so müssen nun in den Voraussetzungen über dasselbe die für eine solche Zurückführung erforderlichen Bedingungen erhalten bleiben. Eine kinetische wie eine dynamische Theorie der Materie lässt sich aber nur mit Hülfe von Elementen gewinnen, die durch die Eigenschaft der Undurchdringlichkeit von dem Raum, den sie erfüllen, verschieden sind. Der Ableitung zahlreicher Erscheinungen entspricht ferner die Annahme leerer Zwischenräume zwischen den in fortwährender Bewegung begriffenen undurchdringlichen Elementen am besten; dagegen besteht keine Nöthigung, die bewegten Elemente mit den Eigenschaften der absoluten Härte und Untheilbarkeit auszustatten. Denn wo zu irgend einem Zweck die Annahme ausgedehnter Atome den Vorzug verdienen sollte, da wird immer die Voraussetzung Platz greifen können, dass es sich dabei nur um Atome in relativem Sinn handle, d. h. um Molecüle, die wir in einem gegebenen Zusammenhang als untheilbare Einheiten anzusehen haben, die aber, eben weil sie nur Körper im Kleinen sind, nothwendig auch die Eigenschaften der wirklichen Körper, also Elasticität, Zusammendrückbarkeit u. dergl., besitzen müssen. Wo dagegen das Atom die definitive, keiner weiteren Zerlegung zugängliche Bedeutung hat, dass es als einfacher Ausgangspunkt einer bewegenden Wirkung gedacht wird, da ist es nothwendig auch als punktuelles Atom zu denken, also aller nur an dem Körper haftenden Eigenschaften zu entlasten. Jede andere Form sich das Atom zu denken würde in diesem Fall zu überflüssigen, durch das Erklärungsbedürfniss selbst nicht geforderten Nebenvorstellungen führen. In dieser Beziehung bedürfen nun die Anschauungen, die in den verschiedenen Gestaltungen der neueren Atomistik zur Geltung gelangt sind, zweifel-

los der logischen Correctur. In dem berechtigten Streben, alle Erscheinungen aus elementaren Bewegungsvorgängen von anschaulicher Beschaffenheit zu erklären, sah man es als eine unabweisbare Forderung an, dass auch das materielle Substrat selbst eine anschauliche Beschaffenheit besitzen müsse; hieraus ist dann die in verschiedener Gestalt eingetretene Wiedererneuerung des Demokritischen corpuscularen Atombegriffs hervorgegangen. Auf die zweifelhafte Berechtigung dieser Forderung konnte jedoch schon der Umstand aufmerksam machen, dass man genöthigt war, unter den verschiedenen Eigenschaften der wahrnehmbaren Objecte eine Auswahl zu treffen, wenn man die Atome schlechterdings nur als ausgedehnte, undurchdringliche und je nach Umständen entweder als absolut harte oder als absolut elastische Körper ansah, ihnen aber Farbe, Wärme und andere Eigenschaften aberkannte. Nun ist ersichtlich, dass diese ganze Forderung der Anschaulichkeit auf der Voraussetzung beruht, die in der Anschauung gegebenen Naturerscheinungen müssten auf letzte Bedingungen zurückführen, die ebenfalls in der Anschauung gegeben seien. In dieser Form ist aber das Postulat der Anschaulichkeit nicht haltbar. Wäre eine solche Uebereinstimmung der Eigenschaften des Substrates der Erscheinungen mit diesen selbst zu statuiren, so würden überhaupt die Motive zur Bildung des Begriffs der Materie hinwegfallen. Die Nöthigung zu dieser ist vielmehr nur deshalb vorhanden, weil eine widerspruchslose Erklärung der Erscheinungen erst gelingt, wenn man sie als Wirkungen eines Substrates voraussetzt, das uns niemals selbst, sondern immer nur in seinen Wirkungen anschaulich gegeben ist. (Vgl. oben S. 282.) Man könnte also gegenüber jener Forderung umgekehrt behaupten, der Begriff der Materie verbiete jede unmittelbare Uebertragung in die Anschauung, weil ihm als ein wesentliches Merkmal zukomme, dass nur die den hypothetischen Elementen der Materie zugeschriebenen Wirkungen in die Anschauung treten. Auf keinen Fall aber ist man berechtigt, der Anschauung zu Liebe die Materie mit Eigenschaften auszuschmücken, zu denen die logischen Motive, welche die Bildung dieses Begriffs veranlasst haben, an und für sich nicht nöthigen würden. Nun geben uns über den Begriff als solchen offenbar diejenigen Bestimmungen die genaueste Rechenschaft, zu denen sich die mathematische Analyse genöthigt sieht. Denn ihr ist es eigen, dass sie keines der wesentlichen Begriffselemente entbehren kann, dass sie aber von selbst alle überflüssigen, etwa bloss aus der Gewohnheit der Vorstellung entspringen-

den Bestandtheile abstreift. Von diesem Gesichtspunkt aus wird aber am wahrscheinlichsten von einer Vereinigung der Voraussetzungen der kinetischen mit denjenigen der dynamischen Atomistik eine Lösung der schwebenden Widersprüche zu erwarten sein. Ueberall führt der Begriff der Materie zurück auf bewegte Kraftcentren. Was uns als physisches Substrat der Ausdehnung der Körperwelt sowie aller Erscheinungen, die damit zusammenhängen, gegeben ist, das ist nicht das Kraftcentrum selbst, sondern dessen Wirkungssphäre. Indem nun diese an die Stelle des corpuscularen Atoms tritt, erfüllt sie alle Forderungen, die man an letzteres gestellt hatte, und zugleich werden die Bedenken hinfällig, zu denen das ausgedehnte Atom Anlass gegeben. Denn die Frage, ob den Elementen absolute Härte, Elasticität, Farbe u. s. w. zukomme, hat in Bezug auf die Wirkungssphäre keinen Sinn mehr.

Hiermit sind zugleich dem Postulat der Anschaulichkeit die Grenzen angewiesen, die es nicht überschreiten darf, ohne das Recht einzubüssen, das ihm als einem heuristischen Princip der Naturforschung zukommt. Auf den Begriff der Materie angewandt schliesst dasselbe lediglich die Forderung in sich, dass die vorausgesetzten Elemente und elementaren Processe den Gesetzen unserer Anschauung conform seien. Diese Uebereinstimmung hat hier durchaus den nämlichen Sinn wie in der realen Geometrie und Mechanik: sie verhindert eine Hinzufügung begrifflicher Elemente, die mit unseren Anschauungsformen im Widerspruch stehen; sie hindert aber nicht eine Abstraction von solchen Bestandtheilen, die in der sinnlichen Anschauung die für die Begriffsbildung wesentlichen Elemente begleiten. Eine derartige Abstraction wird vielmehr gefordert, sobald es sich, wie bei den mathematischen Begriffen und bei dem Begriff der Materie, um Feststellungen handelt, sie sich nicht auf die Erscheinungen selbst, sondern entweder auf ihre formalen Gesetze oder auf ihre hypothetischen Grundlagen beziehen. Indem das Postulat der Anschaulichkeit in diese allein einer festen Bestimmung zugänglichen Grenzen eingeschränkt wird, bleibt es zugleich in Uebereinstimmung mit der Forderung objectiver Begreiflichkeit, die als das Princip angesehen werden darf, das an die Stelle des von der teleologischen Naturphilosophie zur Geltung gebrachten Postulates der subjectiven Begreiflichkeit zu treten hat. (Vgl. S. 279.)

Durch die Berücksichtigung jener Forderung und durch die unter ihrer Anleitung ausgeführte fortgesetzte Berichtigung der vorhandenen Hypothesen über die Materie und ihre Bewegungsformen

wird nun der Spielraum, innerhalb dessen sich diese Hypothesen bewegen, nothwendig immer mehr eingeschränkt, so dass schliesslich, mindestens als das ideale Endziel dieses Processes, wahrscheinlich eine einzige Voraussetzung als diejenige übrig bleiben wird, die unter den gegebenen Bedingungen der Naturerkenntniss allen andern überlegen ist. Ohne Zweifel würden wir diesem Ziel näher sein, als es thatsächlich der Fall ist, wenn die theoretische Physik die zwei methodischen Regeln, die sich aus den obigen Erörterungen ergeben, niemals aus den Augen verlieren wollte. Die erste dieser Regeln lautet: keine Hypothese ist zulässig, die zwar für ein engeres Gebiet von Thatsachen zureicht, aber dem weiteren Zusammenhang der Erscheinungen nicht Genüge leistet; die zweite: alle diejenigen Bestandtheile einer Hypothese sind zu verwerfen, durch welche die Begriffe mit überflüssigen, zur Deduction der Erscheinungen nicht erforderlichen Vorstellungen belastet werden.

## 4. Die allgemeinen Naturgesetze.

Die allgemeinen Naturgesetze, auf welche die Physik bei der Causalerklärung der Erscheinungen geführt wird, lassen sich in zwei Classen unterscheiden: erstens in Gesetze, die sich auf die Wirksamkeit des materiellen Substrates der Erscheinungen beziehen, und zweitens in solche, die den Zusammenhang der verschiedenen Formen von Bewegungen unter einander beherrschen. Wir können die ersteren als Kraftgesetze, die zweiten als Energiegesetze bezeichnen. Denn das Verhältniss beider Gesetze zu einander wird durch die beiden wichtigen Begriffe der Kraft und der Energie bestimmt, deren Entwicklung mit den oben besprochenen Entwicklungen des Begriffs der Materie in innigem Zusammenhange steht.

### a. Kraftgesetze und Kraftfunctionen.

Die geläufige Definition der Kraft als einer „Ursache von Bewegung" ist nicht nur ungenügend, sondern, sobald man den exacten Causalbegriff zu Grunde legt, geradezu falsch. Denn hier ist die Ursache einer Bewegung immer nur eine andere, vorangegangene Bewegung. (Bd. I, S. 605.) Der Kraftbegriff der neueren Physik ist durch Galilei festgestellt und durch Newton weiter ausgebildet worden. Indem Galilei, ausgehend von dem Beispiel

der Muskelkraft, das Wesen der Kraftleistung in dem Bewegungsantriebe sieht, der einer Masse durch irgend eine Ursache, z. B. durch einen Stoss, mitgetheilt wird, gewinnt er als das heute noch gültige Mass der Kraft das Product der Masse in ihre Beschleunigung. Indem sich sodann im Gefolge von Newtons Gravitationstheorie der Begriff der Fernewirkung entwickelt, wird die Kraft zu dem nach eben diesem Masse zu bestimmenden Bewegungsantrieb einer Masse durch eine andere, wobei zugleich den räumlichen Relationen der Massen selbst diejenigen ihrer Mittelpunkte substituirt werden können. Alle in der Natur wirksamen Kräfte werden darum Centralkräfte genannt, und es wird als die allgemeine Eigenschaft dieser angesehen, dass sie in der Richtung der geradlinigen Verbindungslinien der Massenmittelpunkte Beschleunigungen der Massen zu erzeugen streben. So wird in Folge der Wechselwirkungen zwischen allen Theilen der Materie diese zu einem grossen Kraftreservoir. Jedem ihrer Theile bleibt die Fähigkeit, in andern Theilen Beschleunigungen hervorzubringen, unveränderlich erhalten; diese Beschleunigungen aber sind theils wirkliche, theils, in Folge der wechselseitigen Hemmungen verschiedener Bewegungsantriebe, bloss erstrebte. (Vgl. oben S. 291 ff.)

Wenn man von dem auf solche Weise festgestellten Kraftbegriff ausgeht, so kann nun der Begriff eines allgemeinen Naturgesetzes nur die Bedeutung haben, dass man unter ihm die Function versteht, nach der sich die beschleunigende Wirkung mit der Grösse der Massen und mit der Entfernung der Massecentren verändert. Das allgemeinste Gesetz dieser Art ist das Newton'sche Gravitationsgesetz, nach welchem die beschleunigende Wirkung dem Product der Massen direct und dem Quadrat ihrer Entfernungen umgekehrt proportional ist. Da übereinstimmende Beziehungen auch für die elektrostatischen und magnetischen Fernewirkungen Platz greifen, so pflegt man dieses Gesetz als das allgemeine Kraftgesetz für fernewirkende Kräfte zu betrachten. Es lässt sich demselben eine anschauliche Bedeutung geben, wenn man es dem Princip unterordnet, dass die Kraftleistung proportional ihrer räumlichen Ausbreitung abnimmt. Denn es muss dann in einer Entfernung $R$ die Wirkung auf einen einzelnen Punkt der Grösse der zu $R$ gehörigen Kugeloberfläche umgekehrt proportional sein. Dadurch tritt das Gesetz der fernewirkenden Kräfte in unmittelbare Analogie mit dem Gesetz der Fortpflanzung einer Bewegungsenergie, wie es z. B. theoretisch für die Ausbreitung der Licht- und Schallwellen gültig ist, wo die in einer Entfernung $R$ von der Licht- oder Schallquelle vorhandene Wellen-

amplitude dem Quadrate von $R$ umgekehrt proportional ist. Diese Analogie ist es, welche den Versuch einer Zurückführung der Fernewirkungen auf die Bewegungen eines Mediums und damit zugleich die Umwandlung des Begriffs der fernewirkenden Kraft in den der Bewegungsenergie wesentlich unterstützt hat.

Wenn nun auch eine solche Umwandlung, wie es nicht unwahrscheinlich ist, dereinst für die Gravitation ebenso gelingen sollte, wie sie vermittelst der elektromagnetischen Lichttheorie für die elektrodynamischen und elektromagnetischen Fernewirkungen gelungen ist, so würde doch die mathematische Analyse der physikalischen Erscheinungen in den meisten Fällen, wo es sich um die Untersuchung von Wirkungen handelt, die im Verhältniss des Quadrats der Entfernungen abnehmen, die vereinfachte Betrachtung, die der Begriff der fernewirkenden Kräfte gestattet, nicht entbehren können. Denn für die Analyse der in irgend einer gegebenen Distanz auftretenden Wirkungen kommen die etwa zu postulirenden Zwischenvorgänge nicht in Betracht, sondern es tritt an ihre Stelle eben nur die mathematische Function, welche die Beziehung von Abstand und Wirkung ausdrückt. Gerade für die Zwecke der Analyse erscheint aber noch eine weitere Zerlegung dieser ursprünglichen Kraftfunction geboten, indem man von dem überall in der analytischen Mechanik angewandten Hülfsmittel einer Zerlegung nach bestimmten Coordinatenrichtungen Gebrauch macht. Wird diese Zerlegung nach drei zu einander senkrechten Raumcoordinaten $x$, $y$ und $z$ ausgeführt, so werden die drei Kraftcomponenten durch die Differentialquotienten $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$ und $\frac{dV}{dz}$ ausgedrückt, wo die Function $V$ dem einfachen Verhältniss $\frac{mm'}{r}$ entspricht, wenn $m$ und $m'$ zwei in Wechselwirkung stehende Massen und $r$ ihre Entfernung bedeutet. Diese vereinfachte Kraftfunction $V$ pflegt nach Green die Potentialfunction oder nach Gauss das Potential genannt zu werden. Die analytische Bedeutung derselben liegt theils in ihrer Einfachheit, theils und hauptsächlich darin, dass in ihr auf die Zerlegung nach den drei Raumcoordinaten bereits Rücksicht genommen ist, da das Potential einfach als diejenige Function definirt werden kann, deren Differentialquotienten nach den drei Richtungen des Raumes die Kraftcomponenten nach diesen Richtungen sind. Der Begriff des Potentials hat demnach zunächst die Bedeutung einer mathematischen Hülfsfunction, durch deren Differentialquotienten die

Kraftcomponenten d. h. die intendirten Beschleunigungen nach den drei Coordinatenrichtungen gemessen werden. Nichts desto weniger lässt sich auch dem Potential selbst ein bestimmter mechanischer Sinn unterlegen. Denkt man sich nämlich zwei Massen $m$ und $m'$ zuerst aus unendlicher Entfernung in die Entfernung $r$ und dann abermals aus unendlicher Entfernung in die Entfernung $r'$ von einander gebracht, so verhalten sich die Arbeiten $V$ und $V'$, welche beidemal durch die wechselseitige Einwirkung der Massen geleistet werden, umgekehrt wie die angegebenen Entfernungen, also $V : V' = r' : r$. Demnach kann auch das Potential $V = \frac{mm'}{r}$ mechanisch definirt werden als diejenige Arbeit, die in Folge der Wechselwirkung zweier Massen geleistet wird, wenn dieselben aus unendlicher Entfernung in die vorhandene Entfernung $r$ versetzt werden*). Doch besitzt diese Definition einen mehr secundären Charakter und kommt daher in der Verwendung des Potentialbegriffs, gegenüber der ursprünglicheren rein mathematischen Bedeutung desselben als Hülfsfunction, kaum in Betracht.

Das Gesetz der Fernewirkung, das aus Newtons Gravitationstheorie abstrahirt worden ist, und für das zugleich das Potential die einfachste Form einer linearen Function annimmt, hat sich nun aber in zwei Erscheinungsgebieten nicht bewährt gefunden: erstens bei solchen Fernewirkungen, deren materielles Substrat in einer sehr raschen Bewegung begriffen zu sein scheint, und zweitens bei den molecularen Entfernungen benachbarter Körperelemente. Der erste dieser Fälle kommt bei den elektrodynamischen Fernewirkungen vor. Hier weist das Ampère'sche Gesetz der Wechselwirkung elektrischer Ströme auf Fernewirkungen hin, die nicht bloss von der Menge der Elektricitäten und ihrer Entfernung, sondern auch von ihrer Bewegung abhängig sind. Man hat sich daher genöthigt gesehen, in diesem Fall complicirtere Gesetze der Fernewirkungen aufzustellen, die ausser der Masse und Entfernung auch noch die Bewegung der Stromelemente oder von ihr abhängige Grössen, wie die Stromintensität, enthalten. Am directesten ist dieser Einfluss der Bewegung in W. Webers elektrodynamischem Grundgesetz zum Ausdruck gebracht, in welches neben der Entfernung $r$ sowohl die Geschwindigkeit $\left(\frac{dr}{dt}\right)$ wie die Geschwindigkeitsänderung $\left(\frac{d^2r}{dt^2}\right)$ eingeht, so dass dieses Gesetz die Form annimmt:

*) W. Weber, Poggendorffs Annalen, Bd. 156, 1875, S. 1 ff.

$$\frac{mm'}{r^2}\left[1-\alpha\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\beta\frac{d^2r}{dt^2}\right],$$

welche, wenn die beiden letzten Glieder null werden, in das gewöhnliche Gesetz der Fernewirkungen, das auch für die elektrostatischen Wirkungen gilt, übergeht.

Ein zweites Gebiet von Erscheinungen, das sich der Unterordnung unter das Newton'sche Gesetz entzieht, bilden die Molecularwirkungen. So lange der Gesichtspunkt der Actio in distans und die statische Auffassung der Körperzustände herrschend waren, suchte man hier den Erscheinungen gerecht zu werden, indem man einfach die gewöhnliche Kraftfunction durch eine andere ersetzte, welche die Eigenschaft besass, bei der Vergrösserung der Entfernung über eine bestimmte Grenze hinaus sehr rasch abzunehmen und bald verschwindend klein zu werden, also z. B. durch eine Function von der Form:

$$f(r)=\mu\mu'^{\,-\left(\frac{r}{n\alpha}\right)^m},$$

in welcher $r$ die Entfernung der in Wechselwirkung stehenden Massetheilchen $\mu$ und $\mu'$, $\alpha$ den Zwischenraum zwischen je zwei benachbarten Theilchen und $n$ und $m$ zwei sehr grosse positive Zahlen bedeuten*). Diese Function bleibt nahezu constant, so lange $r$ nicht sehr viel grösser als $\alpha$ ist; sie wird aber verschwindend klein, sobald $r > n\alpha$ geworden ist. Es ist selbstverständlich, dass eine derartige Formel, die zwischen den Molecularkräften und den fernewirkenden Kräften gar keine Beziehungen statuirt, obleich sie doch für beide auf das Princip der Actio in distans zurückgeht, nicht befriedigen kann. Es lag daher nahe, diesen Widerspruch dadurch zu vermeiden, dass man die specifische Eigenthümlichkeit der Molecularwirkungen aus der Combination zahlreicher Kraftcentren erklärte. So sprach Fechner die Hypothese aus, die Potenz der Kräftefunction entspreche der Anzahl der Distanzfactoren der in Wechselwirkung stehenden Elemente, für 2 Elemente sei sie also $= 2$, für $3 = 6$, für $4 = 12$, für $5 = 20$ u. s. w. Dabei lässt sich zugleich ein dem Gegensatz anziehender und abstossender Kräfte entsprechender Wechsel des Ausdrucks gewinnen, wenn man entgegengesetzte Richtungen der mitgetheilten Bewegung mit entgegengesetzten Vorzeichen versieht. Die 2 Elementen entsprechende

*) Poisson, Mém. de l'Acad. T. VIII, p. 357.

zweite Potenz, die eine anziehende Kraft repräsentirt, wäre demnach als Product $+ r . - r$ negativ zu nehmen, ebenso alle höheren Potenzen, welche aus einer ungeraden Zahl von Quadraten zusammengesetzt sind, wogegen diejenigen, die in eine gerade Zahl von Quadraten zerlegt werden können, positive Vorzeichen erhalten und demnach abstossenden Kräften entsprechen würden*). In ähnlichem Sinne hat Buys Ballot angenommen, die allgemeine Kraftfunction werde durch eine Reihe repräsentirt, die nach reciproken Werthen der aufsteigenden Potenzen von $r$ fortschreite, und in welcher der Wechsel der Vorzeichen dem Wechsel anziehender und abstossender Kräfte entspreche; für endliche Distanzen aber verschwänden alle Glieder dieser Reihe mit Ausnahme des ersten, das $r^2$ enthalte**). Die erste dieser Betrachtungen scheitert jedoch an der praktischen Unmöglichkeit ihrer Durchführung; die zweite besteht lediglich in der Anwendung einer analytischen Form, die sich in Folge ihrer Allgemeinheit zur Darstellung jeder möglichen empirischen Gesetzmässigkeit eignet, eben darum aber nicht den Anspruch auf die Bedeutung eines allgemeinen Naturgesetzes erheben kann.

Allen solchen Versuchen, ein gleichförmiges Gesetz für die Fernewirkung der Atome aufzufinden, wurde schliesslich durch die von der neueren mechanischen Wärmetheorie ausgehenden Vorstellungen der Boden entzogen. Indem dieselbe die Aeusserungen der so genannten Molecularkräfte als Wirkungen auffassen lehrte, die aus der Bewegung der Elemente resultiren, näherte sich für dieses Gebiet der Begriff der Kraft wieder seinem ursprünglichen Ausgangspunkte. Er verwandelte sich in die durch den directen Anprall der Theilchen verursachte Beschleunigung. Dadurch verlor er aber zugleich an unmittelbarer physikalischer Bedeutung. Denn es konnte zwar vorausgesetzt werden, dass die mechanischen Gesetze des Stosses für den Anprall der Elemente ihre Gültigkeit bewahren würden; aber bei der ungeheuren Verschiedenheit der Bewegungszustände der Atome und ihrer räumlichen Vertheilung war es unmöglich an ein einfaches Princip zu denken, welches die Gesichtspunkte zur Entwicklung einer gleichförmigen und für alle Fälle ausreichenden Kräftefunction hätte darbieten können. Dafür trat zuerst im Gebiete dieser Untersuchungen der Molecularphysik ein neuer, dem der Kraft

*) Fechner, Ueber die physikalische und philosophische Atomenlehre, 2. Aufl., S. 303 f.

**) Buys Ballot, Pogg. Ann., Bd. 103, S. 241.

verwandter Begriff hervor, der sich bald auch für das Ganze der Physik von grosser Fruchtbarkeit erwies: der Begriff der Energie. Seine Bedeutung liegt hauptsächlich darin, dass in allen den Fällen, wo die Aufstellung eines Kraftgesetzes ein Ding der Unmöglichkeit ist, die Gewinnung und Anwendung allgemeiner Principien in Bezug auf das Verhalten der Energie immer noch möglich bleibt. In der heutigen Physik ist daher die Ueberzeugung zur Herrschaft gelangt, dass die allgemeinsten Naturgesetze überhaupt nicht in irgend welchen Kräftefunctionen, sondern allein in Energiegesetzen bestehen können. Im Zusammenhange mit dieser Umgestaltung der Anschauungen ist zuweilen die völlige Elimination des Kraftbegriffs als eine Aufgabe der Zukunft bezeichnet worden, wobei man meistens zugleich auf die Dunkelheit dieses Begriffes hinwies. Hiergegen ist jedoch zu bemerken, dass der Begriff der Kraft nur dann dunkel ist, wenn man ihn ohne Noth dazu macht. Als Ausdruck für die durch irgend welche Bedingungen entstandene wirkliche oder intendirte Beschleunigung einer Masse ist er unentbehrlich, wenn man lästige Umschreibungen vermeiden will. (Vgl. oben S. 324.) Es ist aber auch klar, dass sich der Begriff in diesem Sinne, in welchem er durchaus dem von Galilei und Newton eingeführten Wortgebrauch entspricht, zur Aufstellung universeller Naturgesetze nicht eignet.

### b. Die Energiegesetze.

Der Begriff der Energie unterscheidet sich in seiner mechanischen Bedeutung von dem der Kraft wesentlich dadurch, dass bei ihm nicht, wie bei diesem, die blosse Veränderung in dem Bewegungszustand einer Masse, sondern der Effect einer Bewegung, also die geleistete Arbeit berücksichtigt wird. Nun wird die Arbeit gemessen durch das Product der Grösse der Kraft in die Länge des Weges, auf welchem sie eine Masse zu beschleunigen strebt. Unter der Energie versteht man dann die in einer Masse oder einem Massensystem vorhandene Arbeitsfähigkeit. Diese Arbeitsfähigkeit kann entweder darin begründet sein, dass bestimmte Massen in Bewegungen begriffen sind, die sie auf andere Massen übertragen können, wodurch Arbeit geleistet wird; oder sie kann darin bestehen, dass sich eine Masse in einer Lage befindet, aus der sie in eine andere Lage überzugehen strebt, wie z. B. ein gehobenes Gewicht oder eine gespannte Feder. Im ersten Fall bezeichnet man die Energie als actuelle oder kinetische, im zweiten Fall als

potentielle oder als Energie der Lage. Die kinetische Energie ist es, die man auch als lebendige Kraft bezeichnet, wonach dann für die potentielle der Ausdruck Spannkraft gebildet wurde. Diese Ausdrücke sind deshalb minder geeignet, weil bei ihnen der Begriff der Kraft in einem seiner ursprünglichen Bedeutung entfremdeten Sinne gebraucht wird. Die lebendige Kraft, die durch das halbe Product der Masse in das Quadrat der Geschwindigkeit gemessen wird, ist etwas von der wirklichen oder intendirten Beschleunigung durchaus Verschiedenes; sie entspricht der Arbeit, welche die bewegte Masse leisten kann, und deckt sich darum vollständig mit dem oben definirten Begriff der Energie. Auch diese wird gemessen durch das Produkt $\frac{1}{2} mv^2$. Es kann aber dabei die Geschwindigkeit $v$ entweder eine actuelle oder eine potentielle sein, insofern der Masse $m$ auch dann diese Energie zukommt, wenn sie in eine Lage gebracht ist, aus der sie in eine Bewegung überzugehen strebt, durch die sie die Geschwindigkeit $v$ erreicht. Im allgemeinen ist zu einer solchen Lageänderung eine gewisse, durch das Product der Kraft $k$ in den zurückgelegten Weg $s$ messbare Arbeitsleistung erforderlich. Die potentielle Energie kann daher ebensowohl durch die zu ihrer Erzeugung erforderliche Arbeit $k \,.\, s$ gemessen werden wie durch die actuelle Energie $\frac{1}{2} mv^2$, in die sie überzugehen fähig ist. Sie selbst ist lediglich ein Hülfsbegriff zur Verbindung verschiedener zeitlich getrennter, aber causal zusammenhängender Aeusserungsformen actueller Energie. Für sich betrachtet ist demnach die potentielle Energie eine Summe räumlicher Bedingungen, die beim Hinzutritt einer bestimmten Ursache die Entstehung eines gewissen Quantums wirklicher Energie herbeiführen. Auf diese Weise führt die begriffliche Entwicklung der beiden Formen der Energie zum Princip ihres Uebergangs in einander.

Diesem ersten tritt nun in Folge der Ausdehnung des Energiebegriffs auf andere Naturvorgänge, Wärme, Licht, Elektricität, chemische Verbindungen, ein zweites Transformationsprincip zur Seite. Es besteht in dem Satze, dass qualitativ verschiedene Formen der Energie nach festen quantitativen Verhältnissen in einander übergehen; und dieses Princip der Umwandlung verschiedener Formen actueller Energie erfährt endlich eine Einschränkung durch ein drittes Princip, nach welchem die Energiemenge, die durch eine

bestimmte Transformation entstanden ist, in die ursprüngliche Energieform nur dann vollständig zurückverwandelt werden kann, wenn der erste Uebergang in einer Erzeugung mechanischer Energie aus anderen Energieformen besteht, in welchem Fall neben der actuellen Energie stets ein gewisses Quantum potentieller Lageenergie entsteht, von denen die erstere direct, die zweite sobald sie in Bewegungsenergie übergegangen ist vollständig wieder in andere Energieformen, z. B. in Wärme, umgewandelt werden kann. Dagegen können die übrigen Formen actueller Energie, z. B. die Wärme, immer nur derart in mechanische Energie zurückverwandelt werden, dass ein der Umwandlung sich entziehender Rest bleibt, dessen Grösse durch die Erreichung der Grenze des Energiegleichgewichts zwischen den Theilen des Systems, in welchem sich die Transformation vollzieht, bestimmt wird. So kann durch die Einwirkung eines wärmeren auf einen kälteren Körper so lange mechanische Energie hervorgebracht werden, bis die Temperatur beider Körper gleich geworden ist. Ist die hierbei verwendete Wärme selbst aus mechanischer Energie hervorgegangen, so ist aber der auf solche Weise nicht wieder in mechanische Bewegung zurückzuverwandelnde Rest zusammen mit der bei der Rückverwandlung wirklich gewonnenen Summe mechanischer Energie gleich der ursprünglichen Energiemenge.

Das allgemeine Princip der Erhaltung der Energie ist nun nichts anderes als eine Zusammenfassung der erörterten drei Principien: erstens des Princips der Umwandlung kinetischer Energie in Energie der Lage und umgekehrt, zweitens des Princips der Umwandlung qualitativ verschiedener Energieformen in einander nach äquivalenten Verhältnissen, und drittens des Princips der Gleichheit der aus irgend einer andern Energieform gewonnenen mechanischen Energie mit der ursprünglichen Energiemenge plus dem mechanischen Aequivalent des in Folge der Bedingungen des Energiegleichgewichts der Umwandlung unzugänglichen Restes. In dieser allgemeinen Form kann das Princip der Erhaltung der Energie zur Verknüpfung der Erscheinungen benützt werden, ohne dass man sich über die inneren Beziehungen der qualitativ verschiedenen Energieformen irgend welche Rechenschaft gibt, und ohne dass man demgemäss über die Materie irgend eine andere Voraussetzung macht als die, dass sie das unbestimmte Substrat aller dieser Energien sei. Dennoch kann sich schon das Causalbedürfniss des Physikers bei einer solchen Auffassung nicht befriedigen. Die Thatsache der Umwandlung der qualitativ verschiedenen Energieformen in einander

fordert, dass man über das Wie dieses Uebergangs Rechenschaft gebe. Dazu kommt ein zweiter logischer Grund von entscheidender Bedeutung, derselbe, in dem die mechanische Naturansicht überhaupt wurzelt. Die logische Analyse der Widersprüche in den ursprünglichen Dingvorstellungen nöthigte zur Elimination der Qualitätsunterschiede der Objecte und zu ihrer Reduction auf im Raum denkbare quantitative Verhältnisse, alo auf Lage- und Bewegungsvorstellungen. Damit ist auch die Annahme gegeben, dass alle andern Formen der Energie nur moleculare Formen der Bewegungsenergie seien, eine Annahme die zugleich die centrale Stellung, die bei der Anwendung des Transformationsprincips die mechanische Energie einnimmt, verständlich macht. Dass die Theorien über die Beschaffenheit der den verschiedenen Energieformen zu Grunde liegenden Molecularbewegungen noch nicht durchgängig zu übereinstimmenden Annahmen gelangt sind und ohne Zweifel sogar niemals zu völlig eindeutigen Feststellungen gelangen werden, bildet dagegen um so weniger einen Einwand, als sich immerhin der Weg der kinetischen Molecularhypothesen in der Verknüpfung verschiedener Erscheinungsgebiete fruchtbar erwiesen hat, während das Energiegesetz allein hier immer nur zur Aufstellung allgemeiner quantitativer Beziehungen ohne jeden vorstellbaren Inhalt gelangen kann. Uebrigens bezeugt zugleich die Geschichte des Energieprincips, dass dieses selbst lediglich auf dem Wege jener logischen Elimination der Qualitätsbegriffe aus dem Objectbegriff, welche den der mechanischen Naturansicht entsprechenden Hypothesen ihren Ursprung gegeben hat, entstanden ist, ähnlich wie ja auch schon die allgemeinsten Abstractionen der mathematischen Mechanik auf sie zurückführen. Denn seit Leibniz ist das Energieprincip trotz des scheinbaren Widerspruchs mit der Erfahrung immer und immer wieder als Postulat hingestellt worden, bis es sich endlich durch die Erweiterung und Berichtigung der Erfahrung siegreich die Bahn gebrochen hat. Wäre es aber als logisches Postulat nicht vorhanden gewesen, so würde es bei seiner Zusammensetzung aus mehreren znnächst unverbunden neben einander stehenden Transformationsprincipien mit ihrer Beschränkung durch das Princip der Reste vielleicht niemals entstanden sein, wie sich ja denn auch alle Begründungen desselben von Leibniz bis herab auf R. Mayer und Helmholtz nicht oder doch nur in zweiter Linie auf die Erfahrung, in erster aber auf die absolute Constanz der Eigenschaften der Materie berufen. In der That, sobald man zu der Erkenntniss durchgedrungen war, dass uns die Materie nur

durch ihre Wirkungen gegeben sei, und dass sie demnach lediglich als das Wirkungsfähige im Raum definirt werden könne, so führte die der Begründung der Mechanik und mechanischen Physik zu Grunde liegende Uebertragung der Constanz und Congruenz der Eigenschaften des Raumes auf die Materie von selbst zu der Forderung einer Constanz ihrer Wirkungsfähigkeit oder Energie, die sich nun, wie vor allem die frühe Schöpfung des ergänzenden Begriffs der potentiellen Energie lehrt, gegen alle Widersprüche der Erfahrung durchsetzte.

Alle jene Vortheile, die man sich früher von einer universellen Kräftefunction vergeblich versprochen hatte, bietet nun das allgemeine Energiegesetz in Wirklichkeit dar. Vermöge seiner Allgemeingültigkeit eignet es sich zur Verknüpfung der verschiedenartigsten Erscheinungen, und vermöge seiner Allgemeinheit gestattet es noch solche Vorgänge festen quantitativen Beziehungen unterzuordnen, die uns hinsichtlich der elementaren Bewegungsformen, aus denen sie bestehen, völlig unbekannt sind. Vor allem aber gewinnt das Energieprincip, indem es den Charakter eines allgemeinen Erfahrungsgesetzes mit demjenigen eines a priori gültigen Postulates verbindet, die Bedeutung eines für die Deduction der physikalischen Erscheinungen geeigneten obersten methodologischen Grundsatzes, mit welchem alle einzelnen Sätze in Uebereinstimmung bleiben müssen, sofern ihnen ein Anspruch auf wahrscheinliche Gültigkeit zukommen soll.

### c. Die physikalischen Grenzbegriffe.

In den allgemeinen Voraussetzungen über das Substrat der Naturerscheinungen liegt die Quelle zur Bildung zweier physikalischer Grenzbegriffe, die den beiden Zahlgrenzen auf mathematischem Gebiete entsprechen. (Vgl. Abschn. II, S. 150.) Der untere Grenzbegriff bezieht sich auf das Element der Materie, der obere auf die Gesammtmasse derselben oder die Totalität des Universums. Die Hypothesen über die Materie genügen für sich allein nicht, um diese beiden Begriffe widerspruchslos zu gestalten, sondern es sind neben ihnen die Kraft- und Energiegesetze zu berücksichtigen, die hier, wo es sich, wie bei allen Grenzbegriffen, nur um Postulate unseres Denkens handeln kann, diesem seine Richtung anweisen müssen.

Bei dem unteren Grenzbegriff findet jene Wechselbeziehung darin ihren Ausdruck, dass der allgemeine Begriff des Atoms als

des letzten Elementes der Materie unmittelbar durch die Beschaffenheit der Kraft- und Energiegesetze bestimmt worden ist. Dies verräth sich sowohl in den anschaulichen Gestaltungen der älteren wie in den mathematischen der neueren Atomistik. Dort verlangt man Elemente, zwischen denen Stosswirkungen möglich sind; hier fordert man, dass die materiellen Elemente als Ausgangspunkte von Kräftefunctionen oder als geeignete Medien für die Aufbewahrung und Uebertragung von Energie von der mathematischen Deduction benutzt werden können. Darum ist im Bereich der mathematischen Physik der Gegensatz zwischen Continuitätshypothese und Atomistik nur ein scheinbarer: der Unterschied beider entspringt allein aus dem Streben, den Begriff des materiellen Elementes zugleich philosophisch zu rechtfertigen, genau ebenso wie bei den entsprechenden Begründungen der mathematischen Infinitesimalmethode. Die Contacthypothese nimmt an, dass die Elemente deren sie bedarf nur die Bedeutung mathematischer Conceptionen besitzen, während physisch, der unmittelbaren sinnlichen Erscheinung entsprechend, die Materie stetig ausgedehnt sei. Hier waltet also der nominalistische Standpunkt vor. Die Atomistik betrachtet die discreten Elemente, die ihr als die Träger der Kraft- und Energiegesetze gelten, als die wirklichen Elemente der Materie. Sie ist realistisch in dem früher besprochenen Sinne. (Vgl. S. 100 ff.) Dabei ist sie aber zugleich in sich mannigfach gespalten hinsichtlich der Frage, ob die Atome den empirischen Objecten der Anschauung zu gleichen haben oder nicht. Ursprünglich ganz und gar den Motiven der Anschauung folgend, hat sie sich allmählich mehr von denselben befreit und ist so in der dynamischen Atomistik zu einer begrifflichen Conception des Atoms gelangt, bei der dieses einen rein mathematischen Charakter annimmt.

Während nun die analogen Widersprüche über den mathematischen Infinitesimalbegriff in der Feststellung der eigenthümlichen Form der mathematischen Abstraction ihre Lösung fanden, liegt die logische Entscheidung dieser physikalischen Frage zum Theil auf anderem Boden. Wohl wird auch hier der Streit dadurch begünstigt, dass man geneigt ist, den Producten begrifflicher Abstraction reale Wirklichkeit zuzuschreiben und darum die Begriffe mit den Attributen der sinnlichen Anschauung auszustatten. Aber daneben macht noch der Umstand seine Wirkungen geltend, dass die Materie ein hypothetischer Begriff ist, der zum Behuf einer widerspruchslosen Erklärung der empirisch gegebenen Erscheinungen gebildet wird, und

dass hieraus das Streben entsteht, denselben so wenig wie möglich von den Erscheinungen selbst abweichen zu lassen. Dies Streben ist den entgegengesetzten Hypothesen gemeinsam, aber es bemächtigt sich verschiedenartiger Bestandtheile derselben. Die Contacthypothese nimmt neben den nominalistisch gefassten Elementarbegriffen ein anschauliches Substrat an, das, für die mathematische Deduction nicht erforderlich, nur jenem Streben der Uebereinstimmung seinen Ursprung verdankt; die Atomistik stattet in ihren meisten Gestaltungen die Elemente selbst mit anschaulichen Eigenschaften aus. Nun haben wir oben gesehen, dass das Streben nach Anschaulichkeit in diesem Falle in unvermeidliche Widersprüche verwickelt. Darin liegt das Zugeständniss, dass die Materie nur eine begriffliche Fassung zulässt, d. h. dass sie nur als Substrat bestimmter Wirkungen zu denken ist. Mit der Beseitigung der überflüssigen anschaulichen Zugaben, mit denen Nominalismus und Realismus hier gleicherweise den Begriff der Materie versehen, verschwinden aber die Gegensätze dieser Anschauungen selbst. Der Contacthypothese wie der Atomistik bleiben allein Kraftcentren und ihre Wirkungssphären als rein begriffliche Feststellungen, die erst in Verbindung mit den an sie geknüpften Kraft- und Energiegesetzen anschauliche Erfolge herbeiführen.

Von wesentlich anderem Charakter ist der Gegensatz, in dem sich die philosophische Fassung der Continuitätshypothese zu den atomistischen Vorstellungen befindet. Da sie die Materie zu einem continuirlichen und zugleich ins unendliche theilbaren Kraftträger macht, hebt sie die allen physikalischen Hypothesen gemeinsame Voraussetzung auf, dass jeder endliche Theil der Materie aus einer endlichen Anzahl von Kraftcentren bestehe. So entwickelt sich hier ein Streit, welcher dem nachher zu erörternden über die Endlichkeit oder Unendlichkeit der Totalität des Universums analog ist. In Bezug auf die Elementarbegriffe löst sich aber dieser Streit durch die Bemerkung, dass sich beide Auffassungen auf verschiedene Gegenstände beziehen. Der philosophische Dynamiker hat die Körper unserer Anschauung im Auge; er behauptet, dass die räumliche Zerlegung eines Körpers nie bei einer Grenze anlange, bei der sie aufhören müsste. Der Begriff des Physikers dagegen bezieht sich auf das hypothetische Substrat der Erscheinungen; er behauptet, nicht dieses Substrat selbst, sondern die ihm beigelegten Wirkungen müssten in den Eigenschaften der Körper anzutreffen sein. So wird in diesem Fall durch eine seltsame Vertauschung der Rollen der

Philosoph zum Empiriker und der Empiriker zum Philosophen. Es kann aber kein Zweifel darüber sein, wem die Schuld eines error loci der Begriffe hierbei aufgebürdet werden muss. Die Uebereinstimmung mit den Kraft- und Energiegesetzen bildet die einzige Richtschnur für die Gestaltung des Begriffs der Materie. Darin liegt zugleich, da sich jene Gesetze auf räumliche Wirkungen beziehen, die Uebereinstimmung mit den allgemeinen Eigenschaften des Raumes. Insofern es sich aber hier überall nur um begriffliche Feststellungen handelt, kann nur eine Uebereinstimmung mit den geometrischen Raumbegriffen, nicht mit unsern Vorstellungen physischer Körper im Raume in Frage kommen. Wie schon die Mechanik an geometrische Abstractionen anknüpft, so werden sich darum auch unsere hypothetischen Feststellungen über die Materie mit voller Freiheit solcher Abstractionen bedienen dürfen. Auf diese Weise wird die Antinomie zwischen Endlichkeit und Unendlichkeit bei den physikalischen Elementarbegriffen durch die Erwägung beseitigt, dass die Abstraction des physikalischen Kraftpunktes als eine rein begriffliche Conception sich unmittelbar anschliesst an die Abstraction des geometrischen Punktes, in welchem wir uns mit der Ausdehnung zugleich die Theilbarkeit aufgehoben denken. Wie der geometrische Punkt den durch unsere Gedankenthätigkeit fixirten Ort im Raume, abgesehen von den objectiven Hülfsmitteln der Ortsbestimmung, so bezeichnet das Atom als Kraftcentrum den von unserm Denken postulirten causalen Ausgangspunkt eines Bewegungsvorganges.

Hat die Physik den Widerstreit zwischen Endlichkeit und Unendlichkeit bei dem unteren Grenzbegriff, gezwungen durch die Forderungen der Naturerklärung, praktisch gelöst, so treibt nun aber die nämliche Antinomie bei dem oberen Grenzbegriff noch immer ihr Spiel. Die Lösung wird hier durch den Umstand erschwert, dass in die Frage über Endlichkeit oder Unendlichkeit des Weltganzen der Gegensatz zwischen jenen beiden Formen der Unendlichkeit, der unvollendbaren und der vollendeten, sich einmengt, der uns schon auf mathematischem Gebiete begegnet ist. (Vgl. S. 153, 226.) In der That handelt es sich in den von Kant aufgestellten kosmologischen Antinomien nur um diesen Gegensatz. Zugleich ist aber dort die wahre Natur des Streites verhüllt theils durch den Parallelismus, in den die Antinomien mit der Untersuchung der andern transscendenten Ideen gebracht sind, theils durch den Umstand, dass Kant selbst den Unterschied jener beiden Unendlichkeitsbegriffe

noch nicht erkannt hat*). Tritt man, gestützt auf deren mathematische Unterscheidung, an Kants Antinomien heran, so fällt sofort in die Augen, dass der Thesis jedesmal die vollendete Unendlichkeit, das Transfinite, der Antithesis die unvollendbare Unendlichkeit, das Infinite, bei ihrer Argumentation vorschwebt. Nun ist das Transfinite auf empirischem Gebiete ein unvollziehbarer Begriff. Der Durchschnittspunkt zweier Parallellinien hat geometrisch auch dann noch einen Sinn, wenn wir den Parallelismus als einen vollkommenen und darum die Unendlichkeit der Entfernung als eine absolute auffassen. Unter parallelen Lichtstrahlen aber, die von einem physischen Punkt im Weltraume ausgehen, können wir immer nur solche verstehen, deren Divergenz für uns unmerklich ist; dem Fixstern, der sie aussendet, können wir daher höchstens eine relativ unendliche Entfernung zuschreiben. Irgend ein räumlich oder zeitlich noch so entfernter Ort oder Zustand des Universums gebietet unserem unter der Leitung der Anschauungsformen und des Causalprincips handelnden Denken, über denselben hinauszugehen; aber wollten wir uns diesen unendlichen Progressus wirklich vollendet vorstellen, so würde der Begriff in ein rein mathematisches Postulat verwandelt sein, von dem für physikalische Zwecke kein Gebrauch zu machen wäre. Denn unser naturwissenschaftliches Denken steht gleichzeitig unter der Herrschaft der Erkenntnissnormen und der Erfahrung. Verbieten uns die ersteren, den Zusammenhang der Erscheinungen bei irgend einem erreichbaren Punkte aufhören oder beginnen zu lassen, so verbietet es uns die letztere nicht minder, diesen unendlichen Zusammenhang anders denn als einen unvollendbaren zu denken. Die Thesis in Kants Antinomien hat darum leichtes Spiel, wenn sie der vollendeten Unendlichkeit gegenüber an der Endlichkeit der Welt festhält. Anderseits sind wir aber ebenso bei unserer räumlichen und zeitlichen Ordnung der Erscheinungen sowie bei ihrer causalen Verknüpfung aufgefordert, die jeweils erreichten Grenzen zu überschreiten und in diesem Progressus ohne Ende fortzufahren. Der Antithesis wird es daher wiederum nicht schwer, wenn sie den infiniten dem endlichen Weltbegriff vorzieht. So ist der ganze Streit ein Scheingefecht, das aus der doppelten Natur des Unendlichen entsprungen ist. Darum ist nun aber auch die von Kant gegebene Lösung, die

---

*) Vgl. meine Abhandlung: Kants kosmologische Antinomien und das Problem der Unendlichkeit, Philos. Stud. II, S. 495 ff.

beiden Gegnern in gleichem Masse Recht gibt, indem sie die Frage für unentscheidbar erklärt, nicht die richtige; sondern auf dem Boden von Kants eigener Beweisführung hat die Antithese den Vorzug, deren Aufstellungen durch die Beweisführungen der These gar nicht getroffen werden, während diese der Macht der Gegenerörterungen nicht widerstehen kann. Durch diesen Ausgang ist aber für uns die Sache noch nicht entschieden. Denn in Kants Erörterung sind nicht alle Momente berücksichtigt, welche die physikalische Betrachtung dem Problem der kosmologischen Unendlichkeit entgegenbringt. Insbesondere bedürfen zwei Punkte einer näheren Erwägung: erstens sind die drei Beziehungen, in denen die Unendlichkeit des Universums angenommen werden kann, zeitliche Dauer, räumliche Ausdehnung und Masse der Materie, von einander zu sondern; und zweitens muss in jeder dieser Beziehungen der Einfluss der Kraft- und Energiegesetze berücksichtigt werden.

In der Geschichte der Physik hat sich sowohl die Annahme der Endlichkeit wie die der Unendlichkeit der Welt selten auf jene Bestandtheile sämmtlich bezogen, sondern, wenn wir die Zeit als das massgebende Element betrachten, so lassen sich auf jeder Seite wieder je drei Hypothesen unterscheiden. Die Endlichkeitshypothese nimmt entweder nur die Zeit endlich, Raum und Masse aber unendlich, oder sie nimmt Zeit und Masse endlich, den Raum unendlich an, oder sie postulirt ein nach Zeit, Raum und Masse endliches Universum. Ebenso existirt die Unendlichkeitshypothese als eine einfache, in Bezug auf die Zeit, als eine zweifache, in Bezug auf Zeit und Raum, oder als eine dreifache, in Bezug auf Zeit, Raum und Masse*). Die erste dieser sechs Hypothesen liegt den von Kant in seiner „Theorie und Mechanik des Himmels“ entwickelten Anschauungen zu Grunde, der zweiten scheint sich Laplace zuzuneigen, die dreifache Endlichkeit ist in den meisten neueren Speculationen über die Erhaltung der Energie im Universum vorausgesetzt. Dagegen könnte die dreifache Unendlichkeitshypothese die populärwissenschaftliche genannt werden; sie pflegt in denjenigen Kreisen zu herrschen, in denen man den Vorurtheilen, welchen der Endlichkeitsbegriff entsprungen ist, entwachsen zu sein glaubt, aber von den Schwierigkeiten des Unendlichkeitsbegriffs keine Vorstellung

*) Historische Erläuterungen zu dem Folgenden finden sich in meinem Aufsatze: Ueber das kosmologische Problem. Vierteljahrsschrift für wissensch. Philosophie, I, S. 80 ff.

hat. Die Hypothese der einfachen Unendlichkeit findet sich in gewissen mystischen Anschauungen vertreten, die aus der Uebertragung transcendenter Raumspeculationen auf physikalisches Gebiet hervorgegangen sind. Die Annahme, dass das Universum nach Zeit und Raum unendlich, in Bezug auf die Masse der Materie aber endlich anzunehmen sei, hat in den kosmologischen Theorien kaum eine Berücksichtigung gefunden. Dennoch ist sie es, die mit den hinsichtlich der Kraft- und Energiegesetze gegenwärtig angenommenen Voraussetzungen vielleicht am besten übereinstimmen würde. Dies zeigt sich, wenn man die Folgerungen erwägt, die sich aus den zwei einander am meisten entgegengesetzten Hypothesen der dreifachen Endlichkeit und der dreifachen Unendlichkeit ergeben.

Die Annahme, dass die Materie nach Zeit und Raum und in Folge dessen auch in ihrer Masse begrenzt sei, stellt an unsere Anschauungsformen wie an unser begriffliches Denken gleich unerfüllbare Forderungen. Da Zeit und Raum constante Bestandtheile aller Erfahrung sind, so kann auch unser Denken in der Verknüpfung der Erfahrungen niemals von ihnen abstrahiren. Wollten wir aber eine Grenze von Zeit und Raum voraussetzen, so würde darin zugleich die begriffliche Fiction einer zeit- und raumlosen Erfahrung oder die Forderung eines Denkens von unvorstellbarem Inhalt gegeben sein. Aus der Annahme einer Zeit- und Raumbegrenzung des Universums folgt daher, dass auch das Causalprincip, die Form, in welcher unser Denken die Erfahrungen verknüpft, zwischen bestimmten Grenzen eingeschlossen wäre. In den älteren kosmologischen Anschauungen findet diese Begrenzung ihren Ausdruck darin, dass man die Idee der Schöpfung und des Weltuntergangs aus dem Gebiet der religiösen Vorstellungen auf das der Wissenschaft zu übertragen sucht. Beide Ereignisse werden dann als Glieder einer höheren Causalreihe angesehen, zwischen denen die empirische Causalität enthalten sei. Diese Auffassung krankt, wie der damit zusammenhängende Leibniz'sche Begriff des „Uebervernünftigen“, an dem Widerspruch, dass man die Formen unseres Denkens anwendet, während man sie gleichzeitig für unanwendbar erklärt. In der neueren Zeit hat im Gegensatze hierzu die physikalische Theorie meist an der Ansicht festgehalten, dass der auf dem Boden der Endlichkeitshypothese vorauszusetzende Anfang der Welt nur als ein bestimmter Anfangs*zustand* gedacht werden könne, über dessen Entstehung keine Rechenschaft zu geben sei. Gewöhnlich gilt der Nebelball der Kant-Laplace'schen Hypothese als dieser Anfangszustand. Da die

in ihm vorhandene Anordnung der materiellen Elemente die causale Bedingung zu allen weiteren Veränderungen in sich enthält, so war es logisch, diesem Anfangszustand nun auch einen in endlicher Zeit erreichbaren Endzustand gegenüberzustellen, wo jede mögliche Veränderung abgelaufen und eine Stabilität des Kosmos eingetreten sei. Schon Laplace hat ein solches Stabilitätsprincip aufgestellt, das aber bei ihm bloss eine relative Bedeutung besass, da es sich auf die Anordnung und die Bewegungen der Körper des Sonnensystems beschränkte und dagegen den physikalischen Einzelvorgängen, also namentlich auch den Lebenserscheinungen, einen unbegrenzten Spielraum weiterer Entwicklung liess. Jene relative Stabilität meinte Laplace schon in dem gegenwärtigen Zustand des Sonnensystems erreicht zu sehen. Die aus den Energiegesetzen gezogenen Folgerungen haben diese Annahme nicht bestätigt, und sie haben die Herstellung der kosmischen Stabilität zwar in eine beträchtliche Zeitferne gerückt, dafür aber den Stillstand des Ganzen zu einem um so durchgreifenderen gemacht. Die hierher gehörigen Folgerungen gründen sich auf jene Gesetze der Verwandlung der Energie, nach welchen die in der Natur vorkommenden Transformationen der Naturkräfte immer nur in einer Richtung unbeschränkt stattfinden können (vgl. S. 455). Hieraus ergibt sich, dass der Zustand der Welt sich fortwährend im Sinne derjenigen Umwandlungen verändern muss, welche nicht ohne Rest umkehrbar sind, und dass so schliesslich eine Grenze erreicht wird, bei der überhaupt keine Umwandlung mehr stattfinden kann, weil ein allgemeiner Gleichgewichtszustand eingetreten ist. In diesem Endzustand, in welchem der Verwandlungsinhalt der Energie, die so genannte Entropie der Welt, ihr Maximum erreicht hat, würde vollständige Temperaturgleichheit herrschen, und es würden demnach im Sinne der kinetischen Wärmetheorie alle Theilchen der Materie um stabile Gleichgewichtslagen schwingen*). Wäre unter solchen Bedingungen noch ein menschlicher Zuschauer möglich, so würde aber dieser auch keinen Anlass finden den Causalbegriff zu bilden, da sich keine Veränderung ereignete, welche die Frage nach ihrer Ursache erheben liesse. Diese physikalische Gestaltung der Endlichkeitshypothese führt daher ebenfalls zu einer empirischen Begrenzung des Causalbegriffs. Das logische Interesse der Deduction liegt jedoch augenscheinlich nicht darin, dass sie uns etwa eine

---

*) Clausius, Abhandlungen zur mechanischen Wärmetheorie, II, S. 42.

Vorstellung von dem wirklich zu erwartenden Ende der Dinge erwecken könnte, sondern dass sie für ein begrenztes und während einer gewissen Zeit annähernd unabhängiges System, wie ein solches vielleicht unser Sonnensystem ist, in eben dieser Zeit die allgemeine Richtung der Energieverwandlungen angibt, während zugleich die Ansicht, welche das Universum selbst für ein begrenztes System hält, an einer speciellen physikalischen Folgerung ad absurdum geführt wird.

Stellt man sich nun dem gegenüber auf den Standpunkt der Hypothese der dreifachen Unendlichkeit, so begegnet diese Schwierigkeiten anderer Art. Wie die vorige an den Energiegesetzen, so scheitert sie an den Kraftgesetzen. Zwar wird bei allen Naturkräften, deren Wirkung eine gewisse Zeit zu ihrer Fortpflanzung bedarf, wie Wärme und Licht, die Unendlichkeit der Masse im unendlichen Raum durch die Unendlichkeit der Zeit compensirt. So kann z. B. an einem Punkt die Menge der durch Strahlung fortgepflanzten Wärme schon deshalb nicht unendlich gross werden, weil es einer unendlich langen Zeit bedürfte, bis sich von den unendlich entfernten Massen des Weltalls die Wärme bis zu dem Punkt fortgepflanzt hätte, während überdies durch die Vorgänge der Emission und Absorption ein fortwährendes Streben nach Ausgleichung der Wärmeunterschiede stattfindet. Dagegen gibt es eine Naturkraft, für welche diese Compensation nicht zutrifft, weil sie nach der gegenwärtig gültigen Annahme keiner Zeit zu ihrer Fortpflanzung nöthig hat: die Gravitation. Merkwürdiger Weise hat nun hier die Physik dadurch eine Compensation zu erreichen vermocht, dass sie der momentanen Fortpflanzung durch den Raum die nämliche Wirkung zuschreiben musste, die bei anderen Naturkräften im Gefolge der zeitlichen Fortpflanzung eintritt. (Vgl. S. 434 f.) Trotzdem bleibt die Schwierigkeit, dass ein unendliches System, so lange man kein bestimmtes Gesetz der Vertheilung der Massen voraussetzt, weder einen gemeinsamen Schwerpunkt, noch überhaupt einen Punkt hat, auf den die sämmtlichen relativen Bewegungen schliesslich zu beziehen wären*). Auch schliesst die Hypothese, dass die Gravitationswirkung keine Zeit zu ihrer Fortpflanzung bedürfe und daher einen unendlichen Raum nicht nur in einer endlichen, sondern sogar in

*) Ueber die Forderung eines solchen Punktes vgl. meine Schrift über die physikalischen Axiome, S. 110, und C. Neumann, Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie. Leipzig 1870, S. 15.

einer verschwindend kleinen Zeit durchlaufe, offenbar eine vollendete Unendlichkeit ein.

Die erste dieser Schwierigkeiten lässt sich durch die Hülfsannahme beseitigen, dass die Dichtigkeit der Materie von einem bestimmten Punkte an allmählich ins Unendliche abnehme. Die einfachste Voraussetzung würde hier die Abnahme nach dem Verhältniss einer convergirenden unendlichen Reihe sein, so dass zwar die Ausdehnung der Materie unendlich, ihre Masse aber endlich bliebe. Denn nicht dieselben logischen Motive, die uns verhindern, eine endliche Grösse von Raum und Zeit zu statuiren, nöthigen uns, auch der Masse Unendlichkeit zuzuschreiben, da der materielle Substanzbegriff hypothetisch nach Anleitung der Erfahrung gebildet wird, wobei wir der Regel folgen, nichts in unsere Voraussetzung aufzunehmen, was nicht durch das Bedürfniss der causalen Erklärung der Erfahrungen gefordert wird. Wie wir auf diese Weise dazu gelangen, bei der Anordnung der Materie im Kleinen leere Räume zwischen ihren Elementen anzunehmen, so könnten wir darum auch in Bezug auf ihre Anordnung im Grossen ohne Widerspruch zu einer Hypothese geführt werden, welche die Endlichkeit der Masse in sich schliesst, indem sie entweder eine räumliche Begrenzung der materiellen Welt oder eine Vertheilung derselben im unendlichen Raume voraussetzt, bei der die Masse endlich bleibt. Die erste dieser Möglichkeiten würde mit der physikalischen Annahme, dass die materiellen Atome vermöge ihrer Bewegungsenergie überall bestrebt sind den leeren Raum zu erfüllen, im Widerspruche stehen. Dagegen würde die zweite, wonach die Materie dergestalt um einen bestimmten Schwerpunkt verteilt wäre, dass ihre Dichtigkeit von einer gewissen Grenze an immer mehr und zuletzt ins Unendliche abnimmt, nicht nur mit den sonstigen physikalischen Voraussetzungen im Einklange sein, sondern sie würde auch der allgemeinen Forderung der kosmischen Mechanik nach einem festen Punkt, auf den alle Bewegungen bezogen werden, entsprechen. Zugleich könnte das Gesetz der Constanz der Energie die Bedeutung eines universellen Naturgesetzes bewahren; denn es ist klar, dass der Begriff einer solchen Constanz nur bei einem endlichen System von Massen einen bestimmten Sinn besitzt. Auf der andern Seite aber würde die aus dem Verwandlungsgesetz gezogene Folgerung in Bezug auf den Stillstand der kosmischen Veränderungen in endlicher Zeit hinwegwegfallen, da eine solche Folgerung nicht mehr statthaft ist, sobald sich die Materie über einen unendlichen Raum verbreitet. Sollte schliesslich

dieser Hypothese entgegengehalten werden, auch die Annahme einer Abnahme der materiellen Masse nach dem Gesetz einer convergirenden Reihe schliesse eine vollendete Unendlichkeit ein, so würde dieser Vorwurf durch die Bemerkung zurückzuweisen sein, dass er auf einer Verwechslung des Endlichen mit dem Messbaren beruht. Eine Grösse kann endlich sein, ohne dass es möglich ist, sie in einer bestimmten Zahl anzugeben. Wir können aus dem Gesetz der Vertheilung der Materie schliessen, dass sie von endlicher Masse sei, ohne diese Masse wirklich messen zu wollen. In der That hat ja in der obigen Voraussetzung der Begriff der Masse von den zwei Unendlichkeiten, die man in ihm vereinigt denken kann, der unendlichen Grösse und der unendlichen Ausdehnung im Raume, nur die erstere verloren, während die zweite in der nämlichen infiniten Bedeutung erhalten geblieben ist, die Raum und Zeit selbst in allen ihren physikalischen Anwendungen besitzen müssen.

So sehr nun aber auch die gegenwärtig gültigen physikalischen Vorstellungen einer solchen Gestaltung des kosmologischen Grenzbegriffs das Wort zu reden scheinen, so soll damit doch nicht behauptet werden, dass sie auch die logisch vorzüglichste sei, oder dass sie muthmasslich physikalisch das Feld behaupten werde. Der Umstand, dass die in dem Gravitationsbegriff vorausgesetzte vollendete Unendlichkeit auf diesen Ausweg führt, berechtigt zu schweren Bedenken. Ist das Transfinite überhaupt ein physikalisch unzulässiger Begriff, so kann er auch nicht auf jenem indirecten Wege der zeitlosen Fortpflanzung einer Bewegungsenergie eingeführt werden. So ergibt sich auch von dieser Seite die Wahrscheinlichkeit, dass die Gravitation auf Fernewirkungen zurückzuführen sein wird, die sich mit sehr grosser, aber nicht unendlicher Geschwindigkeit fortpflanzen. Die empirischen Data für eine solche Annahme müssten astronomischen Beobachtungen entnommen werden. Obgleich solche bis jetzt noch nicht vorliegen, so ist übrigens die Annahme einer unendlichen Geschwindigkeit der Gravitation nicht gefordert, sondern es ist nur die Voraussetzung gerechtfertigt, dass dieselbe jeden für uns messbaren endlichen Raum in verschwindender Zeit durchdringt. Als eine weitere Folge der dreifachen Unendlichkeit würde dann noch die eintreten, dass von einer universellen Gültigkeit des Gesetzes der Constanz der Energie, wenn man unter einer solchen die Gültigkeit für das Ganze der Welt versteht, nicht mehr geredet werden könnte. Eine physikalische Grösse ist constant, wenn sie niemals zu- oder abnehmen kann. Einer unendlichen Zahl

können aber beliebige endliche Grössen zugefügt oder abgezogen werden, ohne dass sie sich darum in ihrer Grösse verändert. Das physikalische Mass der Constanz ist also überhaupt nur auf endliche Grössen oder auf abgeschlossene Massensysteme anwendbar. Da nun die einzelnen kosmischen Massensysteme niemals absolut abgeschlossen sein können, so würde unter der Voraussetzung eines dreifach unendlichen Universums das Energiegesetz überhaupt nur eine relative, für gewisse nach Zeit und Raum abgegrenzte Theile der Welt annähernd zutreffende Gültigkeit bewahren. Es versteht sich von selbst, dass hierin nicht im mindesten ein Widerspruch gegen jene Voraussetzung liegt. Vielmehr zeigt sich gerade an den aus dem Verwandlungsgesetz gezogenen Folgerungen, dass die an ein endliches System geknüpfte absolute Gültigkeit der Energiegesetze einer Correctur bedarf, die am wirksamsten durch den Uebergang zu dem Begriff der dreifachen Unendlichkeit herbeigeführt wird.

---

Drittes Capitel.

# Die Logik der Chemie.

## 1. Die chemischen Methoden.

### a. Allgemeine Aufgaben der chemischen Untersuchung.

Indem sich die Chemie die Aufgabe stellt, die Erscheinungen zu untersuchen, die mit den stofflichen Eigenschaften der Körper zusammenhängen, hat sie vor allem Rechenschaft zu geben von den Eigenschaften der einfachen Stoffe, der durch unsere Hülfsmittel nicht weiter zerlegbaren Elemente, die in der Natur vorkommen. Sie hat sodann die Bedingungen, unter denen diese Elemente zu Verbindungen zusammentreten, sowie die Beziehungen zu ermitteln, in welchen die Eigenschaften der zusammengesetzten Körper zu denen ihrer Bestandtheile stehen. Damit Hand in Hand geht die Aufsuchung der Ursachen, durch welche die zusammengesetzten Stoffe in ihre Elemente zerlegt werden, sowie die Feststellung der physikalischen Erscheinungen, von denen die Verbindungen und Zersetzungen der Körper begleitet sind. Das Ziel, das die Chemie

mittelst der Ergebnisse aller dieser Einzeluntersuchungen zu erreichen hofft, ist somit im allgemeinen ein doppeltes: es besteht in der Kenntniss der Stoffe und ihrer Verbindungen, und in dem Studium der Verbindungs- und Zerlegungsprocesse und ihrer Begleiterscheinungen. Der erste Theil dieser Aufgabe findet seine Verwirklichung in einem System der chemischen Verbindungen, der zweite in einer Theorie der chemischen Stoffbewegungen.

Die Existenz der chemischen Verbindungen legt unmittelbar die Annahme eigenthümlicher Anziehungen zwischen den Bestandtheilen derselben nahe. Diese Annahme findet in dem Begriff der chemischen Affinität ihren Ausdruck, einem Begriff den die Chemie schon in ihren Anfängen gewonnen hat, und der eben deshalb an und für sich völlig unbestimmt ist, da er die Ermittelung der Ursachen chemischer Verbindungen durchaus der näheren Untersuchung vorbehält. Von den beiden Theilen des chemischen Lehrgebäudes, in welchem diese Untersuchung abschliesst, dem System der chemischen Verbindungen und der Theorie der chemischen Stoffbewegungen, ist es speciell der letztere, dem die Beantwortung der Frage nach dem Wesen der Affinität zufällt. Nun kann erst mit Hülfe dieser Theorie eine rationelle Classification der Verbindungen gewonnen werden, während doch auch die Erkenntniss der Stoffbewegungen eine gewisse Uebersicht der Verbindungen voraussetzt. Hierdurch entsteht eine ziemlich verwickelte Wechselwirkung beider Untersuchungsgebiete. In den Anfängen und zum Theil noch in dem gegenwärtigen Zustande der Wissenschaft ist der Einfluss der systematischen Classification auf die theoretischen Anschauungen der vorwaltende; doch ist die umgekehrte Rückwirkung in der neuesten Entwicklung der Chemie zu erhöhter Bedeutung gelangt. Insofern die Kenntniss der quantitativen Verbindungsverhältnisse der Stoffe, die das System bietet, an und für sich schon gewisse Aufschlüsse über die aus der Affinität der Elemente hervorgehenden Gleichgewichtszustände gewährt, pflegt man wohl auch die aus solchen Betrachtungen hervorgehenden theoretischen Anschauungen einer chemischen Statik zuzurechnen und dieser die eigentliche Theorie der Stoffbewegungen als chemische Dynamik gegenüberzustellen. Da wir nun auf die Art der Stoffbewegungen hauptsächlich aus den begleitenden thermischen, optischen, elektrischen Erscheinungen sowie aus den Veränderungen, die bei den chemischen Umsetzungen in den physikalischen Constanten der Körper, in ihrer Dichtigkeit, Wärmecapacität, ihrem Brechungs- und elektrischen Leitungsvermögen u. s. w.,

eintreten, Rückschlüsse machen können, so sieht sich bereits die chemische Statik, noch mehr aber die Dynamik genöthigt, physikalische Untersuchungen zu Hülfe zu nehmen. Dies hat zunächst zur Abtrennung einer „physikalischen Chemie“ Veranlassung gegeben, einer Uebergangsdisciplin, die aber, in dem Masse als sie auf die allgemeine Richtung der chemischen Wissenschaft Einfluss gewann, wieder in eine allgemeine oder theoretische Chemie sich umwandelte.

Die Chemie ist diejenige Naturwissenschaft, in der die Methoden der Induction ihre schärfste Ausprägung gefunden haben. Aeussere und innere Ursachen wirken hierbei zusammen. Wie die deductive Natur der Mathematik und theoretischen Physik wesentlich durch die klare Erkenntniss der mathematischen und mechanischen Principien bedingt ist, von denen die Erklärung ausgehen kann, so verdankt umgekehrt die Chemie ihre methodischen Eigenschaften zum Theil der Unsicherheit, in der man sich in ihr über die nothwendigen principiellen Voraussetzungen befindet, noch mehr aber dem Umstande, dass in ihr das inductive Verfahren besonders günstige Bedingungen vorfindet. Während bei physikalischen Problemen alle Einzelaufgaben innig in einander eingreifen, so dass sich meist bei einer und derselben Untersuchung verschiedene logische Methoden combiniren, sondern sich auf chemischem Gebiete deutlicher die einzelnen Verfahrungsweisen. Denn die Stoffbestandtheile sind in gewissem Sinne stabiler als andere Naturerscheinungen. Sie gestatten es der Forschung, die Probleme, die sich ihr in Bezug auf die materielle Zusammensetzung der Körper darbieten, in regelmässig geordneter Folge von Stufe zu Stufe zu lösen, und selbst in solchen Fällen, wo die späteren Aufgaben noch nicht lösbar sind, bieten die zunächst zugänglichen ein hinreichendes Interesse dar, um sie selbständig in Angriff zu nehmen. So kommt es, dass schon die der Induction als vorbereitende Hülfsmittel dienenden Methoden der Analyse und Synthese namentlich in Bezug auf ihre elementaren Formen innerhalb der chemischen Forschung klarer als in irgend einem andern Gebiete entwickelt sind.

### b. Die chemische Analyse.

Die erste Frage, mit der wir an die Untersuchung der stofflichen Eigenschaften eines Körpers herantreten, ist die nach seiner Zusammensetzung aus einfacheren Bestandtheilen. Die Analyse ist

daher historisch die zuerst zur Ausbildung gelangte chemische Methode, und sie bleibt fortan diejenige die bei einer concreten Untersuchung allen andern voranzugehen pflegt. In den alchemistischen Anfängen der Chemie war sie noch getrübt durch die aus der Aristotelischen Elementenlehre überkommene Annahme einer Verwandlungsfähigkeit der einfachen Stoffe. Erst Robert Boyle stellte, indem er diese Annahme beseitigte, der chemischen Untersuchung das bestimmte Ziel, die unveränderlichen Elementarbestandtheile der Körper nachzuweisen. Er wurde dadurch der eigentliche Schöpfer der chemischen Analyse, die er zum ersten Mal mit diesem Namen in die Wissenschaft einführte*). Seine Analyse ist aber noch ausschliesslich eine qualitative: sie begnügt sich mit dem Nachweis der Bestandtheile einer Verbindung. Dennoch lag bereits in den corpuscularen Vorstellungen, die sich dieser Chemiker von dem Wesen der Verbindungen machte, der Keim zu der Entwicklung messender Untersuchungen. Indem er sich nämlich die Körper aus kleinsten und unveränderlichen Theilchen bestehend dachte, von deren wechselseitigen Anziehungen alle Verbindungs- und Zersetzungserscheinungen abhingen, wurde unmittelbar die Frage nahe gelegt, in welchen Mengeverhältnissen sich die Theilchen verschiedener Elemente in den zusammengesetzten Körpern verbinden. Noch aber fehlte dem Zeitalter Boyles die bestimmte Idee der Verbindung der Elemente nach constanten Gewichtsverhältnissen. Erst die Chemiker des 18. Jahrhunderts, ein Bergmann und Wenzel, die von dieser Idee ausgingen, wurden dadurch Urheber der quantitativen Analyse. Diese blieb jedoch in ihrem Fortschritt gehemmt, so lange die phlogistische Verbrennungstheorie durch die Annahme eines Stoffs von negativer Schwere, des Phlogiston, die Ausbildung folgerichtiger Vorstellungen über die chemischen Verbindungserscheinungen unmöglich machte. Indem Lavoisiers Verbrennungstheorie diese Unklarheit beseitigte, bestätigte sie zugleich nach vorübergehenden Kämpfen die Voraussetzung, dass die constanten Gewichtsverhältnisse der Elemente einer Verbindung einfachen und regelmässigen Zahlenverhältnissen entsprechen. Durch dieses Gesetz der multiplen Proportionen wurde nunmehr der quantitativen Analyse eine Reihe bestimmter Aufgaben gestellt und zugleich der Weg gezeigt, auf dem mit ihrer Hülfe ein auf die dauernden Affinitätswirkungen der Elemente gegründetes System der chemischen Verbindungen zu erreichen

*) Vgl. Kopp, Geschichte der Chemie, II, S. 58.

war. So ist hier von Stufe zu Stufe die Ausbildung der analytischen Methoden von Ideen ausgegangen, die ursprünglich einen hypothetischen Charakter besassen, dann aber in Folge der empirischen Bestätigungen die sie erfuhren den Werth von Principien gewannen, die für alle einzelnen Verfahrungsweisen massgebend wurden. Das Gesetz der Unveränderlichkeit der Stoffelemente bildete die Grundlage einer rationellen qualitativen Analyse; aus dem Gesetz der Verbindung nach constanten Gewichtsverhältnissen gingen die ersten Anfänge der quantitativen Analyse hervor, und das Gesetz der multiplen Proportionen lieferte endlich die stöchiometrischen Grundsätze, die für die Verwerthung der Resultate dieser Analyse massgebend wurden.

Als sich die chemische Untersuchung in den Anfängen ihrer Entwicklung befand, lag ihre grösste Schwierigkeit darin, dass die elementaren Bestandtheile der Körper erst aufgefunden werden mussten, während doch die methodische Zerlegung einer Verbindung in ihre Bestandtheile eigentlich schon eine Kenntniss der Elemente und ihrer Eigenschaften voraussetzt. Darum machen hier die frühesten analytischen Versuche in viel höherem Grade als im Gebiet der physikalischen Forschung den Eindruck eines unsichern Umhertastens. Der einzige einigermassen zuverlässige Weg war, dass man zunächst die Eigenschaften solcher Stoffe untersuchte, die sich den gewöhnlichen Trennungsmitteln gegenüber als unzerlegbar erwiesen hatten, und dass man nun nachforschte, welche unter den so gefundenen Elementen aus einer gegebenen Verbindung sich ausscheiden liessen oder an deren Eigenschaften wieder zu erkennen seien. Der Durchführung dieser Methode stand aber die mangelhafte Ausbildung der analytischen Operationen im Wege. Die früheste Chemie, von der Metalluntersuchung ausgehend, kannte fast nur die Schmelzung in der Hitze, meist unter Beihülfe zufällig als nützlich erfundener Zusätze zu den Metallerzen oder Legirungen, ein Verfahren das ausschliesslich der Ausscheidung des edleren Metalls aus Verbindungen oder Gemengen diente. Allmählich gesellte sich dazu die Anwendung der einfachsten physikalischen Hülfsmittel zum Behuf der Isolirung bestimmter Verbindungen von andern, mit denen sie mechanisch gemengt vorkommen: so die Sublimation und Destillation für die Trennung flüchtiger Stoffe, der Gebrauch der Lösungsmittel zum Zweck der Scheidung der unlöslichen von den löslichen Bestandtheilen. Zuletzt wurde die dritte und wichtigste Classe analytischer Operationen ausgebildet, darin bestehend dass man die zu unter-

suchenden Stoffe an den Erscheinungen erkennt, die sie in Folge der chemischen Wechselwirkung mit andern Stoffen von bekannten Eigenschaften, den so genannten Reagentien, darbieten. Die chemische Einwirkung des Reagens kann hierbei wieder durch erhöhte Temperatur oder durch Lösung vermittelt werden. Diese dritte Methode ist für die analytische Chemie die weitaus fruchtbarste geworden; ihr gegenüber hat namentlich die zweite mehr den Charakter eines vorbereitenden Hülfsmittels angenommen, welches dazu dient, die chemischen Verbindungen eines Gemenges in gewisse Gruppen zu trennen, die dann gesondert der näheren Analyse mittelst der Reagirmethode unterworfen werden. Die letztere aber gestattet es theils durch die Niederschläge, welche die aus der Einwirkung der Reagentien hervorgehenden Verbindungen bilden, theils durch die charakteristischen Färbungen, welche die Verbindungen annehmen, die verschiedenen Bestandtheile eines untersuchten Körpers zu erkennen. Ferner macht es die Combination mit der Lösungsmethode möglich, allmählich aus einer complicirten Stoffverbindung alle einzelnen Bestandtheile theils direct theils mit Hülfe chemischer Bindung zu isoliren, indem man die zuerst erhaltenen Niederschläge mit Lösungsmitteln behandelt, in den gewonnenen Lösungen wieder Niederschläge hervorbringt, u. s. w. Durch dieses Verfahren der successiven Isolirung der Stoffe wird die Reagirmethode namentlich auch das wirksamste Hülfsmittel der quantitativen Analyse.

Dagegen liegt es in dem Wesen dieser Methode, dass sie in der Regel nicht zu einer vollständigen Zerlegung der Körper in ihre einfachen Bestandtheile zu führen vermag. Indem sie nämlich im allgemeinen die gegebenen Verbindungen in andere Verbindungen überführt, deren Eigenschaften eine leichtere Isolirung gestatten, wird es ihr nur in seltenen Ausnahmefällen möglich, die letzten Elemente der Körper direct darzustellen. In dieser Beziehung treten ihr daher zwei physikalische Hülfsmittel ergänzend zur Seite, deren rationeller Benützung vorzugsweise die neuere Chemie ihre Kenntniss der elementaren Stoffe verdankt. Sie bestehen in der Zerlegung durch die Wärme und durch den elektrischen Strom. Obgleich, wie schon oben bemerkt, die Benützung erhöhter Temperatur speciell zum Zweck der Reindarstellung der edeln Metalle, eines der frühesten analytischen Hülfsmittel bildete, so beginnt doch die bewusste, von der Einsicht in die physikalischen Wirkungen der Wärme geleitete Anwendung dieses Verfahrens erst mit Lavoisier, und es liegt darin zum Theil die epochemachende Bedeutung der wissenschaft-

lichen Richtung, die er einschlägt. Während die vorangegangene Chemie an der Hand der Reagirmethode nur sporadisch mit elementaren Stoffen bekannt geworden war und sichere Hülfsmittel der Unterscheidung zwischen den zusammengesetzten und einfachen Körpern überhaupt noch nicht besass, wird von Lavoisier und seinen Nachfolgern die Aufgabe der vollständigen Zerlegung der Körper in ihre Elemente mit Erfolg in Angriff genommen, an die dann unmittelbar die Frage nach der Gruppirung der Elemente in den Verbindungen oder nach der Elementarconstitution der Körper sich anschliesst. Bei diesem Uebergang kommt der Einführung eines weiteren chemischen Scheidemittels von physikalischer Natur, der Elektricität, die grösste Bedeutung zu. Denn die Ausscheidung der verschiedenen Bestandtheile einer Verbindung an den beiden Polen des galvanischen Stromes erweckte zugleich bestimmte Vorstellungen über die Art der wechselseitigen Bindung der Elemente, wodurch, abgesehen von der Richtigkeit der so entstandenen Vorstellungen, jedenfalls das Problem der Elementarconstitution zu klarerem Bewusstsein gebracht wurde.

Hiernach können wir allgemein die Hülfsmittel der chemischen Analyse in solche von physikalischem und in solche von specifisch chemischem Charakter unterscheiden. Ein Theil der ersteren benützt ausschliesslich Bewegungsvorgänge, an denen die ungetrennten chemischen Molecüle betheiligt sind. Hierher gehören die seit alter Zeit geübten Verfahrungsweisen der Lösung, Filtration, Destillation und Sublimation, zu denen in neuerer Zeit noch, als ein die mechanische Scheidung gewisser Lösungsgemenge vermittelnder Vorgang, die Diffusion getreten ist. Alle diese Hülfsmittel, die sich auf die Aggregatverhältnisse der Körper stützen, besitzen im ganzen nur einen vorbereitenden Charakter: sie bezwecken nicht die Zerlegung der Verbindungen selbst, sondern deren Ausscheidung aus Gemengen zum Behuf der nachfolgenden eigentlichen Analyse. Anders verhält es sich mit den physikalischen Methoden, welche die inneren Bewegungsvorgänge der chemischen Molecüle verwerthen, wie die Wärme und den elektrischen Strom. Ihr Streben ist dahin gerichtet, durch diese Bewegungen eine chemische Verbindung in ihre Elemente zu trennen. Wie jene mechanischen Vorbereitungsmittel den Anfang, so bilden daher sie in der Regel das Ende der Analyse. In der Mitte zwischen beiden liegen dann die chemischen Methoden im engeren Sinne, die Reagirmethoden, die in planmässiger Weise von den Affinitäts-

verhältnissen der Körper Gebrauch machen, um theils die durch mechanische Mittel nicht trennbaren Stoffe eines Gemenges, theils die näheren Bestandtheile einer chemischen Verbindung qualitativ und quantitativ zu bestimmen. Dabei kann übrigens diese chemische Methode in der mannigfaltigsten Weise mit den vorangegangenen physikalischen verbunden werden. So pflegt die Anwendung der Wärme durch die Zerlegungen die sie bewirkt zugleich neue Affinitäten frei zu machen, wodurch sie von selbst zur Combination mit der Reagirmethode führt, ein Verfahren welches dann noch durch die absichtliche Hinzufügung von Reagensstoffen unterstützt werden kann. Ein augenfälliges Beispiel dieser Art bietet die gewöhnliche Methode der organischen Elementaranalyse, bei der durch die Hinzufügung einer leicht reducirbaren Substanz im Ueberschuss zu dem einer starken Temperaturerhöhung ausgesetzten organischen Stoff die vollständige Verbrennung des Wasserstoffs zu Wasser und des Kohlenstoffs zu Kohlensäure eintritt, worauf man dann beide in gasförmigem Zustand mit Stoffen in Berührung bringt, die zu den gebildeten Verbrennungsproducten eine starke Affinität äussern. Hierdurch werden beide Gase in fixe Verbindungen übergeführt, in denen sie leicht durch Wägung bestimmt werden können. Aehnlich pflegt sich die Zersetzung durch den galvanischen Strom sofort mit Affinitätswirkungen zu verbinden. Bei der Einwirkung des Stroms auf wässerige Lösungen z. B. wirkt am negativen Pol der ausgeschiedene Wasserstoff reducirend und am positiven der Sauerstoff oxydirend, sobald reducirbare und oxydirbare Körper vorhanden sind.

Mit den angeführten Hülfsmitteln ausgerüstet kann nun die chemische Analyse zwei Ziele verfolgen. Das eine besteht in der Ermittelung der Bestandtheile eines gegebenen Körpers, das andere in der Bestimmung der Elementarconstitution einer chemischen Verbindung. Das erste Verfahren entspricht der allgemeinen Form der elementaren Analyse, das zweite ist ein specieller Fall causaler Analyse. (Abschn. I, S. 3 f.) Auch hier muss selbstverständlich die erste der zweiten vorausgehen; doch kann für manche praktische Zwecke und in solchen Fällen, wo die Constitution der aufgefundenen Verbindungen bereits als bekannt vorausgesetzt werden darf, mit der Lösung der elementaren Aufgabe die ganze Untersuchung abgeschlossen sein. Da es sich hierbei im allgemeinen nur um die Anwendung fest bestimmter Regeln handelt, die aus den bekannten Reactionen der einzelnen Stoffe gewonnen sind, so trägt der gewöhnliche Gang der qualitativen und quan-

titativen Analyse bei dem heutigen in Bezug auf die allgemeine Unterscheidung und Nachweisung der Elemente vorläufig beinahe schon abgeschlossenen Zustande der Chemie mehr einen technischen als wissenschaftlichen Charakter an sich. Nur in solchen Fällen, wo neue Untersuchungsmethoden der Elementaranalyse zu Hülfe kommen, wird für dieselbe so lange ein höheres Mass erfinderischer Thätigkeit in Anspruch genommen, bis sich auch hier bestimmte Regeln der technischen Ausführung entwickelt haben. Abgesehen von solchen Ausnahmefällen beginnt aber die eigentlich wissenschaftliche Aufgabe erst mit der an die Resultate der Elementaranalyse sich anschliessenden Untersuchung der elementaren Constitution einer Verbindung, also mit der Frage, in welcher Weise die Elemente in Folge der Affinitätswirkungen an einander gekettet sind. Die erschöpfende Beantwortung derselben gehört an und für sich nicht mehr in das Gebiet der blossen Analyse, sondern sie fällt erst der auf Grund analytischer und synthetischer Untersuchungen operirenden chemischen Induction anheim. Gleichwohl ist es jene Frage, die schon der Analyse ihre Richtung anweist, und die zur Anwendung bestimmter analytischer Methoden geführt hat, die für die blosse Kenntniss der elementaren Bestandtheile der Körper nicht erforderlich sein würden.

Nur bei den einfachsten chemischen Verbindungen ist mit der Elementaranalyse alles erledigt, was die analytische Untersuchung überhaupt zu leisten vermag. Sobald aber mehr als zwei Elemente in eine Verbindung eingehen, tritt an die Analyse die Aufgabe heran, nicht bloss die letzten Elemente nachzuweisen, sondern zunächst darzuthun, ob und in welcher Weise die zusammengesetzte Verbindung in einfachere Verbindungen zerlegt werden kann. Es tritt so der Elementaranalyse die stufenweise Analyse gegenüber als diejenige analytische Methode, die der chemischen Induction die für die Auffindung der Constitution der Verbindungen zunächst massgebenden Erfahrungen entgegenbringt. Diese Methode wird ein um so unentbehrlicheres Hülfsmittel, je verwickelter sich die Verbindungen gestalten. Darum ist es vorzugsweise das Gebiet der organischen Chemie, in dem sie zur Entwicklung gelangt ist. Die Hülfsmittel, deren sie sich bedient, sind im wesentlichen die nämlichen, die auch bei der Elementaranalyse zur Anwendung kommen. Nur bringt in diesem Fall der Zweck der Analyse gewisse Beschränkungen mit sich, da dieser Zweck eine allmähliche Zerlegung fordert, bei der die Zwischenstufen einfacherer Verbindungen mög-

lichst vollständig durchlaufen werden. Unter den physikalischen Einwirkungen ist es vor allem die Wärme, die sich, weil sie selbst eine sehr vollkommene Abstufung zulässt, zur Einleitung stufenweiser Veränderungen besonders geeignet erweist, sei es dass sie für sich allein angewandt wird oder, wie es gewöhnlich geschieht, in Verbindung mit gewissen chemischen Affinitätswirkungen, die man durch sie zu steigern sucht. Selbst in den Fällen übrigens, wo ohne die Zuhülfenahme einer äusseren Affinität die Wärme zur Verwendung kommt, pflegt es an solchen begleitenden Affinitätswirkungen nicht zu fehlen. Denn indem die Wärme durch die Zunahme der molecularen Bewegungen die sie erzeugt die complexen Verbindungen spaltet, ruft sie zugleich zwischen den so entstandenen Bestandtheilen neue Affinitätswirkungen hervor, aus denen einfachere Verbindungen entspringen. So zerfallen die sauerstoffreichen organischen Säuren unter dem Einfluss der Wärme einerseits in die noch sauerstoffreicheren binären Verbindungen der Kohlensäure und des Wassers und anderseits in einfachere organische Säuren von geringerem Sauerstoffgehalt; die sauerstoffarmen Fettsäuren spalten sich in Kohlensäure und in flüchtige, völlig sauerstofffreie Producte, die Kohlenwasserstoffe.

Aehnlich wie in diesen Fällen der in den ursprünglichen Verbindungen vorhandene Sauerstoff unter dem Einfluss der Wärme Affinitätswirkungen äussert, die auf die Art der Zerlegung von wesentlichem Einflusse sind, so spielen auch unter den äusseren Reagentien, welche Zerlegungen einleiten, die Oxydationsmittel, wie die Salpetersäure, die Hyperoxyde, die Hydrate der Alkalien, die hervorragendste Rolle. Durch die Oxydation der zusammengesetzten Fettsäuren z. B. entstehen einerseits einfachere flüchtige Fettsäuren, anderseits gewisse fixe Säuren, wie Bernsteinsäure, Oxalsäure u. s. w., beide von höherem Sauerstoffgehalt. Das thierische und pflanzliche Eiweiss liefert theils eine Reihe flüchtiger Fettsäuren, theils Ammoniakderivate, und diese zunächst entstehenden Producte können durch weitere Einwirkung des Sauerstoffs schliesslich vollständig in die binären Verbindungen Kohlensäure, Wasser und Ammoniak übergeführt werden.

Der Versuch, andere Elemente von starker Affinität in ähnlicher Weise wie den Sauerstoff zur Zerlegung der zusammengesetzten Kohlenstoffverbindungen zu verwenden, bildet einen wichtigen Wendepunkt in der Entwicklung der organischen Chemie. Insbesondere ist das Chlor in diesem Sinne benützt worden; neben ihm die nächst

verwandten Elemente Brom und Jod, ausserdem Schwefel, Phosphor, Arsen und die mit starken Affinitätswirkungen begabten Metalle. Die so bewirkten Veränderungen unterscheiden sich nun aber von den Sauerstoffzersetzungen organischer Substanzen wesentlich dadurch, dass, sofern nicht andere analytische Hülfsmittel, wie die Wärme und Oxydation, zu Hülfe gerufen werden, die Einwirkung des zersetzenden Elementes sich darauf beschränkt, dass es an der Stelle eines andern Elementes welches frei wird, in der Regel des Wasserstoffs, in die Verbindung eintritt. Man bezeichnet aus diesem Grund derartige Zersetzungen als Substitutionen. Zugleich aber ist klar, dass sie ihrem allgemeinen Charakter nach den Uebergang zu den synthetischen Methoden bilden. In der That kann man die Ueberführung einer Verbindung in ein Substitutionsproduct gleicher Stufe als einen Vorgang betrachten, bei dem sich eine einfache Zerlegung, z. B. die Ausscheidung von Wasserstoff durch die Affinität des Chlor, und eine einfache Synthese, der Eintritt von Chlor an die Stelle des ausgeschiedenen Wasserstoffs, unmittelbar an einander anschliessen.

### c. Die chemische Synthese.

Nachdem die chemische Analyse die zusammengesetzten Körper zerlegt hat, entsteht die umgekehrte Aufgabe: die Verbindungen aus ihren Elementen zusammenzusetzen. Durch die Lösung dieser Aufgabe sollen einerseits die Entstehungsbedingungen der Verbindungen erkannt, anderseits die Resultate der stufenweisen Analyse geprüft werden, um auf diese Weise eine vollständigere Grundlage für die chemische Induction zu gewinnen.

Die äusseren Hülfsmittel der chemischen Synthese sind mit denen der Analyse völlig übereinstimmend. Wärme, Elektricität und chemische Affinität sind auch hier die hauptsächlichsten Agentien. Dies hat seinen naheliegenden Grund darin, dass die synthetischen Operationen immer analytische voraussetzen, die ihnen unmittelbar vorangehen müssen. Die Elemente, die in eine neue Verbindung eintreten sollen, müssen aus andern Verbindungen getrennt werden. Die chemische Synthese stützt sich daher auf die Affinität, welche die Elemente im Status nascendi entwickeln, und ihre Hülfsmittel sind analytische: sie sind dazu bestimmt, durch die Zerlegung vorhandener Verbindungen einen Status nascendi herbeizuführen, durch den sich ohne weitere Beihülfe die beabsichtigte

Synthese vollziehen muss. Das Verständniss der synthetischen Operationen, namentlich insoweit die elementaren Körper an ihnen betheiligt sind, ist deshalb wesentlich erst durch die Annahme einer wechselseitigen Bindung gleichartiger Atome in den einfachen Stoffen sowie durch die Anschauungen der neueren Wärmetheorie über den Bewegungszustand der Körperelemente ermöglicht worden, und die synthetischen Processe haben ihrerseits zur Befestigung dieser theoretischen Vorstellungen beigetragen. Eine Mischung aus 2 Volumtheilen Wasserstoff und 1 Volum Sauerstoffgas kann bekanntlich bei mässiger Temperatur eine beliebig lange Zeit aufbewahrt werden, ohne dass die Affinität der beiden Gase zu einander rege wird, während ein wiederholtes Durchschlagen des elektrischen Funkens genügt, um in kurzer Zeit das Gasgemenge in Wasser zu verwandeln. Diese und zahlreiche ähnliche Erscheinungen werden vollkommen verständlich, wenn man voraussetzt, dass in dem Wasserstoff und Sauerstoff die gleichartigen Atome an einander gebunden sind, aus dieser Verbindung aber durch die Erschütterung, die der elektrische Funke bewirkt, getrennt werden, so dass nun erst die Affinität der ungleichartigen Atome zur Wirkung gelangen kann. Auf das nämliche Princip lässt sich die Wirkung der Wärme zurückführen, die ein noch allgemeiner gebrauchtes Hülfsmittel zur Hervorbringung des für die chemische Synthese erforderlichen Entstehungszustandes ist.

Die Einwirkung der genannten physikalischen Agentien genügt in der Regel, um die einfachen binären Verbindungen, wie z. B. die des Chlor, Jod, Sauerstoff, Schwefel u. s. w. mit dem Wasserstoff, die der meisten nichtmetallischen und metallischen Elemente mit dem Sauerstoff, die einfachsten Kohlenwasserstoffe, auf synthetischem Wege zu erzeugen. Dagegen verlangen die zusammengesetzteren Verbindungen, namentlich des Kohlenstoffs, ausserdem noch die Zuhülfenahme bestimmter Affinitätswirkungen, und es muss die Synthese eine stufenweise sein, wenn sie in fundamentaler Form, d. h. von den Elementen ausgehend, durchgeführt werden soll. Diese stufenweise Synthese entspricht dann dem umgekehrten Verfahren der stufenweisen Analyse auch darin, dass sie neben ihr das hauptsächlichste Mittel ist, um einen Einblick in die Constitution der Verbindungen zu erlangen. Eine besondere Wichtigkeit besitzt dabei die stufenweise Synthese der Kohlenstoffverbindungen. In ihr spielt der Wasserstoff, als solcher oder in Verbindungen, eine ähnlich bedeutsame Rolle wie der Sauerstoff bei der stufenweisen Zersetzung. Der Wasserstoff kann aber hierbei theils direct an den Kohlenstoff

gebunden, theils durch seine Affinität zum Sauerstoff wirksam werden, indem er sauerstoffreicheren organischen Stoffen Sauerstoff entzieht und dadurch sauerstoffärmere Verbindungen zurücklässt. Auf diese Weise verbindet sich die Synthese ähnlich mit dem Verfahren der Reduction, wie die Analyse der organischen Substanzen die Oxydation zu Hülfe nahm. Directe Wasserstoffbindungen kommen vor allem bei der Synthese der Elemente zu binären Verbindungen vor. So vereinigt sich der einfachste Kohlenwasserstoff, das Acetylen ($C_2H_2$), der unter dem Einfluss des elektrischen Funkens direct aus den Elementen entsteht, in der Wärme mit weiteren Mengen Wasserstoffs, indem aus ihm complexere Kohlenwasserstoffe von höherem Wasserstoffgehalte hervorgehen. Aehnliche Umwandlungen vollziehen sich durch den Einfluss einfacher wasserstoffhaltiger Verbindungen, wie der Jodwasserstoffsäure, in der Wärme. Wie in dem letzteren Fall die Affinität des Wasserstoffs im Status nascendi benützt wird, so geschieht dies auch bei den Synthesen, die sich als Reductionsvorgänge darstellen: so bei der Synthese der Ameisensäure ($CH_2O_2$) aus Kohlensäure und Wasser durch Einwirkung des metallischen Kalium, der Oxalsäure ($C_2H_2O_4$) aus Kohlensäure und Natrium oder aus Cyan und Wasser, u. dergl. In den meisten dieser Fälle wird die starke Affinität der Alkalimetalle zum Sauerstoff als Reductionsmittel verwerthet.

Da nun aber die einfachen Einwirkungen des elektrischen Schlags und der Wärme genügen, um die binären Verbindungen des Kohlenstoffs und Wasserstoffs direct aus den Elementen zusammenzusetzen, so spielt bei der aufsteigenden Synthese der Kohlenstoffverbindungen auch die Oxydation eine sehr wichtige Rolle; neben ihr kommt die Bindung anderer Elemente, wie des Chlors, der Alkalimetalle, sowie die directe Aufnahme des Wassers zu mannigfacher Verwerthung. So werden aus den Kohlenwasserstoffen auf synthetischem Wege Alkohole erzeugt, indem man zunächst durch Einwirkung von Chlor einen Chlorwasserstoffäther bildet und dann diesen durch Einwirkung von Kali oxydirt, wobei er in einen Alkohol und in Chlorkalium zerfällt. Aus dem Alkohol lässt sich dann durch directe Oxydation die zugehörige Säure gewinnen u. s. w.

Indem sie auf diese Weise in der mannigfaltigsten Art die Affinitätswirkungen der Elemente benützt, stützt sich die chemische Synthese auf die bei der analytischen Untersuchung gewonnenen Ergebnisse über die Affinitätsverhältnisse der Stoffe. Die synthetischen Versuche selbst werden sodann durch Vermuthungen über die

Gruppirung der Elemente in den herzustellenden Verbindungen geleitet. Da durch die Ausführung der Operationen solche Vermuthungen bald bestätigt bald widerlegt werden, so werden auf diesem Wege die mittelst der Analyse gewonnenen Anschauungen über die Constitution der Verbindungen berichtigt und die für die chemische Induction und Deduction erforderlichen Voraussetzungen vervollständigt.

### d. Die chemische Induction.

Die chemische Elementaranalyse begnügt sich mit der Nachweisung der unzerlegbaren Bestandtheile einer Verbindung und ihres quantitativen Verhältnisses. Die stufenweise Analyse ermittelt die einfacheren Zwischenproducte, die bei der allmählichen Zerlegung einer complexen Verbindung entstehen. Die Synthese bestätigt und vervollständigt sodann die hierbei erhaltenen Resultate, indem sie die Verbindungen theils aus ihren Elementen, theils aus einfacheren Verbindungen zusammensetzt. Da nun aber die bei der stufenweisen Zerlegung entstehenden Zwischenproducte in der Regel keineswegs in der Form, in der sie gewonnen werden, in der ursprünglichen Verbindung enthalten sind, und da ebenso bei der stufenweisen Synthese neue Stoffgruppirungen sich bilden können, so geben diese Untersuchungen niemals unmittelbaren Aufschluss über die Constitution einer Verbindung. Vielmehr müssen zu diesem Zweck zahlreiche unter verschiedenen Bedingungen vorgenommene analytische und synthetische Untersuchungen combinirt und mit den Untersuchungsresultaten an andern verwandten Verbindungen verglichen werden. Diese Combination der Resultate, bei der überdies die physikalischen Begleiterscheinungen der Zersetzungen und Verbindungen zu berücksichtigen sind, ist die Aufgabe der chemischen Induction.

Wie die physikalische Induction, so bedarf auch die chemische irgend welcher hypothetischer Voraussetzungen, die ihr zur Führung bei der Verknüpfung der Untersuchungsresultate dienen müssen. Diese Voraussetzungen werden irgend einer an sich noch unzureichenden Gruppe von Erfahrungen entnommen. Der weitere Fortschritt vollzieht sich dann vermittelst der Bestätigung, Widerlegung oder Berichtigung solcher Hypothesen, ein Entwicklungsgang der zu einer immer vollständigeren Uebereinstimmung der gewonnenen theoretischen Anschauungen mit den verschiedenartigen Erfahrungen

führt. In der Chemie hat jedoch, wie in allen von der Physik abhängigen Zweigen der Naturlehre, diese Entwicklung dadurch einen eigenthümlichen Charakter angenommen, dass vorwiegend durch die jeweils dominirenden physikalischen Anschauungen zunächst den provisorischen Hypothesen, dann aber auch den definitiven theoretischen Ansichten ihre Richtung gegeben wurde. In dieser Beziehung lassen sich vier Perioden in der Entwicklung der neueren Chemie unterscheiden, in deren jeder eine eigenthümliche Form der Induction herrschend ist, wobei aber diese nur in einer jener vier Perioden ausschliesslich von specifisch chemischen Thatsachen, in den drei übrigen vorwiegend von physikalischen Anschauungen bestimmt wird.

In der ersten Periode der chemischen Induction ist es die Gravitationstheorie, welche die massgebende Bedeutung besitzt. Schon der Umstand, dass sich die Chemie seit dem Beginn ihres quantitativen Zeitalters der Wage als des einzig geeigneten Hülfsmittels zur Nachweisung der Mengeverhältnisse der Stoffe bediente, konnte auf die Schwerkraft als die nächste Ursache der chemischen Affinität hinweisen, um so mehr da auch diese als eine anziehende Kraft erschien. Das vorige Jahrhundert war aber unter der Nachwirkung der Newton'schen Gravitationstheorie geneigt, alle Anziehungserscheinungen auf die allgemeine Schwere zurückzuführen. In zwei Formen hat die Idee der Gravitation auf den Begriff der Affinität Anwendung gefunden. Bei der ersten suchte man den Erfahrungen über die constanten Gewichtsverhältnisse der in den Verbindungen enthaltenen Elemente unmittelbar mittelst bestimmter Voraussetzungen über die anziehenden Eigenschaften der kleinsten Theilchen der Körper Rechnung zu tragen; bei der zweiten suchte man die Abhängigkeit der Schweranziehung von der Masse direct auch auf die chemische Anziehung anzuwenden und die mit dieser Voraussetzung im Widerspruch stehende Constanz der Zusammensetzung gewisser Verbindungen aus physikalischen Nebenbedingungen zu erklären. Die erste Richtung ist durch Bergmann vertreten, der damit der Hauptbegründer des Begriffs der chemischen Affinität wird. Diese erscheint bei ihm als derjenige Specialfall der Schwerkraft, wo dieselbe zwischen den kleinsten Theilchen der Körper wirksam wird, so dass sie unmittelbar von deren Form und Stellung abhängig ist. Hierdurch soll es geschehen, dass sich gewisse Atome leichter anziehen als andere, und dass sie sich regelmässig in bestimmten Zahlverhältnissen an einander lagern. So wird hier die allgemeine Anziehung zu einer „attractio electiva“, bei der alles von

der ursprünglichen Natur der Elemente abhängt. Der Vertreter der zweiten Richtung ist Berthollet. Ihm gilt die Abhängigkeit der Anziehung von der Masse als ein festes Naturgesetz, das auch bei den chemischen Anziehungen keine wirklichen, sondern höchstens durch die Combination mit andern Naturgesetzen scheinbare Ausnahmen erleiden kann. Als solche Nebenbedingungen, welche die Wirksamkeit der Massen in den kleinsten Entfernungen beschränken, betrachtet er die Unlöslichkeit mancher Verbindungen, die Krystallisirbarkeit anderer, den gasförmigen Zustand gewisser Stoffe. Aber mit so richtigem Blick er hierbei die von der starren Affinitätstheorie vernachlässigte Bedeutung der physikalischen Bedingungen der Verwandtschaftsäusserung vorausahnen mag, so ist er doch allzu sehr in der Gravitationsidee befangen, um der specifischen Eigenthümlichkeit der chemischen Erscheinungen gerecht werden zu können. Das Gesetz der constanten Gewichtsverhältnisse der Elemente in den Verbindungen bleibt ihm eine Ausnahme, während es sich mehr und mehr durch die Fortschritte der quantitativen Analyse als die ausnahmslose Regel bestätigt, die demnach auch den Hypothesen über das Wesen der chemischen Verbindungen ihre Richtung anweist. So erringt die Bergmann'sche Affinitätslehre den Sieg, und sie führt zugleich, indem das Gesetz der constanten Gewichtsverhältnisse durch Dalton zum Gesetz der multiplen Proportionen, d. h. der constanten und einfachen Gewichtsverhältnisse, eingeschränkt wird, mit innerer Nothwendigkeit zur atomistischen Hypothese. Die Anziehungen zwischen den Atomen werden nun zwar vielfach noch als Anziehungen kleinster Massen gedacht. Nachdem aber der specifische Inhalt des Gravitationsgesetzes verschwunden ist, steht der Unterordnung unter eine andere Naturkraft, die den Affinitätswirkungen homogener erscheint, nichts mehr im Wege.

Eine solche Naturkraft bietet sich nun in der galvanischen Elektricität dar. Die zweite Periode der chemischen Induction, zu welcher die auf das Gesetz der multiplen Proportionen gegründete atomistische Vorstellung den Uebergang bildet, gehört daher der elektrochemischen Hypothese an. Zwischen den Erscheinungen der Volta'schen Säule und der chemischen Wahlverwandtschaft besteht an sich schon eine gewisse Analogie. Wie die entgegengesetzten elektrischen Spannungen der Pole sich ausgleichen in dem elektrischen Strom, so neutralisiren sich Stoffe von entgegengesetzten Eigenschaften, wie Säure und Basis, indem sie sich durch chemische Wahlverwandtschaft verbinden. Die im Jahre 1800 von Nicholson und

Carlisle entdeckte Wasserzersetzung durch die galvanische Kette, der bald die Nachweisung der zerlegenden Wirkung des Stromes auf andere Verbindungen nachfolgte, musste daher sofort die Idee einer näheren Beziehung der elektrischen Kraft zu der chemischen Affinität nahe legen. Auch diese Idee fand in zwei verschiedenen successiv entstandenen hypothetischen Anschauungen ihren Ausdruck. Dass die Affinität auf den entgegengesetzten elektrischen Eigenschaften der chemischen Elemente beruhe, war die Ueberzeugung, von der beide ausgingen. Der Gegensatz der Elemente selbst konnte nun aber wieder entweder als eine blosse Folge ihrer Berührung betrachtet oder auf ursprüngliche Eigenschaften bezogen werden. In der ersten unmittelbar an die physikalische Contacthypothese Voltas anknüpfenden Weise dachte sich Humphry Davy den elektrochemischen Vorgang, in der zweiten, welche die elektrischen Gegensätze in directe Beziehung zur chemischen Affinität bringt, fasste Berzelius die Erscheinungen auf. Während dort die elektrischen Vorgänge immer noch als Begleiterscheinungen der chemischen Wechselwirkungen betrachtet werden können, werden hier beide einander gleichgesetzt: die chemische Affinität selbst ist der elektrische Gegensatz der Atome. Diese aber dachte sich Berzelius, nach Analogie der einfachen Kette oder des Magnetes, jedes mit einem positiven und einem negativen Pole versehen; nur sollte für die verschiedenen Elemente die absolute Elektricitätsmenge und bei jedem einzelnen Elemente die relative der beiden Pole eine verschiedene sein, beim Sauerstoff also z. B. die negative, beim Wasserstoff die positive überwiegen. Die absolute Elektricitätsmenge der Atome wurde dann als massgebend für die Grösse, das relative Uebergewicht der einen oder andern als massgebend für die Richtung der Affinität betrachtet. Die aus dieser Hypothese hervorgegangenen Vorstellungen haben während einer längeren Zeit die chemische Induction geleitet. Auch in solchen Fällen, wo nicht etwa die wirkliche Zerlegung durch den galvanischen Strom diese Betrachtungsweise unmittelbar rechtfertigte, gewöhnte man sich, die Resultate der chemischen Analyse nach dem dualistischen Schema zu interpretiren, das sich aus der elektrischen Spannungsreihe der Elemente ergab. Das Gebiet der so genannten unorganischen Chemie fügte sich leicht diesem Schema. Die meisten zusammengesetzten Körper liessen sich hier unmittelbar entweder als binäre Verbindungen aus einem elektropositiven und einem elektronegativen Bestandtheile betrachten, wie die Säuren, Basen und Haloidsalze, oder als quaternäre Verbindungen, die wieder

aus zwei binären bestünden, wie die Salze der Sauerstoffsäuren. Zugleich hat diese einfache und gleichförmige Betrachtungsweise der chemischen Forschung zweifellos die grössten Dienste geleistet, wenn auch einzelne Erscheinungen sich nur gezwungen der Voraussetzung fügten. So erregte es frühe schon Bedenken, dass den Haloid- und den Sauerstoffsalzen trotz ihres ähnlichen Verhaltens eine ganz verschiedene Constitution zugeschrieben wurde, und dass gewisse Säuren, wie die Phosphor- und Arsensäure, mit verschiedenen Mengen einer Basis neutrale Salze bilden können*). Grössere Schwierigkeiten ergaben sich jedoch erst innerhalb der Chemie der Kohlenstoffverbindungen. Hier wurde man mehr und mehr gezwungen, sich von den thatsächlichen Grundlagen der elektrochemischen Hypothese zu entfernen, indem nicht mehr die wirkliche Zersetzbarkeit durch den elektrischen Strom, sondern die äussere Analogie der Verbindungsformeln mit denjenigen der unorganischen Chemie fast ausschliesslich massgebend wurde. Um diese Analogie herzustellen, sah man sich genöthigt zu einer Hülfshypothese zu greifen, die übrigens abgesehen von dem Gesichtspunkte, der zunächst auf sie führte, der chemischen Forschung wichtige Dienste geleistet hat. Es ist dies die Hypothese der Radicale oder der Existenz gewisser Verbindungen, die in zusammengesetzteren die Rolle von Elementen übernehmen. Mittelst dieser Voraussetzung wurde es leicht möglich, die binären Formeln der unorganischen Chemie auf die Kohlenstoffverbindungen zu übertragen. Man betrachtete also z. B. den gewöhnlichen Aether als ein Oxyd des hypothetischen Radicals Aethyl, den Alkohol als das Hydrat dieses Oxyds und dachte sich die verschiedenen Aetherverbindungen analog den Salzen der Metalloxyde zusammengesetzt; um die in die nämliche Reihe gehörende Essigsäure abzuleiten, war man dann freilich genöthigt, zu einem neuen wasserstoffärmeren Radical seine Zuflucht zu nehmen, als dessen Sauerstoffverbindung nun diese Säure erschien. Abgesehen von der hypothetischen Natur der angenommenen Radicale war hier die Analogie mit den unorganischen Basen, Hydraten und Salzen vielfach nur noch in den Formeln, nicht mehr in dem chemischen Verhalten der Stoffe vorhanden, und noch weniger konnte an eine Durchführung des elektrochemischen Grundgedankens der dualistischen Hypothese gedacht werden. Diese letztere Thatsache kam in besonders augenfälliger Weise zum Vorschein, als man auf die umfangreiche Substituirbar-

---

*) Liebig, Ann. d. Chem. u. Pharm., Bd. 25, 1838, S. 138 ff.

keit gewisser Elemente organischer Verbindungen durch andere aufmerksam wurde, Umwandlungen, bei denen die Verbindungen ihren chemischen Charakter beibehielten, obgleich dabei sehr häufig der elektropositive Wasserstoff durch elektronegative Elemente, wie das Chlor, ersetzt wurde.

So ging denn auch von der Untersuchung der Substitutionserscheinungen der Sturz der elektrochemischen Hypothese aus, und es eröffnete sich damit die dritte Periode der chemischen Induction, deren charakteristische Eigenthümlichkeit in ihrer specifisch chemischen Richtung besteht, insofern man nun die chemische Affinität nicht mehr als die Aeusserung irgend einer allgemeineren Naturkraft, wie der Gravitation oder der elektrischen Anziehung, sondern als eine den chemischen Atomen specifisch zukommende Kraft anzusehen begann. Durch die Substitutionserscheinungen wurde man aber zugleich zu der Anschauung gedrängt, dass die Eigenschaften einer Verbindung nicht sowohl von den Eigenschaften der in ihr enthaltenen Elemente als von der Gruppirung dieser Elemente abhingen. Das Hauptinteresse concentrirte sich daher nun auf das Studium der Structur der Verbindungen. Es entstand so jene hauptsächlich von Dumas, Gerhardt und Laurent eingeschlagene Richtung, die man als die der Structurchemie bezeichnet hat. Zur Erkenntniss der Structur einer Verbindung dient deren stufenweise Analyse und ganz besonders das Verfahren der Substitution. Jedes Element, das einem andern, und jede Atomgruppe, die einer andern substituirt werden kann, muss eben darum als denselben äquivalent in ihrer Affinitätswirkung angesehen werden. Die Hauptaufgabe der chemischen Forschung ist es demgemäss, alle chemischen Verbindungen auf gewisse Haupttypen zurückzuführen, aus denen sie entweder wirklich durch successive Substitution entstehen können, oder aus denen man sie wenigstens auf diesem Wege entstanden denken kann. Als solche Typen wurden zunächst Chlorwasserstoffsäure ($HCl$), Wasser ($H_2O$) und Ammoniak ($H_3N$) aufgestellt, denen dann später noch das Sumpfgas ($H_4C$) sich anreihte. Es lässt sich nicht verkennen, dass diese Auffassung, so unbefriedigend sie auch hinsichtlich der Frage nach dem Wesen der chemischen Affinität ist, doch für die Entwicklung der chemischen Induction von grosser Bedeutung, und dass sie selbst in dieser Entwicklung nothwendig begründet war. Das ungeheure Material der Chemie, namentlich der Chemie der Kohlenstoffverbindungen, bedurfte dringend einer systematischen Ordnung, die es zugleich möglich machte, die etwa

noch bestehenden Lücken des Systems zu erkennen und durch die Darstellung neuer Verbindungen auszufüllen. Diese Aufgabe hat die Structurchemie in vollkommenster Weise erfüllt. Sie hat zum ersten Mal eine Uebersicht über die Gesammtheit der Verbindungen gegeben, in der die Methoden der stufenweisen Analyse und Synthese zur Herstellung natürlicher Gruppen möglichst verwerthet wurden, und sie hat ausserdem mit Hülfe der Substitutionsmethode das chemische System mit einer Fülle neuer Verbindungen bereichert. Aber der grosse Mangel dieser Richtung war, dass unter ihren Händen die Chemie völlig den Charakter einer erklärenden Naturwissenschaft verlor. Sie war eine descriptive und classificatorische Wissenschaft geworden, in der selbst das Experiment nur zu systematischen Zwecken, zur Herstellung von Verbindungen, die das System voraussehen liess, nicht aber zur Auffindung der Ursachen der Erscheinungen diente. Darum ist auch der in der Chemie meistens gebrauchte Ausdruck Typentheorie für die hier zu Grunde liegende Auffassung kaum ein geeigneter. Jede Theorie verlangt eine Hypothese, die über den Grund der untersuchten Erscheinungen Rechenschaft gibt. Eine derartige Hypothese ist aber in der Annahme der Typen ebenso wenig enthalten wie etwa in den Classificationsprincipien des Linné'schen oder Decandolle'schen Pflanzensystems.

Dennoch weist die so genannte Typentheorie auf eine Affinitätshypothese hin, die denn auch in folgerichtiger Entwicklung aus ihr hervorgegangen ist. Trotz mancher Willkürlichkeiten leitete nämlich das von ihr aufgestellte System nicht bloss die chemische Induction, sondern es wurde auch umgekehrt von ihr geleitet, da man die Resultate der stufenweisen Zerlegung und Substitution bei den aufgestellten Structurformeln verwerthete. So war das System zwar in den Hauptgliederungen ein künstliches, in Bezug auf die Zusammenfassung der einzelnen Gruppen der Verbindungen aber im wesentlichen ein natürliches. Nothwendig mussten daher an den typischen Formeln die wirklichen Affinitätsverhältnisse der in sie eingehenden Atome und Atomgruppen irgendwie zum Vorschein kommen, und es bedurfte im Grunde nur einer geeigneten Interpretation jener Formeln, um zu einer rein chemischen Affinitätshypothese zu gelangen. In der That ist auf diesem Wege aus den Anschauungen der Structurchemie die so genannte Valenzhypothese hervorgegangen, in welcher der von der ersteren angebahnte rein chemische Standpunkt seinen theoretischen Ausdruck fand. Die Valenzhypothese stützte sich auf die im allgemeinen schon aus den Structurformeln ersicht-

liche Thatsache, dass die verschiedene Affinitätsgrösse der Elemente an den verschiedenen Atommengen anderer Elemente, die sie zu binden vermögen, gemessen werden kann. So lehrt schon der Anblick der Formeln für die vier Haupttypen Chlorwasserstoff, Wasser, Ammoniak, Sumpfgas, dass, wenn man die Affinität des in allen diesen Verbindungen enthaltenen Wasserstoffs als Einheit annimmt, das Chlor eine, der Sauerstoff zwei, der Stickstoff drei und der Kohlenstoff vier Affinitätseinheiten besitzt. Demnach werden diese vier Elemente von der Valenzhypothese als 1-, 2-, 3- und 4-werthig bezeichnet. Die meisten andern einfachen Stoffe zeigen entsprechende Affinitätsverhältnisse; nur einige der seltenen Elemente ist man genöthigt als 5- und 6- oder selbst 8-werthige aufzufassen.

Die nähere Betrachtung dieser Hypothese zeigt freilich, dass sie nur in unzureichender und einseitiger Weise von den Eigenschaften der chemischen Verbindungen Rechenschaft gibt. Sie berücksichtigt nur die quantitativen Verbindungsverhältnisse der Elemente, lässt aber die Abhängigkeit der Eigenschaften der Verbindungen von den Eigenschaften der in sie eingehenden Grundbestandtheile, den grösseren oder geringeren Grad der Zersetzbarkeit der Körper sowie ihr physikalisches Verhalten ganz ausser Betracht. Dazu kommt, dass sich eine immerhin nicht kleine Anzahl von Verbindungen, wie das Kohlenoxyd, viele Kohlenwasserstoffe, dem Massstab der constanten Werthigkeit nicht fügt, eine Thatsache, die darauf hinweist, dass der Affinitätswerth keine constante, sondern eine mit äusseren Bedingungen, wie Temperatur, Einfluss anderer Stoffe, einigermassen variable Grösse ist. Nur scheint diese Grösse nicht stetig, sondern, gemäss dem Gesetz der multiplen Proportionen, nach bestimmten einfachen ganzen Zahlenverhältnissen veränderlich zu sein, und ausserdem scheint es für jedes Element einen bestimmten Maximalwerth der Affinitätsgrösse zu geben, der nicht überschritten werden kann.

Diese Erwägungen leiten unmittelbar zu den Gesichtspunkten über, die in der vierten Periode der chemischen Induction massgebend werden. Ihr gehört die Gegenwart und voraussichtlich noch mehr die nächste Zukunft der chemischen Forschung an; die Anfänge ihrer Entwicklung reichen aber vielfach in die vorige Periode zurück, aus der in Folge der allmählichen Mitberücksichtigung der physikalischen Bedingungen der chemischen Wechselwirkungen die neue Richtung hervorgeht. Zunächst waren es die begleitenden Wärmeerscheinungen, die ebensowohl durch den Einfluss der Temperatur

auf die Entstehung der Verbindungen und auf ihre Eigenschaften wie durch die Temperaturveränderungen, welche die chemischen Vorgänge selbst hervorbringen, der Untersuchung eine Reihe von Fragen stellten, deren Beantwortung dann der chemischen Induction neue Gesichtspunkte an die Hand gab. Dabei wurde die Richtung dieser Induction ausserdem durch die theoretischen Vorstellungen bestimmt, auf welche die mechanische Wärmetheorie in der neueren Physik an der Hand des Princips der Erhaltung der Energie geführt worden war. Jene theoretischen Vorstellungen enthielten zugleich eine gewisse Rechtfertigung für die überwiegende Berücksichtigung der thermischen Vorgänge gegenüber andern die chemischen Processe begleitenden physikalischen Erscheinungen. Indem nämlich die mechanische Wärmetheorie die Wärmeerscheinungen auf die Bewegungen der ponderablen Theilchen der Körper zurückführt, muss sie die chemischen Zerlegungen und Verbindungen, die ebenfalls auf solchen Bewegungen beruhen, als gleichartige Vorgänge auffassen, und sie wird von vornherein erwarten dürfen, dass jedem chemischen Vorgang ein bestimmter thermischer Vorgang entsprechen werde, so zwar, dass beide als innig mit einander zusammenhängende Bestandtheile eines und desselben Processes erscheinen. Auf solche Weise trat diese vierte Periode den die erste und zweite beherrschenden physikalischen Ideen zunächst als eine Periode thermochemischer Theorien gegenüber. Dabei waltete auch hier noch ein Standpunkt vor, den zu verlassen die früheren Richtungen kein zwingendes Motiv vorfanden, dessen Festhaltung aber namentlich durch den starren chemischen Affinitätsbegriff, wie ihn die Valenzhypothese zur Geltung gebracht, gefordert war: der Standpunkt der statischen Betrachtung chemischer Vorgänge. Er besteht darin, dass bei jeder Zersetzung oder Synthese nur der Anfangs- und Endzustand der in Wechselwirkung tretenden Stoffe in Betracht gezogen wird, ohne Rücksicht auf die etwa durchlaufenen Zwischenzustände, und ohne Rücksicht auf die Geschwindigkeit, mit der die Processe vor sich gehen. Auch auf die Untersuchung der thermischen Vorgänge liess sich diese Beschränkung übertragen. Die bei der Oxydation eines Körpers entwickelte Verbrennungswärme, die bei den meisten Zerlegungen eintretende Wärmebindung, die Wärmecapacität eines einfachen oder zusammengesetzten Körpers, endlich die unter Berücksichtigung der Temperatur und des Drucks eintretenden Volumänderungen gasförmiger Stoffe bei ihrer Verbindung oder Zerlegung sind statische Grössen, insofern es sich bei ihrer Bestimmung ledig-

lich um die Vergleichung zweier Gleichgewichtszustände handelt, nicht aber um die Frage, wie der eine dieser Zustände in den andern übergegangen ist. Gleichwohl liegt diese Frage hier so nahe, dass sie nicht auf die Dauer umgangen werden konnte. So entstand die Nothwendigkeit, theils die einseitige thermische Betrachtung zu einer Untersuchung der gesammten die chemischen Processe begleitenden physikalischen Vorgänge zu erweitern, theils das bisher bei dem Studium jener Processe völlig vernachlässigte Element der Zeit mit in Betracht zu ziehen. Auf diese Weise trat jener chemischen Statik eine chemische Dynamik mit neuen Aufgaben gegenüber. Indem diese Dynamik den chemischen Vorgang lediglich als Theilerscheinung eines Zusammenhangs physikalisch-chemischer Vorgänge auffasst, wird nunmehr die chemische Induction genöthigt, auf alle Nebenbedingungen der Processe, wie die Massen der in Wechselwirkung tretenden Stoffe, das Vorhandensein anderer Stoffe, die Beschaffenheit der Lösungsmittel, die optischen und elektrischen Begleiterscheinungen, umfassende Rücksicht zu nehmen.

Indem der Gesichtspunkt einseitig thermischer Betrachtung allmählich zurückgedrängt wurde, musste nothwendig der allgemeine physikalische Begriff, auf den die thermochemische Untersuchung bereits hingewiesen hatte, noch mehr in den Vordergrund treten: der Begriff der Energie. So gewann denn dieses vierte Stadium der chemischen Induction mehr und mehr den Charakter einer allgemeinen chemischen Energetik. Das Princip der Erhaltung der Energie, wie es die Grundlage der physikalischen Forschung ist, gilt hier als die letzte Voraussetzung auch der chemischen Induction, und diese sucht die sämmtlichen chemischen Affinitätswirkungen sammt ihren Begleit- und Folgeerscheinungen aus jenem Princip und aus dem ihm beigeordneten Princip der Verwandelbarkeit der Energie abzuleiten. Die Bedeutung dieses neuen Stadiums besteht demnach darin, dass in ihm das Ziel, das schon Berthollet vor Augen geschwebt hatte, die Einheit der letzten Principien physikalischer und chemischer Forschung, in unmittelbare Nähe gerückt scheint. Noch freilich fehlt eines, um diese Verbindung vollkommen zu machen: eine mit den analogen Voraussetzungen der Physik in Uebereinstimmung stehende Ableitung der chemischen Erscheinungen aus den allgemeinen Principien der Mechanik und den physikalisch begründeten Hypothesen über die Materie. Die Reduction der Vorgänge auf die allgemeinen Gesetze der Bewegung, wie sie für die thermischen, optischen,

elektromagnetischen Erscheinungen von der Physik versucht wird, ist auf dem Gebiete der Chemie bis jetzt nur theilweise gelungen. Da aber dem Postulat der Zurückführung aller Naturvorgänge auf Mechanik auch die Chemie sich nicht entziehen kann, so wird eine auf dieses Postulat gegründete deductive Behandlung der chemischen Thatsachen nicht ausbleiben können. Die Anfänge einer solchen sind bis jetzt hauptsächlich in der kinetischen Theorie der Gase und der Flüssigkeiten gegeben.

### e. Die chemische Abstraction und Deduction.

Die Erhebung der Chemie zu einer selbständigen Wissenschaft ist aus dem nämlichen isolirenden Abstractionsverfahren hervorgegangen, das die Trennung der verschiedenen Zweige physikalischer Forschung veranlasst hat. Auch wird hinsichtlich der letzten Probleme der chemischen Untersuchung diese Abstraction stets aufrecht erhalten bleiben, da die elektrischen, optischen, thermischen und sonstigen physikalischen Begleiterscheinungen der chemischen Vorgänge von der Chemie nur insoweit in Betracht gezogen werden, als sie mit den Verbindungen und Zerlegungen der Stoffe, diesem eigentlichen Object chemischer Forschung, in causalem Zusammenhange stehen.

Ein unmittelbares Ergebniss dieser Abstraction ist die Aufstellung eines Systems von Zeichen für die einfachen Stoffe, das durch Combination zugleich die symbolische Darstellung jeder beliebigen chemischen Verbindung gestattet. Die Anwendung solcher Zeichen geht bis in die alchemistischen Anfänge der Chemie zurück; alle früheren Versuche sind aber durch die von Berzelius eingeführten Buchstabensymbole verdrängt worden. Sie vereinigen drei Eigenschaften, deren einleuchtender Zweckmässigkeit sie ihre rasche Einführung verdanken. Erstens gestattet das hier benützte Princip der Bezeichnung ohne weiteres die Anwendung auf neu entdeckte Elemente; zweitens ergibt sich aus den den Symbolen beigefügten Zahlen unmittelbar die stöchiometrische Zusammensetzung einer Verbindung; drittens lassen sich die Anschauungen über die Structur der Verbindung durch Gruppirung der Symbole, diejenigen über synthetische und analytische Vorgänge durch Gleichungen versinnlichen, indem man von dem Plus-, Minus- und Gleichheitszeichen mit einer durch die chemische Anwendung nahe gelegten Modification der Bedeutung Gebrauch macht. Bei allem dem aber wird von den

physikalischen Begleiterscheinungen der chemischen Vorgänge vollständig abstrahirt. Die chemischen Verbindungs- und Operationsformeln veranschaulichen uns nur den rein chemischen Theil des Vorgangs; über die thermischen Erscheinungen, den Einfluss der Aggregatzustände oder die Anwesenheit anderer, nicht direct bei dem betreffenden Process betheiligter Stoffe geben sie gar keine Auskunft. Dieser abstracte Charakter der chemischen Formeln darf um so weniger aus dem Auge verloren werden, als er zugleich eine zureichende Berücksichtigung der ursprünglichen Bedingungen eines Vorgangs ausschliesst. Von einer algebraischen Gleichung, der sie äusserlich ähnlich sieht, ist darum eine chemische Operationsformel wesentlich verschieden. Während jene unter allen Umständen richtig ist, sobald sich beide Seiten zu Null aufheben, ist die chemische Gleichung selbstverständlich nur dann richtig, wenn die linke Seite den Anfangszustand, die rechte den Endzustand eines Vorgangs in Bezug auf die thatsächliche Gruppirung der Elemente richtig darstellt. Da nun aber die chemischen Bedingungen für den eintretenden Erfolg in der ursprünglichen Constitution der in Wechselwirkung tretenden Stoffe enthalten sein müssen, so enthält jede Operationsgleichung zugleich den Hinweis auf diejenige symbolische Darstellung der einzelnen in sie eingehenden Verbindungsformeln, die von vornherein den wirklichen Erfolg als den unter allen möglichen wahrscheinlichsten erscheinen lässt. Auf diese Weise gehen aus den bloss die stöchiometrischen Verhältnisse der Elemente berücksichtigenden empirischen Formeln vermittelst der gewisse Verbindungs- und Zersetzungserscheinungen zum Ausdruck bringenden Operationsgleichungen rationelle Formeln hervor. Hierbei kann es sich nun freilich ereignen, dass unter verschiedenen physikalischen und chemischen Bedingungen abweichende Operationsgleichungen gewonnen werden, aus denen sich etwa auch abweichende rationelle Formeln für eine und dieselbe Verbindung ergeben können. Unter allen diesen Formeln die wahrscheinlichste zu finden, ist die Aufgabe der chemischen Induction. Es erhellt ohne weiteres, ein wie mächtiges Hülfsmittel derselben hier die chemische Symbolik ist, indem sie eine grosse Anzahl analytischer und synthetischer Ergebnisse schnell übersehen lässt. Ihr Mangel liegt darin, dass sie, der Schrift sich anschliessend, genöthigt ist, die Verbindungen in Gruppen zu zerlegen, die in einer Ebene und so viel als möglich sogar linear angeordnet werden, während doch die Elemente in den wirklichen Verbindungen jedenfalls nach drei Dimensionen geordnet

sind. Darin liegt zunächst eine deutliche Warnung, dass man der hypothetischen und beschränkten Bedeutung der durch die gewöhnliche Symbolik ausgedrückten Beziehungen eingedenk bleibe, zugleich aber auch eine Aufforderung, zu versuchen, ob sich nicht über bestimmte, sowohl chemische wie physikalische Eigenschaften der chemischen Verbindungen durch eine körperlich gedachte Anordnung der Atome Rechenschaft geben lasse*).

Je weniger nun aber überhaupt die Betrachtung der rein chemischen Seite der chemischen Wechselwirkungen eine ausreichende Erklärung derselben zu liefern vermag, um so mehr bedarf auch hier die Abstraction des ergänzenden Verfahrens der Colligation. Diese besteht im vorliegenden Falle darin, dass die Untersuchung den specifisch chemischen Standpunkt mit dem physikalischen vereinigt, indem sie successiv über die einzelnen physikalischen Phänomene, welche die Verbindungen und Zersetzungen der Stoffe begleiten, Rechenschaft gibt. Ist auch der nächste Erfolg dieser Umkehrung des ursprünglichen Abstractionsverfahrens eine grössere Verwicklung der Untersuchungsmethoden und eine Vermehrung der in Rücksicht gezogenen Thatsachen, so wird doch schliesslich im allgemeinen auf diesem Wege eine Vereinfachung der Gesichtspunkte herbeigeführt. Denn indem jene Colligation die Subsumtion der chemischen Erscheinungen unter physikalische Principien ermöglicht, sucht sie zugleich die chemische Statik und Dynamik zu einem Bestandtheil der Molecularmechanik zu machen, wobei die chemischen Vorgänge auf verhältnissmässig einfache mechanische Anschauungen zurückgeführt werden, die gleichwohl nicht bloss über den specifisch chemischen Inhalt der Erscheinungen, sondern auch über alle anderen begleitenden Processe Rechenschaft ablegen.

Von der jeweiligen Stufe der chemischen Abstraction ist nun die Form der Deduction der chemischen Thatsachen wesentlich abhängig. Je isolirender noch die Abstraction verfährt, um so mehr herrscht als die fast ausschliessliche Deductionsmethode die Analogie vor. Jede der grundlegenden Anschauungen, die während der Entwicklung der Chemie massgebend waren, stützte sich auf eine meistens nicht sehr grosse Anzahl von durch Induction gefundenen Thatsachen. Nach Analogie dieser Thatsachen wurden

*) Vgl. J. H. van t'Hoff, Die Lagerung der Atome im Raume, deutsch von F. Hermann, 1877, und besonders J. Wislicenus, Ueber die räumliche Ausdehnung der Atome etc., Abh. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Cl. XIV, 1888, S. 1 ff.

dann alle übrigen Erfahrungen beurtheilt, und in der Regel wurden die Experimente, die man zur Zerlegung bestimmter Verbindungen oder zur Herstellung neuer unternahm, von eben solchen Analogieschlüssen geleitet. So construirte die dualistische Richtung der Chemie alle Verbindungen nach Analogie gewisser binärer Zusammensetzungen. Von einer Analogie mit dem Verhalten der Elemente, namentlich der Metalle, ausgehend, bildete man den Begriff des Radicals. Während der Herrschaft der Structurchemie war dieses Verfahren nicht einmal mehr, wie bei der elektrochemischen Hypothese, von gewissen physikalischen Gesichtspunkten geleitet; um so mehr aber verdrängte es hier sogar die Induction, da oft genug Analogien für die Anschauungen über die Structur einer Verbindung bestimmender wurden als die unmittelbaren Resultate der stufenweisen Analyse und Synthese. Die Valenztheorie vertiefte zwar diese lediglich von der chemischen Gruppirung ausgehenden Analogien, indem sie den Affinitätswerth der Elemente zur Geltung brachte. Aber nachdem letzterer für jedes Element aus einer beschränkten Anzahl von Verbindungen durch Induction gefunden war, wurde er nun wieder der Ausgangspunkt zahlreicher Analogiebildungen.

Erst in Folge der umfassenderen Berücksichtigung der physikalischen Bedingungen und Begleiterscheinungen der chemischen Vorgänge hat sich mit diesem Analogieverfahren theilweise die vollkommenere Form der physikalischen Deduction verbunden, die nicht wie die Analogie von dem Einzelnen auf das Einzelne schliesst, sondern aus bestimmten allgemeinen Principien die speciellen Thatsachen ableitet. Zunächst hat auch hier unter dem Einfluss der thermochemischen Studien das Princip der Erhaltung der Energie seine allgemeingültige Bedeutung bewährt. Neben ihm sind einige andere Voraussetzungen, die aus der Anwendung speciellerer Vorstellungen der mechanischen Wärmetheorie auf die chemischen Processe entsprangen, fruchtbare Ausgangspunkte für die Deductionen der chemischen Statik und Dynamik geworden. In erster Linie steht hier die aus dem Gesetz der gleichen thermischen Ausdehnung der vollkommenen Gase abgeleitete Voraussetzung, die unter dem Namen des Avogadro'schen Gesetzes bekannt ist, sowie das von Dulong und Petit für den festen Aggregatzustand der Körper aufgestellte Gesetz der gleichen Wärmecapacität der Atome, woran sich dann in neuerer Zeit die allgemeine Nachweisung der Abhängigkeit der physikalischen Constanten, wie des Gefrier- und Siedepunktes, des Lichtbrechungsvermögens, der elektrischen Leitungsfähigkeit, von

der chemischen Constitution und der Versuch der Zurückführung dieser Abhängigkeiten auf bestimmte Gesetze anschloss. Während diese Gesetze die Grundlagen der chemischen Statik abgeben, stützt sich die chemische Dynamik theils unmittelbar auf das allgemeine Energiegesetz, theils auf die Erforschung der gesetzmässigen Veränderungen, welche die physikalischen Constanten, insbesondere die thermischen Eigenschaften und bei den Elektrolyten die elektrische Leitungsfähigkeit, bei den chemischen Vorgängen erfahren.

## 2. Die chemische Statik und Dynamik.

### a. Die Principien der chemischen Statik.

Die Entwicklung der Principien der chemischen Statik hat von dem Gesetz der multiplen Proportionen ihren Ausgang genommen. Dasselbe stellt fest, dass diejenigen Gewichtsmengen zweier Elemente $A$ und $B$, die sich mit einer und derselben Menge eines dritten Elementes $C$ verbinden, entweder die nämlichen sind, in denen sich $A$ und $B$ auch unter einander verbinden, oder zu ihnen in dem Verhältnisse einfacher ganzer Zahlen stehen. Dieses Gesetz führt fast unvermeidlich zu atomistischen Vorstellungen. Denn es legt die Deutung nahe, dass die einfachsten Gewichtsverhältnisse, in denen sich die Elemente verbinden können, dem Gewichtsverhältnisse ihrer Atome entsprechen. Auf diese Weise hat in der That Dalton, der Entdecker des Gesetzes der multiplen Proportionen und der Begründer der chemischen Atomistik, den Begriff des Atomgewichts geschaffen. Dieser Grundbegriff der chemischen Statik lässt nun zwei verschiedene Deutungen zu. Man kann ihn erstens im nächsten Anschlusse an das Gesetz der multiplen Proportionen einfach als einen hypothetischen Ausdruck für die thatsächlichen Verhältnisse der Verbindungsgewichte der Stoffe auffassen; es lassen sich aber auch zweitens unter Hinzunahme des Begriffs der chemischen Affinität die Atomgewichte als diejenigen relativen Mengen einfacher Stoffe betrachten, die bei der chemischen Bindung einander vertreten können, also hinsichtlich ihres Affinitätswerthes einander äquivalent sind. Auf diese Weise geht der Begriff des Atomgewichts in den des Aequivalentgewichts über. Man hat längere Zeit diesen Ausdruck deshalb vorgezogen, weil er nicht, wie der des Atomgewichts,

eine hypothetische Voraussetzung enthalte. Es ist aber leicht zu sehen, dass, wenn man das Atomgewicht lediglich in der ihm durch das Gesetz der multiplen Proportionen gegebenen thatsächlichen Bedeutung auffasst, das Umgekehrte der Fall ist. Dann nämlich bedeutet das Atomgewicht nichts weiter als das relative Gewicht der kleinsten Menge eines Elementes, die in Verbindungen eintreten kann. Diese Menge wird nur deshalb ein chemisches Atom genannt, weil sie bei allen chemischen Verbindungs- und Zersetzungserscheinungen als eine nicht weiter theilbare Menge in Betracht kommt. Das Atomgewicht bezeichnet also eine aus dem Gesetz der multiplen Proportionen unmittelbar zu folgernde Thatsache. Der Begriff des Aequivalentgewichtes dagegen verbindet diese Thatsache mit der weiteren Voraussetzung, dass jene kleinsten Verbindungsgewichte in Bezug auf ihren Affinitätswerth einander gleichwerthig seien, einer Voraussetzung, die nicht nur hypothetisch, sondern in dieser Fassung sogar unrichtig ist.

Nichts desto weniger hat diese Umwandlung in den Begriff des Aequivalentgewichts das nächste vom rein chemischen Standpunkte aus zu erlangende Hülfsmittel zur Bestimmung der Atomgewichte oder einfachsten Mischungsgewichte dargeboten. Denn das Gesetz der multiplen Proportionen gab darüber keinen sicheren Aufschluss. Wenn man z. B. fand, dass das Kaliumoxyd auf 1 Theil Sauerstoff 4,9 Kalium enthält, so blieb unsicher, ob das Atomgewicht des Sauerstoffs zu 1, 2, 3 . . ., und demgemäss dasjenige des Kaliums zu 1, 2, 3 . . . mal 4,9 anzusetzen sei. Als man aber fand, dass der dem Kalium in seinen Affinitätsverhältnissen analoge Wasserstoff sich mit Sauerstoff im Verhältniss von 1 : 8 zu Wasser verbinde, so sah man sich, sobald das kleinste Verbindungsgewicht des Wasserstoffs als Einheit des Atomgewichts betrachtet wurde, genöthigt, das letztere für den Sauerstoff = 8 und für das Kalium = 39,2 anzunehmen. Ebenso konnten dann die Atomgewichte der übrigen Metalle aus ihren analogen Sauerstoffverbindungen bestimmt werden. Diese Ermittelung der Aequivalentgewichte empfing ausserdem eine Stütze an der quantitativen Bestimmung der durch die Elektrolyse gewonnenen Zersetzungsproducte der Verbindungen, da nach dem von Faraday gefundenen Gesetze der festen elektrolytischen Action gleich grosse Mengen strömender Elektricität die Elemente aus analog zusammengesetzten Verbindungen in Mengeverhältnissen ausscheiden, die ihren Atomgewichten entsprechen.

Gleichwohl gab diese Bestimmungsweise, namentlich in solchen

Fällen, wo zwei Elemente mehrere Verbindungen mit einander eingehen, keine unzweideutigen Werthe für die Atomgewichte. Auch beruhte sie auf der Annahme, dass die im freien Zustand existirende einfachste Verbindung zweier Elemente die einfachste überhaupt mögliche sei, eine Voraussetzung die an sich durchaus nicht gerechtfertigt ist, und gegen die sich späterhin namentlich aus der Constitution der organischen Verbindungen gegründete Bedenken ergaben. So war z. B. nur unter jener Voraussetzung für das Wasser die Formel HO (1 Atom Wasserstoff auf 1 Atom Sauerstoff mit dem Gewichtsverhältniss 1 : 8) gerechtfertigt. Sobald aber in irgend einer zusammengesetzteren Verbindung eine Atomgruppe anzunehmen war, in der das Gewichtsverhältniss von H zu O 1 : 16 betrug, so musste offenbar für diese die einfache Formel HO reservirt, also das Atomgewicht des Sauerstoffs verdoppelt und demnach das Wasser = $H_2O$ angesetzt werden.

Bevor jedoch diese Gesichtspunkte zur Geltung kamen, war es eine bei den Verbindungen der gasförmigen Elemente zu beobachtende Regelmässigkeit, die eine Verwerthung für die Bestimmung der Atomgewichte nahe legte. Nach einem von Gay Lussac entdeckten Gesetze verbinden sich nämlich die Gase entweder nach gleichen oder den nächststehenden einfachen Volumverhältnissen. Dieses Gesetz veranlasste bereits Berzelius zu der Vermuthung, dass die Gewichte gleicher Volumina gasförmiger Elemente im selben Verhältnisse stehen wie ihre Atomgewichte oder, mit andern Worten, dass die Atome aller Elemente im gasförmigen Zustand den gleichen Raum einnehmen. War diese Hypothese richtig, so entsprachen die Volumtheile der in einer Verbindung enthaltenen gasförmigen Elemente unmittelbar den Atomzahlen. Die Chlorwasserstoffsäure erhielt also die Formel HCl, weil sich 1 Volum Wasserstoff mit 1 Volum Chlor verbindet, das Wasser dagegen die Formel $H_2O$, weil in ihm 2 Volumina Wasserstoff auf 1 Volum Sauerstoff enthalten sind. Bedeutsamer für die chemische Statik wurde dieses Berzelius'sche Volumgesetz erst, als Avogadro neben den Volumverhältnissen der einfachen auch diejenigen der zusammengesetzten Gase in Rücksicht zog und dabei insbesondere die etwaigen Volumveränderungen beachtete, die in Folge der chemischen Bindung eintreten. Diese Erwägungen führten ihn zu dem neuen wichtigen Begriff des chemischen Molecüls als der kleinsten für sich bestehenden Atomgruppe und zu der Hypothese, dass in gleichen Raumtheilen aller Gase bei gleichem Druck und gleicher Temperatur die

nämliche Anzahl von Molecülen enthalten sei. Als ein Corollarsatz hierzu hat dann der Satz zu gelten, dass auch in den einfachen Gasen die Molecüle zusammengesetzt sind, indem die einfachen von den zusammengesetzten Körpern nur dadurch sich unterscheiden, dass in jenen die Molecüle aus gleichartigen, in diesen aus verschiedenartigen Atomen bestehen*). Dieser Satz ergab sich, sobald die Berzelius'sche Hypothese von den Atomen auf die Molecüle der zusammengesetzten Gase übertragen wurde, ohne weiteres aus der Vergleichung der Volumverhältnisse der Verbindungen und ihrer Bestandtheile. Da sich z. B. 1 Volum Chlor und 1 Volum Wasserstoff verbinden, um 2 Volumina chlorwasserstoffsaures Gas zu bilden, so müssen nothwendig, wenn in jedem Volum dieser Gase gleich viel Molecüle enthalten sein sollen, die Molecüle des Chlors und des Wasserstoffs aus zwei Atomen zusammengesetzt sein.

In doppelter Beziehung bildet die Avogadro'sche Hypothese einen bedeutsamen Wendepunkt in den chemischen Anschauungen. Einerseits erweiterte sie im Anschlusse an den neu gebildeten Begriff des chemischen Molecüls den Affinitätsbegriff, indem sie dessen Anwendung auch auf die chemisch unzerlegbaren Stoffe veranlasste; anderseits gab sie ein unzweideutiges physikalisches Mass ab für die Bestimmung der Atomgewichte der Elemente und der Elementarconstitution der Verbindungen. Beide Rückwirkungen gelangten aber erst dann zu ihrer Bedeutung, als der Avogadro'sche Satz selbst durch die mechanische Wärmetheorie seine theoretische Begründung empfangen hatte. Die Vorstellung der gleichen Molecülzahl aller Gase im gleichen Volum erschien nun als eine nothwendige Folgerung aus den Grundbedingungen des molecularen Bewegungszustandes der Gase, und sie trat in unmittelbare Beziehung zu den aus denselben Bedingungen entspringenden einfachen Gesetzen von Boyle und von Gay Lussac über das Verhältniss des Volums gasförmiger Körper zu Druck und Temperatur. (Vgl. S. 74 f.) Weiterhin wurde nun aber auch der Uebergang zur Erklärung des chemischen Verhaltens flüssiger Körper aus ihren physikalischen Eigenschaften durch die Erwägung nahe gelegt, dass sich der Bewegungszustand der Gasmolecüle nothwendig in dem Augenblick ändern müsse, wo in Folge eines äusseren Drucks oder innerer Constitutionsbedingungen die Theilchen einander so nahe kommen, dass zwischen ihnen Attractions-

*) Zur Geschichte der Avogadro'schen Hypothese vgl. H. Kopp, Die Entwicklung der Chemie in der neueren Zeit, München 1873, S. 349 ff., und Lothar Meyer, Die modernen Theorien der Chemie, 5. Aufl., S. 22 ff.

kräfte wirksam werden. Es wird dann ein kritischer Punkt anzunehmen sein, wo diese Attractionskräfte im ganzen über die aus den Wärmebewegungen resultirenden Repulsivwirkungen überwiegen. Von der Annahme ausgehend, dass die nämlichen Kräfte in gewissem Grade auch schon im gasförmigen Zustande vorhanden sein müssen, stellte demnach von der Waals für Gase und Flüssigkeiten eine einzige Zustandsgleichung auf, deren Constanten nur von der Beschaffenheit der Molecüle abhängen, und nach welcher daher die Eigenschaften der Stoffe in beiden Zuständen gesetzmässig an einander gebunden sind*). Aus diesen Betrachtungen konnten einerseits die wahrscheinlichen Werthe von Volum, Dichte und Zahl der Molecüle in einer Flüssigkeit ermittelt werden, anderseits war es nahe gelegt, den Grundgedanken der kinetischen Gastheorie auf die Lösungen zu übertragen, also anzunehmen, dass die Bewegungen der in einer Lösung oder einem Lösungsgemisch enthaltenen Molecüle denselben Gesetzen gehorchen wie die Bewegungen der Gastheilchen. (Princip von van t'Hoff.)**) Eine Bestätigung dieser Annahme lag darin, dass der Druck, den eine Lösung auf eine den directen hydrostatischen Druck abhaltende permeable Wand ausübt, der so genannte osmotische Druck, unabhängig von der Natur des Lösungsmittels gefunden wird, und dass er dagegen der Concentration der Lösung und der absoluten Temperatur proportional geht, eine Beziehung die sich unmittelbar dahin interpretiren lässt, dass man Lösungen von gleichem osmotischem Druck erhält, wenn man in einem und demselben Lösungsmittel eine gleiche Anzahl von Molecülen verschiedener Substanzen zur Lösung bringt, und dass für den aus der kinetischen Energie der gelösten Molecüle resultirenden osmotischen Druck das Boyle'sche und das Gay Lussac'sche Gesetz gilt. Entsprechend tritt bei gleichem Moleculargehalt an gelöster Substanz immer auch die gleiche Gefrierpunktserniedrigung des Lösungsmittels ein.

Erscheinen auf diese Weise für den gasförmigen und den flüssigen Aggregatzustand die Beziehungen zwischen den physikalischen und den chemischen Eigenschaften auf die gleiche Gesetzmässigkeit zurückgeführt, so ist dies für den festen Aggregatzustand nicht gelungen. Doch steht auch hier das thermische Verhalten der Körper in einer bestimmten Beziehung zum Atomgewicht,

---

*) W. Ostwald, Lehrbuch der allgemeinen Chemie. 2. Aufl. I, 1891. S. 224, 289 ff.

**) van t'Hoff, Ostwalds Zeitschrift für physik. Chemie, I, 1887, S. 481 ff.

indem nach einem schon 1818 von Dulong und Petit aufgefundenen Gesetze die Wärmecapacität oder diejenige Wärmemenge, die erforderlich ist, um die Temperatur der Gewichtseinheit einer Substanz um $1^0$ C. zu erhöhen, ein reciprokes Verhalten zeigt zu dem Atomgewichte, so dass die Producte aus den Wärmecapacitäten in die Atomgewichte innerhalb bestimmter, übrigens für die verschiedenen Elemente etwas wechselnder Temperaturgrenzen annähernd einander gleich sind*). Dieses Verhalten lässt nur die Deutung zu, dass die Atome der einfachen Körper im festen Zustand die nämliche specifische Wärme besitzen, oder dass ihnen, mechanisch ausgedrückt, bei gleicher Wärmezufuhr die gleiche Energie der Schwingungsbewegung mitgetheilt wird, dass also im starren, ähnlich wie im gasförmigen und flüssigen Zustande, das physikalische Verhalten der Körper ein gleichförmiges, nur von der Anzahl, nicht von der Beschaffenheit der Atome abhängiges ist. Unter dieser Voraussetzung liegt es aber zugleich nahe, die Bedeutung des Gesetzes von den Atomen auf die Molecüle zu übertragen. In der That ist dies in einem von F. Neumann aufgestellten Theorem geschehen, nach welchem die Moleculargewichtswärmen analog zusammengesetzter Verbindungen annähernd einander gleich sind**).

Wie bei den auf die Gesetze von Dulong und Petit und von F. Neumann gegründeten Beobachtungen die Effecte der Wärmezufuhr benützt werden, um über das Verhalten der Atome und ihrer Verbindungen Aufschluss zu gewinnen, so kann nun aber überhaupt das gleichartige oder verschiedene physikalische Verhalten der Körper zu Rückschlüssen auf ihre chemische Constitution dienen. So schliesst man bei Verbindungen, bei denen man aus chemischen Gründen eine Analogie der Zusammensetzung annehmen darf, aus der Gleichheit der Krystallform auf ein correspondirendes Verhalten der Atomzahl ihrer Elemente, so dass, wenn das Atomgewicht des einen Elementes einer binären Verbindung bekannt ist, dasjenige des andern daraus abgeleitet werden kann. Insbesondere sieht man sich zu einer solchen Folgerung dann berechtigt, wenn die analoge Zusammensetzung der isomorphen Verbindungen darin ihren Ausdruck findet, dass die eine Verbindung in die andere lediglich durch Ersetzung eines bestimmten Elementes durch ein anderes umgewandelt werden kann. In ähnlicher Weise lassen sich aus dem analogen Verhalten bestimmter

*) Vgl. H. F. Weber, Pogg. Ann., 1875, Bd. 154, S. 367.
**) F. Neumann, Pogg. Ann., Bd. 23, S. 1.

physikalischer Constanten, wie des Siedepunkts, der Schmelzwärme, der Verbrennungswärme, des Brechungs- und elektrischen Leitungsvermögens, sowie aus der regelmässigen Veränderung einzelner unter diesen Constanten bei gleichartigen chemischen Aenderungen Rückschlüsse machen auf die atomistische Constitution der Körper. Indem die chemische Statik von diesen Constanten Gebrauch macht, stützt sie sich aber bereits zum Theil auf dynamische Gesichtspunkte.

### b. Die Principien der chemischen Dynamik.

Durch die Benützung der erörterten Principien sucht die chemische Statik die Bedingungen der wechselseitigen Bindung der Atome zu ermitteln. Doch gewinnt sie auf diesem Wege keinen Aufschluss über das Wesen der chemischen Affinitätskräfte, ja sie vermag nicht einmal ein zureichendes Mass für deren Wirksamkeit in verschiedenen Fällen aufzufinden. Insbesondere enthält der aus der Structur der Verbindungen abgeleitete Begriff der Valenz ein solches Mass durchaus nicht, da durch ihn nur ein verhältnissmässig beschränkter einzelner Effect der Affinitätskräfte bestimmt wird. Denn die Grösse der wirklichen Affinität hängt zunächst von der Festigkeit ab, mit der die Atome an einander gebunden sind, während der Valenzbegriff bloss für die relativen Zahlenwerthe der Atome im chemischen Molecül Maximalgrenzen feststellt.

Dagegen stehen gewisse unter den oben erwähnten physikalischen Constanten der chemischen Vorgänge zu der Grösse der Affinität in einer so nahen Beziehung, dass sie unter geeigneten Bedingungen ein Mass für die Intensität der Affinitätswirkungen abzugeben vermögen. Hierher gehört zunächst die Verbrennungswärme oder diejenige Wärmemenge, die in Folge der Verbindung der Atome frei wird und auf calorimetrischem Wege bestimmt werden kann. Indem sie die Energie der schwingenden Bewegungen misst, die während eines durch die Wirkung der Affinitätskräfte stattfindenden Ueberganges aus einem gegebenen Zustand chemischer Bindung in einen anderen stattfinden, gestattet sie einen Rückschluss auf die Grösse des Kraftaufwandes, der zur Herbeiführung dieser Zustandsänderung erforderlich ist. Aber auch hier kann diese Grösse nicht etwa unmittelbar aus der beobachteten Verbrennungswärme erschlossen werden, sondern es ist dazu ausserdem die Erwägung des vorangegangenen Zustandes der Atome sowie der sonstigen die thermischen Vorgänge beeinflussenden Veränderungen, insbesondere

also der etwa gleichzeitig eintretenden und regelmässig von Wärmebindung begleiteten Dissociationen erforderlich. Auf diese Weise stellt sich die wirklich als Mass einer Affinitätswirkung verwerthbare Verbrennungswärme als Glied einer thermischen Gleichung dar, in der sich auf der nämlichen Seite noch andere, theils positive theils negative Glieder befinden, während die andere als einziges Glied die gesammte bei dem betreffenden chemischen Vorgang beobachtete thermische Veränderung enthält. Man bezeichnet jede solche Veränderung als Wärmetönung und nennt diese positiv, wenn sie einem Freiwerden von Wärme, negativ, wenn sie einer Bindung derselben entspricht. Hiernach ist die gesammte in einem Versuch beobachtete Wärmetönung im allgemeinen einer Summe positiver und negativer Wärmetönungen gleichzusetzen, deren Einzelbestimmung erfordert wird, wenn der thermische Werth einer gegebenen Affinitätsäusserung gemessen werden soll. Diese Messung wird möglich, sobald es gelingt eine hinreichende Zahl thermischer Gleichungen zu gewinnen, um aus ihnen das gesuchte Glied berechnen zu können*). Mittelst der Vergleichung der so erhaltenen thermischen Affinitätswerthe lassen sich dann zuweilen auch Rückschlüsse machen auf die Gruppirung der Atome. Doch ist im Auge zu behalten, dass die chemischen Kräfte nicht bloss Wärme, sondern auch andere Formen der Energie hervorbringen können, wobei keineswegs eine der Grösse der Leistung entsprechende Aenderung der Temperatur einzutreten braucht, ein Fall der z. B. bei den Arbeitsleistungen der galvanischen Batterien in augenfälliger Weise verwirklicht ist. Die zuweilen gemachte Voraussetzung, dass die sämmtlichen Affinitätswirkungen in thermischen Veränderungen ihren Ausdruck fänden, ist also im allgemeinen nicht zulässig**).

Als weitere Vorgänge, die zu den chemischen Affinitätswirkungen wichtige Beziehungen darbieten, traten darum in neuerer Zeit vor allem die ihrer Natur nach mit den chemischen Verbindungserscheinungen enge zusammenhängenden Dissociationen in den Vordergrund. Eine Dissociation, d. h. eine zeitweise Zerlegung zusammengesetzter Molecüle in ihre Bestandtheile, kann hauptsächlich entweder

---

*) Vgl. Berthelot in zahlreichen Aufsätzen der Comptes rend. de l'Acad. des Sciences, Julius Thomsen, Thermochemische Untersuchungen, Leipzig 1882—86, und W. Ostwald, Lehrb. der allgemeinen Chemie, 2. Aufl. 1893. II, 1, S. 21 ff.

**) Helmholtz, Zur Thermodynamik chemischer Vorgänge. Sitzungsber. der Berl. Akad. 1882, S. 22.

durch Erwärmung oder durch die Einwirkung des elektrischen Stromes zu Stande kommen. Die thermische Dissociation wird allein bei Gasen, die elektrische bei Flüssigkeiten, namentlich bei flüssigen Lösungen beobachtet. Die Untersuchung der Gase hat nun gezeigt, dass unter geeigneten Bedingungen des Drucks und der Temperatur alle mehratomigen Molecüle mehr oder minder dissociirt sind*). Bei den Flüssigkeiten hatten die Erscheinungen der Elektrolyse längst schon die Vorstellung einer näheren Beziehung der elektrischen Kräfte zur chemischen Affinität wachgerufen (S. 483 f.). Nicht minder forderten aber die auf Grund der mechanischen Wärmetheorie gewonnenen Anschauungen über die Constitution der Flüssigkeiten unmittelbar eine Uebertragung der kinetischen Hypothese auf die Theorie der elektrolytischen Actionen heraus**). Von solchen Ideen geleitet suchte man nun nach Beziehungen zwischen dem Leitungsvermögen, dem chemischen Verhalten und den sonstigen physikalischen Eigenschaften der gelösten Stoffe. Den nächsten Hinweis auf derartige Beziehungen gab die Thatsache, dass das Princip van t'Hoffs von der Uebereinstimmung des gelösten mit dem gasförmigen Zustande (S. 499) volle Geltung nur für elektrolytisch unwirksame Lösungen besitzt, dass sich dagegen erhebliche Abweichungen darbieten, wenn die Lösung den Strom leitet und, was damit immer verbunden ist, durch ihn zersetzt wird. Denn in diesem Falle, also namentlich bei Säuren, Basen und Salzen in wässeriger Lösung, ist der osmotische Druck stets grösser, als gemäss dem Molecularvolum der Stoffe zu erwarten ist, und er kann sich in gewissen Fällen einem Werthe nähern, der dem Volum der chemischen Bestandtheile der Molekeln entspricht. Hieraus schliesst man, dass die Elektrolyte in ihren Lösungen an und für sich schon theilweise dissociirt sind, analog einem durch hohe Temperatur dissociirten Gase, während zugleich die chemisch verschiedenen Theilmolekeln entgegengesetzte elektrische Ladungen besitzen, wodurch dann bei der Durchleitung eines elektrischen Stromes die entgegengesetzt gerichtete Bewegung dieser Ionen entsteht. (Princip von Arrhenius.) Dieses Princip hat nicht nur die elektrochemischen Wirkungen in eine neue Beleuchtung gerückt, sondern es hat auch manche wichtige Aufschlüsse

---

*) Victor Meyer (und C. Langer), Pyrochemische Untersuchungen. Braunschweig 1885.

**) Clausius, Abhandlungen zur mechanischen Wärmetheorie, II, S. 202 ff.

über die Beziehungen der elektrolytischen Eigenschaften zu der Affinitätsgrösse und den sonstigen Eigenschaften der Stoffe ergeben*). Allem Anscheine nach wandelt sich auf dem Wege der in dieser Richtung begonnenen Forschungen, bei denen an der Hand des Energiegesetzes eine stete Vergleichung der verschiedensten physikalischen Eigenschaften und Vorgänge mit den chemischen Affinitätswirkungen vorgenommen wird, die chemische Dynamik allmählich in eine umfassende physikalische Theorie der Affinität um**).

Da in den Satz von der Erhaltung der Energie ebenso wie in das mit ihm verbundene Transformationsprincip die Zeit, während deren sich ein Energiewechsel vollzieht, nicht eingeht, so ist es übrigens begreiflich, dass in allen diesen vom Energieprincip geleiteten dynamisch-chemischen Forschungen die Zeitdauer der chemischen Vorgänge keine Berücksichtigung gefunden hat, und dass sogar der Versuch solcher Zeitbestimmungen als eine für die Erkenntniss der chemischen Vorgänge nebensächliche und unwichtige Aufgabe betrachtet wurde. Hiergegen ist aber doch zu erinnern, dass das Energieprincip zwar einen sehr wichtigen und fruchtbaren, dass es aber keineswegs den einzigen Gesichtspunkt abgibt, von dem aus die chemischen Erscheinungen betrachtet werden können und müssen. Für die vollständige Bestimmung der Wirkungsweise einer Kraft ist es unerlässlich, dass man nicht bloss die Arbeitsmenge kenne, die sie zu leisten vermag, sondern auch die Zeit, die sie dazu nöthig hat. Die besonderen Bedingungen der chemischen Wirkungen gestatten es wohl vorläufig mehr, als es bei den meisten anderen Naturvorgängen erlaubt ist, von der Geschwindigkeit zu abstrahiren. Gleichwohl bleibt die Untersuchung der zeitlichen Verhältnisse auch hier eine wichtige Aufgabe, deren Lösung erst eine Massbestimmung der Affinitätskräfte ermöglichen wird, die den allgemeinen Principien physikalischer Messung Genüge leistet. Denn die Schätzung der Grösse einer bewegenden Kraft fordert die Er-

---

*) Vgl. besonders Ostwald, Ueber die Affinitätsgrösse organischer Säuren, Abh. der sächs. Ges. d. Wiss. XV, S. 95 ff., ferner Zeitschr. f. phys. Chemie IX, S. 533 ff. u. a.

**) Eine umfassende Zusammenstellung aller hierher gehörigen Thatsachen gibt W. Ostwalds Lehrbuch der allgemeinen Chemie, 2. Aufl., Leipzig 1891 bis 1893, namentlich in dem die Affinitätslehre behandelnden 2. Bande. Eine kürzere Uebersicht vom Standpunkte der kinetischen Theorie aus gibt Walther Nernst, Theoretische Chemie. Stuttgart 1893.

mittelung der Geschwindigkeit der von ihr ausgelösten Bewegungen. Dabei haben aber die chemischen Stoffbewegungen die Eigenschaft aller Molecularbewegungen, dass sie für uns nur messbar werden, wenn bestimmte Veränderungen in dem bisher bestehenden Gleichgewichtszustand der Stoffe eintreten, während sie sich sofort wieder der Messung entziehen, sobald ein neuer Gleichgewichtszustand entstanden ist, ohne dass darum dieser als ein wirklicher Ruhezustand der Atome und Molecüle aufzufassen wäre. Die nächste Analogie zeigen in dieser Beziehung die chemischen Stoffbewegungen mit den durch gewisse äussere Bedingungen beschränkten Aenderungen der Aggregatzustände, z. B. mit der Verdampfung einer Flüssigkeit in einem abgeschlossenen Raume. So lange dieser nicht bei der vorhandenen Temperatur mit Dampf gesättigt ist, findet eine messbare Molecularbewegung statt, indem sich innerhalb eines jeden Zeittheilchens eine bestimmte Flüssigkeitsmenge in Dampf verwandelt. Ist dagegen der über der Flüssigkeit befindliche Raum mit Dampf gesättigt, so hört die Molecularbewegung auf unmittelbar messbar zu sein, ohne dass sie darum aufhörte zu existiren. Vielmehr besteht der eingetretene Gleichgewichtszustand eben darin, dass nun in jedem Zeittheilchen ebenso viele Molecüle aus der Flüssigkeit in den umgebenden Raum übergehen, als umgekehrt aus diesem wieder zur Flüssigkeit zurückkehren. Nun gehen bei dem allgemeinsten Fall chemischer Wechselwirkung zwei Verbindungen $A$ und $B$ durch zwischen ihnen stattfindende Affinitätsbeziehungen in zwei neue Verbindungen $A'$ und $B'$ über. Da aber auch in den ursprünglichen Stoffen $A$ und $B$ die Elemente durch bestimmte Affinitäten zusammengehalten sind, so werden sich nun umgekehrt $A'$ und $B'$ wieder in einem gewissen Grade in die Verbindungen $A$ und $B$ umzuwandeln streben. Es werden also im allgemeinen zwei entgegengesetzte Verwandlungen erfolgen, und Gleichgewicht wird eingetreten sein, sobald die in der Zeiteinheit stattfindende Rückbildung von $A + B$ der Neubildung von $A' + B'$ gleich geworden ist. Von diesem Augenblick an hört die chemische Molecularbewegung auf messbar zu sein, während, so lange die Reaction stattfindet, die Grösse der chemischen Affinitätswirkung durch die in der Zeiteinheit gebildete Menge der neuen Stoffe $A'$ und $B'$ gemessen werden kann. Es erhellt ohne weiteres, dass die so bestimmte Affinitätskraft nicht bloss von dem allgemeinen chemischen Verhalten der Stoffe, sondern auch von den relativen Massen, die in Wechselwirkung treten, abhängig ist; auch muss die Anwesenheit fremder Stoffe auf die Grösse der Affinitäts-

wirkungen von einem gewissen Einfluss sein*). Namentlich aber zeigt dieses Princip der Massenwirkung, welches, in freilich verändertem Sinne, den Gedanken Berthollets (S. 483) erneuert, wesentliche Abweichungen bei Veränderungen der Temperatur und des Drucks, indem durch Temperaturzunahme bei constant erhaltenem Druck stets diejenigen chemischen Kräfte, die eine Wärmeentwicklung bedingen, geschwächt, und diejenigen, die eine Wärmeabsorption bedingen, verstärkt werden, während umgekehrt eine Zunahme des Drucks bei constant erhaltener Temperatur jene chemischen Kräfte steigert, deren Wirkung mit einer Volumverminderung verbunden ist**).

## 3. Der chemische Atombegriff.

Früher als die Physik ist die Chemie durch zwingende Gründe zur Annahme atomistischer Vorstellungen geführt worden. Darum fehlt hier fast vollständig jener Kampf der Atomistik mit der Continuitätshypothese, der bis in die neueste Zeit die physikalische Naturerklärung entzweite. Seit man überhaupt das Princip der Constanz der Materie festhielt, musste man das Wesen der chemischen Verbindungserscheinungen auf wechselnde Gruppirungen an sich unveränderlicher Elemente zurückzuführen suchen. Seit Boyle waren daher corpusculare Vorstellungen, die den Keim der späteren Atomistik Daltons in sich schlossen, in der Chemie verbreitet. Für Dalton selbst wurde die Aufstellung des Princips der multiplen Proportionen das Motiv zur weiteren Ausbildung dieser Vorstellungen. Er zuerst entwickelte jenen folgenreichen Begriff des Atomgewichts, der sich als unmittelbarer theoretischer Ausdruck des Gesetzes der multiplen Proportionen ergab und zur Grundlage aller folgenden stöchiometrischen Untersuchungen geworden ist. Auch Daltons Atome besitzen eine corpusculare Beschaffenheit; er glaubt ihnen der Einfachheit wegen eine kugelförmige Gestalt zuschreiben zu müssen. Da aber dieser Atombegriff aus dem Begriff des chemischen Elementes hervorgegangen ist, so werden ebenso viele qualitativ verschiedene Atome angenommen, als es verschiedene Elemente gibt. Das Atomgewicht gilt nur als diejenige unter den Eigenschaften der Elemente, die für

*) Vgl. Guldberg und Waage, Journ. f. prakt. Chem. N. F., Bd. 19, 1879, S. 69. Lothar Meyer, Theorien der Chemie, 5. Aufl., S. 479 ff.

**) van t'Hoff, Etudes de dynamique chimique. Amsterdam 1884. F. Braun, Wiedemanns Ann. Bd. 30. S. 250.

die quantitative Untersuchung die grösste Wichtigkeit besitzt; doch finden neben ihm noch weitere, namentlich das elektrische Verhalten und die specifische Wärme, die gebührende Würdigung. Alle diese Eigenschaften des elementaren Atoms werden als letzte nicht weiter erklärbare Thatsachen betrachtet.

In der hier angedeuteten Weise ist der chemische Atombegriff im wesentlichen bis in die neueste Zeit bestehen geblieben. Hervorgegangen aus dem Princip der Constanz der Materie und aus dem Gesetz der Verbindung der Elemente nach einfachen Gewichtsverhältnissen, ermöglichte er eine anschauliche Darstellung der Thatsachen, die in jenen Principien ihren Ausdruck finden. Nichts desto weniger suchte man fast von dem Moment der Begründung der chemischen Atomistik an zu einer tieferen Einsicht in die Natur der chemischen Atome und so zu einem Atombegriff zu gelangen, der nicht bloss die Eigenschaften der Verbindungen aus denjenigen ihrer Elemente, sondern auch die Eigenschaften der Elemente selbst in ihren gegenseitigen Verhältnissen begreiflich mache. Damit verband sich zugleich die Aussicht, dass auf diesem Wege eine nähere Beziehung des chemischen zu dem allgemeinen physikalischen Atombegriff möglich werde. In methodischer Beziehung ist es wichtig, dass, während der bisherige Atombegriff einfach aus dem Motiv der Umsetzung der analytischen Fundamentalgesetze in eine anschauliche Vorstellung hervorgegangen war, nunmehr diese Weiterbildungen zunächst auf die Nachweisung von Analogien in dem Verhalten verschiedener Elemente sich stützten. In erster Linie richtete sich hier die Aufmerksamkeit auf die Analogie in dem chemischen Verhalten gewisser Elemente mit demjenigen chemischer Verbindungen, aus der man eine gewisse Wahrscheinlichkeit für die zusammengesetzte Natur der gewöhnlich als elementar angesehenen Stoffe entnahm. Neben diesem auch in anderen Theilen der chemischen Theorie so einflussreichen Verfahren der Analogie ist das allgemeine Streben nach Vereinfachung der Voraussetzungen nicht zu verkennen. Die grösste Einfachheit in Bezug auf die letzten Elemente der Erklärung würde aber dann erreicht sein, wenn es gelänge, alle chemischen Erscheinungen aus den wechselnden Gruppirungen und Bewegungen eines einzigen Urstoffes abzuleiten. Indem die Annahme irgend welcher qualitativer Unterschiede für diesen hinwegfiele, würde nunmehr das nämliche Princip der Reduction aller Erscheinungen auf die Bewegungen eines nur durch seine Wirkungen für uns wahrnehmbaren Stoffes Platz greifen, das in der physikalischen Naturerklärung

zur Geltung gelangt ist. Damit wäre auch für die Chemie der Uebergang aus der qualitativen in die quantitative Atomistik vollendet.

Die Versuche einer derartigen Umgestaltung des chemischen Atombegriffs beginnen alsbald nach den ersten quantitativen Bestimmungen der Atomgewichte. Sie finden ihren Ausdruck in der Hypothese Prouts, die Atomgewichte aller Elemente seien Multipla vom Atomgewicht des Wasserstoffs, einer Hypothese die von selbst dazu führte, in dem Wasserstoff das Urelement zu vermuthen. Während längerer Zeit zurückgedrängt, hat diese Annahme schliesslich in den genauesten Atomgewichtsbestimmungen der neueren Zeit eine approximative Bestätigung empfangen, die aber freilich, eben weil sie keine vollkommen genaue ist und die Abweichungen die Grenzen der Beobachtungsfehler überschreiten, darauf hinweist, dass das Prout'sche Gesetz höchstens eine Annäherung an die Wahrheit enthält.

Zu der Thatsache, dass die Atomgewichte fast sämmtlicher Elemente nahezu durch ganze Zahlen ausgedrückt werden, wenn man das Gewicht des Wasserstoffatoms der Einheit gleichsetzt, trat dann weiterhin eine Reihe von Analogien zwischen den Atomgewichten und den so genannten Moleculargewichten chemischer Verbindungen*). Das Moleculargewicht besteht aus der Summe der Atomgewichte, die ein Molecül als kleinster ohne Zersetzung isolirbarer Theil eines Körpers enthält. Das Moleculargewicht des Radicals Methyl ($CH_3$) besteht also z. B. aus 1 Atomgewicht Kohlenstoff und 3 Atomgewichten Wasserstoff. Daraus ergibt sich von selbst, dass die Moleculargewichte solcher Verbindungen, die homologe Reihen bilden, in regelmässigen Verhältnissen zu einander stehen müssen. Die organischen Radicale von der allgemeinen Formel $C_nH_{2n+1}$, wie Methyl ($CH_3$), Aethyl ($C_2H_5$), Propyl ($C_3H_7$), Butyl ($C_4H_9$), bilden z. B. eine homologe Reihe. Jedes Glied dieser Reihe unterscheidet sich von dem vorangehenden durch die Atomgruppe $CH_2$, demnach auch jedes Moleculargewicht von dem vorangehenden durch die dem Moleculargewicht von $CH_2$ entsprechende constante Zahl. Nun finden sich zwischen den Atomgewichten chemisch verwandter Elemente ähnliche constante Differenzen. So unterscheiden sich Lithium, Natrium und Kalium je durch eine Atomgewichtsdifferenz 16. In dieselbe Reihe gehören Rubidium und Caesium, wo

*) Vgl. zu dem folgenden Lothar Meyer, Die modernen Theorien der Chemie, 5. Aufl., S. 129 ff.

annähernd die Differenz Rb—Ka und ebenso Cs—Rb = 3 . 16 ist. Solche constante Differenzen, die noch zwischen anderen Elementen wiederkehren, legten die Vermuthung nahe, dass die Atomgewichte in Wahrheit die Bedeutung von Moleculargewichten höherer Ordnung besitzen, und dass also die Verwandtschaft gewisser Elemente auf ähnlichen Uebereinstimmungen in der Gruppierung ihrer Atome beruhe, wie die Verwandtschaft der durch die analytischen Hülfsmittel zerlegbaren Verbindungen. Auf diese Weise erfuhr die früher (S. 485) hervorgehobene Analogie zwischen den Radicalen organischer Verbindungen und den Elementen ihre vollständige Umkehrung: die Elemente erschienen nun analog den Radicalen, so dass man in ihnen Radicale aus einfacheren Elementen vermuthen konnte.

Zur Aufsuchung weiterer Analogien zwischen Elementen und Verbindungen ist endlich noch der Begriff des Atomvolums neben dem des Atomgewichts herbeigezogen worden. Wie wir allgemein durch die Vergleichung des Gewichtes eines Körpers mit dem specifischen Gewicht sein Volum bestimmen können, so lässt sich das Atomvolum eines Elementes gewinnen, indem man das Atomgewicht durch das specifische Gewicht dividirt. Da das Atomgewicht nur in Bezug auf seinen relativen Werth festgestellt werden kann, so ist das nämliche mit dem Atomvolum der Fall: dasselbe misst das Volum irgend eines Atoms, wenn das Volum eines bestimmten Atoms, z. B. des Wasserstoffatoms, zur Einheit genommen wird. Nun ist von vornherein zu erwarten, dass dem Verhältniss zwischen Atomgewicht und Moleculargewicht ein analoges Verhältniss zwischen Atomvolum und Molecularvolum parallel gehen werde. In der That lassen die unter gleichen Bedingungen von Druck und Temperatur ausgeführten specifischen Gewichtsbestimmungen einfacher und zusammengesetzter Körper den Schluss zu, dass das Volumen eines Molecüls der Summe der Volumina seiner Atome entspricht. Wäre das chemische Atom eine Verbindung aus einfachen und gleichartigen Uratomen, so würde demnach zunächst erwartet werden können, dass das Atomvolum dem Atomgewicht proportional sei. Nun bestätigt sich allerdings diese Erwartung selbst nicht. Wohl aber ergibt sich zwischen Atomvolum nnd Atomgewicht ein gesetzmässiges Verhältniss, welches die Annahme einer molecularen Constitution der chemischen Atome nahelegt. Trägt man nämlich die Atomgewichte der Elemente auf einer einzigen Abscissenlinie auf, und stellt man die Atomvolumina durch die zugehörigen Ordinaten dar, so wachsen diese nicht proportional den Abscissen, sondern man

erhält durch Verbindung ihrer Endpunkte eine in mehreren aufeinanderfolgenden Wellenlinien auf- und absteigende Curve. Die Elemente von verwandtem chemischem Verhalten entsprechen also nicht etwa benachbarten Punkten, wohl aber entsprechen sie solchen Punkten in verschiedenen Theilen der Curve, die in Bezug auf den ganzen Verlauf eine übereinstimmende Lage besitzen. So bilden z. B. die leichten Metalle Lithium, Natrium, Kalium, Rubidium die Maxima der Wellencurven, während Kohlenstoff, Silicium, die schweren Metalle die tief gelegenen Stellen einnehmen. Dort ist also die Substanzverdichtung am kleinsten, hier am grössten im Verhältniss zu dem Atomgewicht oder zu der in dem chemischen Gesammtatom vorauszusetzenden Anzahl von Uratomen. Zusammen mit der Thatsache der regelmässigen Differenzen zwischen den Atomgewichten scheinen demnach auch diese Erfahrungen die Anschauung zu unterstützen, dass die Unterschiede der chemischen Atome auf gesetzmässigen Gruppirungen einfacherer Urbestandtheile beruhen. Ist aber diese Voraussetzung richtig, so werden dann wiederum die sonstigen physikalischen Eigenschaften der unzerlegbaren Stoffe, wie Aggregatzustand, elektrisches Verhalten, Lichtbrechungsvermögen, in einem gewissen Zusammenhang mit der Verbindungsweise der Uratome und mit der etwa stattfindenden Substanzverdichtung stehen müssen. In der That ist es möglich gewesen, einige Beziehungen dieser Art insofern nachzuweisen, als auf der das Verhältnis zwischen Atomvolum und Atomgewicht darstellenden Curve den Punkten von entsprechender Lage analoge physikalische Eigenschaften der Elemente entsprechen. Nur eine physikalische Eigenschaft macht in dieser Hinsicht eine bemerkenswerthe Ausnahme: die specifische Wärme, deren Verhältniss zu dem Atomgewicht, wie wir oben (S. 500) sahen, nach dem Gesetze von Dulong und Petit ein constantes ist, eine Thatsache, die darauf hinzuweisen scheint, dass die im gewöhnlichen Sinne angenommenen chemischen Atome selbst die Träger der Wärmeschwingungen sind. Uebrigens bliebe es möglich, dass die Abweichungen, welche die Atomwärmen verschiedener Elemente bei wechselnden Temperaturen darbieten, aus der mit wachsender Temperatur zunehmenden Betheiligung der Uratome an den Wärmeschwingungen zu erklären wären, wie schon von Kopp in Bezug auf die Elemente Kohlenstoff, Brom und Silicium, deren Atomwärme in besonders hohem Grade mit der Temperatur schwankt, angenommen wurde.

Dieses zumeist auf die Analogie zwischen chemischen Atomen

und Molecülen zurückgehende Beweismaterial hat man schliesslich noch durch eine Analogie anderen Ursprungs zu verstärken gesucht. Sie bestand darin, dass die Spektra der Elemente beim Uebergang von niedrigeren zu höheren Temperaturen ähnliche Veränderungen wie die Spektra der Verbindungen unter der nämlichen Bedingung darbieten. Da nun die Temperatursteigerung die allgemeinste Ursache der chemischen Dissociation ist, so erweckte dies Verhalten die Vermuthung, dass auch die Elemente dissociationsfähig, also zusammengesetzt seien*). Einigermassen unterstützt wird eine solche Folgerung durch die Vergleichung der Fixsternspektren, welche zeigt, dass, je wärmer ein Stern, desto einfacher sein Spektrum ist, und dass mit abnehmender Temperatur der Gestirne die metallischen Elemente in der Reihenfolge ihrer Atomgewichte auftreten. Auch die Untersuchung der so genannten planetarischen Nebel tritt für die nämliche Vermuthung ein, da die Spektralanalyse nachweist, dass viele derselben vorwiegend aus einfachen Gasen von niedrigem Atomgewichte, insbesondere aus Wasserstoff und Stickstoff, bestehen. Doch sind die Bedingungen, welche die spektroskopischen Eigenschaften der Elemente und ihrer Verbindungen verändern, noch zu wenig bekannt, um auf die erwähnten Erscheinungen vollkommen sichere Schlüsse gründen zu können.

Ueberhaupt ist es augenfällig, dass alle diese Beweise für die zusammengesetzte Natur der Elemente dem Zweifel ausgesetzt bleiben: die einen wegen der allgemeinen Unsicherheit des Analogieschlusses, die anderen wegen der abweichenden Deutungen, welche die Erscheinungen zulassen. Immerhin verstärken sie sich durch ihre Verbindung und eröffnen so die Aussicht auf eine Umbildung des chemischen Atombegriffs, die diesen dereinst vielleicht in den Stand setzen wird, in ähnlichem Sinne als Grundlage einer Chemie der Elemente zu dienen, wie die heutige Chemie wesentlich nur eine Chemie der Verbindungen ist. Auch die letztere wird aber aus der Erklärung der Eigenschaften der Elemente wichtige Aufschlüsse gewinnen, da eine tiefere Erfassung des Affinitätsbegriffes durchaus an die Erkenntniss der inneren Beziehungen der Elemente gebunden ist. Namentlich ist der Valenzbegriff sichtlich nur ein Nothbehelf, so lange nicht aus der Constitution der chemischen Atome die relative Constanz der Valenz erklärt und mit dem physikalischen und

*) J. N. Lockyer, Studien zur Spektralanalyse, deutsche Ausgabe, Leipzig 1879, S. 172.

chemischen Verhalten der Verbindungen in Zusammenhang gebracht ist. Ein vielversprechender Anfang hierzu ist mittelst der Hypothese der räumlichen Lagerung der Atome (S. 493) gemacht worden. Mit ihrer Hülfe gelang es, die Existenz gewisser isomerer Verbindungen, die sich bei gleicher Zusammensetzung entweder durch ihr optisches Verhalten oder durch andere Eigenschaften, wie Schmelz- und Siedepunkte, Löslichkeit, Reactionsfähigkeit, unterscheiden, auf die räumlichen Eigenschaften der chemischen Atome zurückzuführen. So vermochte man aus der Annahme, dass die Vierwerthigkeit des Kohlenstoffs aus der Tetraëderform des Kohlenstoffatoms resultire, wobei jedem der Ecken des Tetraëders eine Valenz entspreche, eine Reihe theils optischer theils geometrischer, in sonstigen physikalischen und chemischen Unterschieden sich ausprägender Isomerien abzuleiten; und auch gewisse isomere Verbindungen des Stickstoffs scheinen zu ähnlichen Vorstellungen herauszufordern. Da nun ein räumliches Atom dieser Art verschiedene Configurationen angelagerter Molecüle möglich macht, so konnte in vielen Fällen nicht nur die Existenz bestimmter isomerer Modificationen einer Verbindung vorausgesagt, sondern auch speciell bei den optischen Isomerien der Gegensatz der optischen Eigenschaften aus der entgegengesetzten Lagerung gewisser an das centrale Atom angelagerter Molecüle abgeleitet werden*). Offenbar begegnen sich nun diese Vorstellungen mit den oben erörterten, aus den wechselseitigen Beziehungen der Elemente und ihren Analogien mit Atomverbindungen gewonnenen Ergebnissen darin, dass sie nöthigen, das chemische Atom als eine zusammengesetzte Einheit aufzufassen. Sind aber die chemischen Atome im physikalischen Sinne als Molecüle zu denken, die nur bis jetzt unsern Hülfsmitteln, sie in ihre Bestandtheile zu trennen, Widerstand leisten, so ist damit auch der einstige Widerspruch, der zwischen dem chemischen Atom, als einem durch bestimmte qualitative Eigenschaften ausgezeichneten Element, und dem physikalischen Atom, als dem geometrischen Ausgangspunkt bewegender Kräfte, bestanden hatte, im Princip beseitigt. Als letzter Begriff bleibt so der Structurchemie ebenfalls nur das qualitativ unbestimmte, bloss als dynamische Einheit zu denkende Elementaratom. Damit hat sich die Chemie den Forderungen genähert, welche die mechanische Physik und die Erkenntnisstheorie übereinstimmend an den Begriff der Materie stellen: diese erscheint auch der Chemie als ein gleichartiges, d. h. quali-

*) Wislicenus, Abh. der sächs. Ges. d. Wiss., math.-phil. Cl., XIV, S. 1 ff.

tativ unbestimmbares Substrat, das erst durch die Gruppirungen seiner Elemente und die von diesen abhängigen Bewegungsvorgänge die wahrnehmbaren Unterschiede der Körperwelt hervorbringt.

Dabei ist freilich nicht zu vergessen, dass für den chemischen ebenso wie für den physikalischen Standpunkt alle Voraussetzungen über die Materie gemäss dem logischen Charakter des Substanzbegriffs hypothetisch bleiben. Dieser hypothetische Charakter wird sich stets darin zu erkennen geben, dass 1) neben jeder der Naturerklärung zu Grunde gelegten Anschauung noch andere möglich sind, die nur nach gewissen Zweckmässigkeitsmotiven, wie dem Princip der Einfachheit, der Uebereinstimmung verschiedener Hypothesen mit einander u. dergl., beschränkt werden können, und dass 2) die letzten Postulate der Anschauung immer begrifflicher Natur sind, insofern sie, wie z. B. ausdehnungslose Kraftpunkte, absolut harte Atome, reibungslose Wirbel u. dergl., in keiner wirklichen Anschauung vorkommen. Nichts desto weniger bleibt die Aufstellung derartiger hypothetischer Vorstellungen unerlässlich, wenn man nicht von der Existenz unserer Anschauungsformen und von der Nothwendigkeit mittelst ihrer zu denken überhaupt abstrahiren will. So sind alle Verbindungen und Zerlegungen der Stoffe, da die chemischen Atome dabei unverändert bleiben, schlechthin nur als Bewegungen zu begreifen. Mögen ferner die stereometrischen Vorstellungen, zu denen die Valenztheorie in Verbindung mit der Beobachtung der optischen und geometrischen Isomerien geführt hat, noch so sehr als bloss provisorische Versinnlichungsmittel der Erscheinungen betrachtet werden: sie bezeugen gleichwohl die Nothwendigkeit bestimmter, durch die Erfahrung geleiteter Hypothesen über die Anordnung der materiellen Elemente*).

---

*) Von W. Ostwald ist darauf hingewiesen worden, dass die Chemie, ebenso wie die Physik, aller hypothetischen Voraussetzungen über die Materie würde entrathen können, wenn sie statt der Masse die Energie in ihre Masseinheiten einführen wollte. (Vgl. oben S. 424 Anm.) So hebt er z. B. hervor, dass die Principien von von der Waals, van t'Hoff, Arrhenius ohne Zugrundlegung kinetischer Vorstellungen als gültig betrachtet werden könnten. Zweifellos ist dies richtig. Man würde an der Hand des Princips der Energie zu einer Subsumtion aller Naturerscheinungen unter bestimmte Gesetze gelangen, ohne sich unter der Materie etwas anderes zu denken als ein Substrat mannigfaltiger Energien, welche gewissen Transformationsgesetzen unterworfen sind. Aber es würde dann nicht bloss, wie schon oben bemerkt (S. 409 f.), die Verknüpfung der

## Viertes Capitel.

# Die Logik der Biologie.

## 1. Die biologischen Methoden.

### a. Allgemeine Aufgaben der biologischen Forschung.

Schon der rohesten Beobachtung treten die specifischen Eigenthümlichkeiten der Lebenserscheinungen in so augenfälliger Weise entgegen, dass die Unterscheidung der lebenden von den leblosen Körpern in die ersten Anfänge der Wissenschaft zurückreicht. Die hierdurch bedingte Abzweigung der biologischen Wissenschaften von dem Gesammtgebiet der Naturlehre ist für die Ausbildung der systematischen Theile der ersteren ohne Zweifel förderlich gewesen. Doch mit den wachsenden Kenntnissen der beschreibenden Naturgeschichte konnte die physiologische Erklärung der Lebenserscheinungen nicht gleichen Schritt halten. Bis in den Anfang unseres Jahrhunderts war fast das ganze Material, über das die Physiologie zu ihren Schlüssen verfügte, der naturgeschichtlichen Forschung entlehnt, da die Anatomie, diese Hauptstütze der Physiologie, ganz und gar im Sinne einer beschreibenden Naturwissenschaft betrieben wurde. Die Versuche Harveys und seiner Nachfolger über den Blutkreislauf, Hallers und Fontanas über die Sensibilität und Irritabilität der

---

Erscheinungen eine rein begriffliche und unanschauliche bleiben, sondern man würde auch darauf verzichten müssen, sich auf anschaulichem Wege über Wechselwirkungen Rechenschaft zu geben, die an sich selbst anschaulicher Art sind oder uns zwingen, sie uns anschaulich zu denken. Eine Dissociation können wir uns ebenso wenig wie eine Wellenbewegung anders denn als eine Bewegung irgend welcher Theilchen oder irgend eines Mediums denken, weil wir uns eben, wie schon Kant hervorgehoben hat, Begriffe nicht ohne Anschauungen denken können. Auch die in keiner wirklichen Anschauung möglichen hypothetischen Elemente der Materie, wie der Kraftpunkt, das absolut harte Atom u. dergl., sind daher Grenzbegriffe, denen wir, wie den mathematischen Begriffen, wirkliche Objecte, den physischen Punkt, den festen Körper, als stellvertretende Vorstellungen substituiren können. Immerhin wäre die Durchführung des Versuchs einer rein energetischen, d. h. ohne Zuhülfenahme mechanischer Vorstellungen unternommenen Physik und Chemie schon um deswillen von logischem Interesse, weil eine solche den hypothetischen Charakter der letzten Voraussetzungen dieser Wissenschaften, der von vielen Naturforschern immer noch allzu leicht übersehen wird, klar ans Licht stellen würde.

thierischen Theile, Spallanzanis über die Bedingungen der Befruchtung sind fast die einzigen Anfänge experimenteller Untersuchung aus älterer Zeit, die eine bleibende Bedeutung in Anspruch nehmen können. Um so freier erging sich die Physiologie in den willkürlichsten Hypothesen. Vitalistische und mechanistische Anschauungen wechselten in bunter Folge. Während jene von vornherein einer Einordnung der Lebenserscheinungen in den allgemeinen Causalzusammenhang der Dinge entsagten, meinten diese die Principien der exactesten physikalischen Disciplin, der Mechanik, hier sofort anwenden zu können. Der Erfolg war in beiden Fällen ein Gebäude von Hypothesen, dem die sichere Basis der Beobachtung mangelte.

Diese Umstände, die in der Schwierigkeit der biologischen Aufgaben begründet sind, machen es begreiflich, dass die Biologie weiter als irgend ein anderer Zweig der Naturforschung zurückgeblieben ist, und dass noch jetzt, obgleich man sich mehr als früher der methodologischen Forderungen bewusst geworden, der Streit der Hypothesen in ihr eine bedeutsame Rolle spielt. Sogar die Anordnung und die wechselseitige Abhängigkeit der einzelnen Disciplinen beginnt erst allmählich eine logisch correctere Form anzunehmen. Je mehr die Naturgeschichte in ihrer Ausbildung von der Physiologie eingeholt wird, um so energischer erhebt diese den Anspruch, als das Fundament der gesammten Biologie zu gelten. Auf der einen Seite zieht sie die anatomische Untersuchung in ihre Dienste und verleiht ihr eine erhöhte Fruchtbarkeit durch die Verbindung mit dem physiologischen Experimente; auf der andern Seite reformirt sie die Grundbegriffe der systematischen Naturgeschichte und sucht dem Zusammenhang des Systems ein genetisches Verständniss abzugewinnen. Gleichzeitig beginnt man das Gebiet der abnormen Lebenserscheinungen nicht mehr als ein dem normalen Leben fremdartiges zu betrachten. Die Pathologie sucht sich in eine pathologische Physiologie umzuwandeln, indem sie auf Grund physiologischer Thatsachen und Gesetze ein Verständniss der Krankheitsformen und ihres Verlaufs zu gewinnen strebt.

In diesen Betrachtungen über die Entwicklung der biologischen Aufgaben sind die Gesichtspunkte enthalten, nach denen die systematische Gliederung der biologischen Wissenschaften zu beurtheilen ist. Wie die Gesammtheit der Naturwissenschaften auf der Physik, so ruht die biologische Wissenschaft auf der Physiologie als derjenigen Disciplin, die sich mit der Erklärung der Lebenserschei-

nungen beschäftigt. Während hier die allgemeine Physiologie die Probleme der Organisation und des Lebens überhaupt zu untersuchen hat, sind die verschiedenen Gebiete der speciellen Physiologie bestrebt, den besonderen Gestaltungen nachzugehen, die diese Probleme in Folge der Lebens- und Organisationsbedingungen der verschiedenen Classen lebender Geschöpfe annehmen. Mit jenem glücklichen Instinkt, mit dem so manchmal die Unterscheidungen der Sprache der wissenschaftlichen Zergliederung vorauseilen, wurden von Anfang an Pflanze und Thier als die beiden Hauptobjecte der speciellen Physiologie hingestellt. Die tiefer eindringende Untersuchung hat, so sehr es in Folge der Bemühungen um eine genauere Begriffsbestimmung an Grenzverschiebungen nicht fehlte, doch im ganzen daran nichts zu ändern vermocht. Auch die Annahme von Zwischenwesen zwischen Pflanzen- und Thierreich würde, wenn sie sich sollte rechtfertigen lassen, die Haupteintheilung der speciellen Physiologie in Pflanzen- und Thierphysiologie kaum berühren, da gerade in Folge ihrer systematischen Stellung derartige Zwischenwesen dem Untersuchungsgebiet der allgemeinen Physiologie zugewiesen werden müssten. Dagegen steht nichts im Wege, die beiden Theile der speciellen Physiologie nach theoretischen oder praktischen Rücksichten noch weiter zu gliedern. So nimmt in der That die Thierphysiologie in ihrer heutigen Gestalt vorwiegende Rücksicht auf den Menschen, so dass sie ein Aggregat aus specieller Thierphysiologie und Physiologie des Menschen bildet, zu dem ausserdem noch einzelne Entlehnungen aus der allgemeinen Physiologie zu kommen pflegen. In weiterem Umfange als, wie in diesem Fall, das praktische Bedürfniss dürfte in der Zukunft das theoretische Interesse eine Ablösung speciellerer physiologischer Untersuchungen fordern. Denn nur durch die Erforschung der einzelnen Organisations- und Entwicklungsbedingungen kann die Physiologie den Anspruch, für die Systematik des Pflanzen- und Thierreichs eine erklärende Grundlage zu schaffen, mit Erfolg zur Geltung bringen, ähnlich wie in der Chemie das System der chemischen Verbindungen sich stützt auf das Studium der chemischen Affinitätswirkungen. In der That hat in diesem Sinne die Entwicklungsgeschichte bereits eine umfassende Verwerthung gefunden. Doch wird die Bedeutung ihres Einflusses, so hoch sie an sich zu stellen ist, bis jetzt noch beeinträchtigt durch die geringen Kenntnisse, die wir von den physiologischen Bedingungen der Entwicklungsvorgänge besitzen.

Während auf diese Weise die Physiologie durch ihre fortgesetzte

Specialisirung die systematische Naturgeschichte der Organismen aus sich hervorgehen lässt, führt auf der andern Seite von selbst die normale zur pathologischen Physiologie hinüber, indem die Beeinträchtigung der Lebensfunctionen durch willkürlich gesetzte Störungen überall schon in der normalen Physiologie als eines der wirksamsten Hülfsmittel Verwendung findet. Wie dort zwischen Physiologie und Systematik eine vergleichende Physiologie, so tritt darum hier zwischen Physiologie und Pathologie eine experimentelle Pathologie als vermittelnde Hülfswissenschaft.

### b. Die morphologische Analyse.

Die Anatomie hat sich zwar aus praktischen Ursachen, speciell als Anatomie des Menschen, eine selbständige Stellung errungen. Theoretisch betrachtet ist sie aber keine besondere Wissenschaft, sondern eine mit eigenthümlichen Hülfsmitteln arbeitende physiologische Methode und eine Darstellung der Resultate, die mittelst dieser Methode gewonnen wurden. Zwar scheint sie sich auf den ersten Blick dadurch von der Physiologie zu unterscheiden, dass sie am todten, diese am lebenden Körper ihre Studien macht*). Aber gerade dies ist nur ein Unterschied der Methode, und ein solcher der nicht einmal überall standhält. Es gibt eben physiologische Thatsachen, die sich auch noch an der Leiche feststellen lassen; sie sind es, welche die Anatomie mit den ihr verfügbaren Methoden untersucht. Aber im einzelnen findet diese Regel mannigfache Ausnahmen. Wo wir Grund haben anzunehmen, dass unmittelbar nach dem Tode erhebliche Veränderungen eintreten, wie bei der Elementarstructur jugendlicher Zellen, der Nervenfasern u. dergl., da verlangt auch der Anatom, dass die Theile während des Lebens untersucht werden. Er gestattet sich also die Untersuchung des todten Organismus nur insoweit, als die Voraussetzung erlaubt ist, dass keine durch die anatomischen Methoden nachweisbaren Structurveränderungen in Folge des Todes eingetreten sind.

Es gibt nur ein Merkmal, das klar und scharf die Anatomie von den übrigen Gebieten der Physiologie trennt. Es liegt darin, dass sich die Anatomie nur mit jenen Eigenschaften und Vorgängen beschäftigt, die in der Form der lebenden Wesen und ihrer Theile zum Ausdruck kommen. Aber auch dies beruht bloss auf einem

*) Vgl. Cohnheim, Vorlesungen über allgem. Pathologie, 2. Aufl., I, S. 8 f.

Unterschied der Methode. Denn es ist begreiflich, dass die Untersuchung der Formverhältnisse eigenthümliche Methoden verlangt, die z. B. von den zur Untersuchung der Stoffbestandtheile, der mechanischen, thermischen, elektrischen Eigenschaften benützten Methoden wesentlich verschieden sind. Die Form ist deshalb kein von diesen andern Eigenschaften isolirtes oder wenigstens auf die Dauer zu isolirendes Object. Vielmehr wird ein Verständniss der Formen schliesslich nur durch die Berücksichtigung aller andern physiologischen Factoren zu gewinnen sein. In der That ist dieser Standpunkt der Betrachtung in der Pflanzenphysiologie bereits allgemein zur Anwendung gelangt. Nur in der animalischen Physiologie taucht der Gedanke einer Morphologie, die es mit eigenthümlichen, allen sonstigen physiologischen Erscheinungen fremdartig gegenüberstehenden Gestaltungsgesetzen der thierischen Körper zu thun habe, zuweilen noch auf. Er ist hier als ein Rest jener Verwechslung ästhetisirender Naturbetrachtung mit wirklicher Naturerklärung zurückgeblieben, die als eine Nachwirkung der Schelling-schen Naturphilosophie in der systematischen Naturgeschichte lange noch einen bedeutsamen und während einer gewissen Zeit in mancher Beziehung fruchtbaren Einfluss ausgeübt hat*).

Schon bei der anatomischen Methode kommt nun sofort eine Eigenthümlichkeit der biologischen Methodik zur Geltung, die in der Schwierigkeit und Verwicklung der Probleme ihren nahe liegenden Grund hat. Sie besteht in dem grossen Uebergewicht des analytischen Elementes. In dieser Beziehung steht der gegenwärtige Zustand der Biologie noch um eine Stufe zurück hinter dem der chemischen Forschung. In der Biologie geht die Untersuchung fast völlig auf in einer Analyse der Erscheinungen. Innerhalb dieser nimmt die anatomische oder morphologische Analyse die erste Stelle ein, nicht nur weil sie am frühesten und unmittelbarsten sich darbietet, sondern auch weil ohne sie ein fruchtbarer Uebergang zu den andern Methoden nicht zu gewinnen ist. Die morphologische Analyse zerfällt aber wieder in verschiedene Stadien. Nach den Hülfsmitteln, mit denen sie operirt, lassen sich deren drei unterscheiden. Das erste besteht in der Zerlegung des zusammengesetzten Organismus in seine Organe und Gewebe. Es erledigt

*) Es sei hier erinnert auf botanischem Gebiet an die morphologischen Arbeiten von C. Schimper und Alex. Braun, und an die grossentheils der thierischen Morphologie gewidmeten Betrachtungen von H. G. Bronn in seinen „Morphologischen Studien". Vgl. Abschn. I, S. 56.

diejenigen Aufgaben, die man, weil sie sich zumeist ohne die Hülfe des Mikroskops erledigen lassen, häufig der „gröberen Anatomie“ zurechnet; wir ziehen es vor, die hierher gehörigen Methoden, weil sie durchgängig mechanischer Art sind, als die der *mechanischen Morphologie* zu bezeichnen. Das *zweite* Stadium sucht, an das erste anknüpfend, die Organe und Gewebe in ihre *Formelemente* zu zerlegen. Es bedarf dazu des Mikroskops und seiner Hülfsapparate und mag daher daher das Stadium der *optischen Morphologie* genannt werden. Endlich das *dritte* begnügt sich nicht mit einer Analyse der vorhandenen Formelemente, sondern es sucht auf diese durch physikalische und chemische Hülfsmittel verändernd einzuwirken, um über ihre functionelle Bedeutung Aufschluss zu gewinnen: das Stadium der *experimentellen Morphologie*. Man darf sich nun aber nicht vorstellen, dass diese Stadien strenge von einander zu sondern seien. Vielmehr finden sich im einzelnen mannigfache Abweichungen von jener regelmässigen Reihenfolge. Einerseits sehen sich die früheren Stufen genöthigt, gelegentlich die Hülfsmittel der späteren zu ihren Zwecken herbeizuziehen; und anderseits werden die Hülfsmittel und Resultate der früheren in die späteren hinübergenommen. So gewinnen mechanische Gesichtspunkte eine grosse Bedeutung in der optischen Morphologie, und die Hülfsmittel dieser bilden fortan einen integrirenden Bestandtheil der experimentellen morphologischen Untersuchung.

Sehen wir ab von solchen Uebergängen und Wechselwirkungen, so ist der *mechanischen Morphologie* in der Untersuchung der Lage- und Formverhältnisse der unmittelbar sinnlich wahrnehmbaren Organe und Gewebe ihr Arbeitsgebiet klar vorgezeichnet. Sie hat keineswegs eine blosse Beschreibung der Theile zu geben, wie dies in der älteren Anatomie durchgängig geschah, sondern, so weit sie es mit ihren Hülfsmitteln vermag, hat sie in die Bedingungen der Formeigenthümlichkeiten einzudringen, die sich ihr durch die anatomische Zergliederung erschliessen. Eine Beschreibung des Skelets, die auf die Wachsthumsbedingungen und die mechanische Bedeutung der Knochenformen keine Rücksicht nimmt, eine Untersuchung des Muskelsystems, die den Zusammenhang der Elasticität, Form und Anordnung der Muskeln mit ihrer Function mit Stillschweigen übergeht, eine Darstellung der Kreislaufsorgane, die von den hydraulischen Principien, die ein Verständniss derselben erschliessen können, nichts zu sagen weiss, — eine Anatomie dieser Art würde eine Wissenschaft sein, aus welcher der Geist der Wissenschaft verschwunden

wäre. Es liegt in der Natur der anatomischen Probleme, die mit denen der praktischen Mechanik die grösste Verwandtschaft haben, dass die anatomische Untersuchung zunächst von teleologischen Principien geleitet wird*). Der nächste Standpunkt der mechanischen Morphologie ist immer der, dass sie in dem Organismus einen natürlichen Mechanismus sieht, dessen Einrichtungen sie mit Rücksicht auf seine Leistungen zergliedert. Aber es ereignet sich von selbst im Verlaufe dieser Untersuchung, dass sich die teleologische in die causale Betrachtung umkehrt. Indem der Organismus bestimmte mechanische Leistungen verrichtet, sind die Organe, die sich daran betheiligen, selbst mechanischen Bedingungen unterworfen, die zu einem grossen Theil in der Function ihre Quelle haben und verstärkend auf die Leistungsfähigkeit der Organe zurückwirken. Die Anordnung der absorbirenden und saftführenden Zellen in der Pflanze ist in eminentem Sinne zweckmässig für die Mechanik des Stoffaustausches, und die letztere erzeugt wieder Wachsthumsbedingungen, welche die Zweckmässigkeit der Structur befestigen und vergrössern. Die Gelenkenden der Knochen sind vortreffliche Hülfsmittel für die Mechanik der thierischen Bewegungen, diese Bewegungen aber verleihen ihrerseits den Gelenken die zur Function günstigste Beschaffenheit, indem die in Contact tretenden Flächen sich abschleifen, der Muskelzug die Angriffsstellen der bewegenden Kräfte zweckmässig gestaltet, und schliesslich der mechanische Druck selbst auf die Ernährung in solcher Weise zurückwirkt, dass die Ablagerung der Knochenmasse den mechanischen Bedingungen sich anpasst. Dieser mechanischen Analyse der Entstehungsbedingungen der Function tritt dann die ihrer Wirkungen zur Seite, indem man theils auf theoretisch-mechanischem, theils auf experimentellem physiologischem Wege ihre functionelle Bedeutung zu ermitteln sucht. Ihre glänzendsten Erfolge hat diese mechanische Functionsanalyse begreiflicher Weise in der Anatomie des menschlichen Skelets und seiner Gelenke aufzuweisen**).

Es zeigt sich nun aber vielfach, dass die mechanischen Hülfsmittel zur Lösung schon der einfachsten morphologischen Aufgabe, der genauen Beschreibung der Theile, nicht ausreichen, sondern dass die Untersuchung zur optischen Morphologie ihre Zuflucht

---

*) Vgl. hierzu die allgemeinen Erörterungen über das Zweckprincip, Bd. I, S. 642 ff.

**) Vgl. namentlich die Untersuchungen von W. Braune und O. Fischer in den Abh. der kgl. sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Cl., Bd. 14, 15, 17 und 18.

nehmen muss. Nach ihrem logischen Charakter ist die mikroskopische Erforschung der Gewebe und Organe eine blosse Fortsetzung der mechanischen. In nicht anderer Weise als diese sucht auch jene die Organismen in die durch ihre äussere Form unterscheidbaren Bestandtheile zu zerlegen. Aber durch die Herbeiziehung optischer Werkzeuge gelingt es ihr, was für das blosse Auge homogen erscheint in weitere Bestandtheile zu trennen; dadurch erhebt sie sich zu der Untersuchung der Formelemente und ihrer Beziehungen, bei der sie übrigens selbstverständlich die Hülfsmittel der mechanischen Zerlegung mit verwendet, indem sie nur, der Feinheit ihrer Objecte entsprechend, durchgehends einer feineren Technik bedarf. Theils aber weil diese Technik immer noch verhältnissmässig roh ist den zarten und leicht zerstörbaren mikroskopischen Objecten gegenüber, theils weil die optische Zergliederung es mit sich bringt, dass für sie nur solche Formbestandtheile unterscheidbar sind, die verschiedenes Lichtbrechungsvermögen besitzen, sieht sich die optische Morphologie genöthigt, zahlreiche weitere Hülfsmittel herbeizuziehen, die irgendwie verändernd auf die untersuchten Formelemente einwirken und dadurch Gegenstände zur Anschauung bringen, die sonst derselben mehr oder minder entgehen würden. Hierher gehören die zahlreichen Härtungs- und Färbungsmethoden, von denen die ersteren hauptsächlich dazu bestimmt sind, den Lagezusammenhang der Elemente weicher Gewebe sichtbar zu machen, während die letzteren Unterschiede von Geweben oder Formelementen hervorbringen oder verstärken sollen, daher sich diese Färbungsmittel besonders dann nützlich erweisen, wenn sie sich in Folge chemischer Einwirkungen nur mit einzelnen Bestandtheilen verbinden, andere aber unverändert lassen. Je mehr es bis jetzt fast ausschliesslich das Glück des Zufalls ist, das den Mikroskopiker bei der Wahl solcher Mittel leitet, um so reicher ist der Vorrath möglicher Hülfsquellen, und um so leichter erscheint es denkbar, dass auf diesem Wege trotz der unzähligen Versuche, die schon gemacht sind, auch in der Zukunft noch manches erreichbar sei. Viel wichtiger aber als eine Vermehrung dieser secundären Hülfsmittel würde es sein, wenn die Leistungsfähigkeit des Mikroskops selber erheblich vergrössert würde. Denn gewiss mit Recht hat man bemerkt, dass die Entdeckungen der mikroskopischen Anatomie in erster Linie den Optikern zu verdanken sind*). In der That, wie die Einführung des zusammen-

*) Flemming, Zellsubstanz, Kern und Zelltheilung. Leipzig 1882, S. 9.

gesetzten Mikroskops in das Arbeitszimmer des Biologen unmittelbar gefolgt war von der Entdeckung der Formelemente des Pflanzen- und Thierkörpers, so ist in der neuesten Zeit die Auffindung einer feineren Structur dieser Formelemente eine unmittelbare Rückwirkung der Einführung der Linsenimmersion mit ihrer stärkeren und lichtreicheren Vergrösserung gewesen. Sollte daher die Voraussage richtig sein, dass aus theoretischen Gründen die jetzt erreichte Grenze der Vergrösserung nicht mehr überschritten werden könne, so würde damit im grossen und ganzen durch das bisher Erreichte überhaupt die Grenze der morphologischen Analyse bezeichnet sein*). Aber da seit dieser Voraussage immerhin auf einem bei ihr nicht berücksichtigten Wege, durch Verbesserung der Beleuchtungsapparate und durch die Wahl des Oels als Immersionsflüssigkeit, abermals ein nicht unwesentlicher Fortschritt in der Leistungsfähigkeit der Mikroskope geschehen ist, so bleibt wohl die Hoffnung, dass auch in der Zukunft noch Fortschritte geschehen können, die wir jetzt nicht voraussehen. Eine bedeutsame Hülfe entsteht der unmittelbaren optischen Zergliederung ausserdem durch die Herbeiziehung von Polarisationsinstrumenten, die theils über krystallinische Structuren der mikroskopischen Objecte, theils über ungleiche Spannungsverhältnisse der festen Gewebe Aufschluss geben können, wobei freilich die Beobachtung häufig zwischen diesen beiden Deutungen die Wahl lässt**).

So wenig wie die mechanische kann sich nun aber die optische Morphologie auf eine blosse Beschreibung des Gesehenen beschränken. Vielmehr wird sie von selbst dazu gedrängt, über die mechanischen Bedingungen Rechenschaft abzulegen, denen die einzelnen Formelemente eines Gewebes vermöge ihrer Wechselwirkungen ausgesetzt sind. Bei zahlreichen pflanzlichen und thierischen Geweben genügt ein Blick in das Mikroskop, um dem Beobachter die Ueberzeugung zu geben, dass die Form der Elemente wesentlich durch die Art ihrer Coexistenz bestimmt wird. Bei der Pflanze nehmen dadurch die Grenzlinien der Zellwände und ihrer Complexe nicht selten geometrisch regelmässige Formen an, die unmittelbar Rückschlüsse auf die mechanischen Wachsthumsbedingungen gestatten***).

---

*) Helmholtz, Poggendorffs Annalen, Jubelband, 1874, S. 557.

**) Vgl. Naegeli und Schwendener, Das Mikroskop. Leipzig 1867, S. 307 ff.

***) J. Sachs, Vorlesungen über Pflanzenphysiologie, Leipzig 1882, S. 531. S. Schwendener, Monatsberichte der Berliner Akad., April 1880.

In thierischen Geweben sind die Verhältnisse durchweg verwickelter; doch begegnen uns auch hier, wie z. B. in den Epithelial- und Drüsengeweben, gewisse regelmässige Anordnungen*). Alle derartige Untersuchungen über die wechselseitige Formbestimmung der morphologischen Elemente müssen jedoch gewisse Fundamentalbedingungen als gegeben hinnehmen, weil deren causale Verfolgung der mikroskopischen Zergliederung als solcher verschlossen bleibt. Diese Bedingungen bestehen vor allem in der ungleichen Wachsthumsgeschwindigkeit der verschiedenen Elemente und Elementencomplexe. Ueber sie lassen sich nicht oder doch nur zum allergeringsten Theil durch die blosse Beobachtung Aufschlüsse gewinnen. Hier muss sich daher die mikroskopische Untersuchung mit den andern biologischen Methoden verbinden; insbesondere verspricht für dieses wie für manche ähnliche Probleme die Combination mit der experimentellen Einwirkung fruchtbringend zu werden.

Die Methoden der aus einer solchen Combination hervorgehenden experimentellen Morphologie bilden, diesem gemischten Ursprung gemäss, nicht eigentlich selbständige Verfahrungsweisen, sondern sie sind Verbindungen der mikroskopischen Beobachtung mit verschiedenen Formen des physiologischen Experimentes. Dabei werden aber diesem durch die Verhältnisse der ersteren Schranken auferlegt, die dieser Art des Experimentes immerhin eine eigenthümliche Stellung sichern. Vor allem sind zwei Bedingungen für dasselbe charakteristisch. Erstens kann es sich nur auf solche Vorgänge beziehen, die an den mikroskopischen Elementen isolirt zur Erscheinung kommen, und zweitens ist es im allgemeinen nicht möglich, die Elemente, deren experimentelle Beeinflussung beabsichtigt wird, allein zu verändern. Beide Bedingungen stehen mit einander und zugleich mit den schwierigen, nur in entfernter Annäherung erreichbaren Aufgaben der experimentellen Morphologie im Zusammenhang. Diese bezweckt schliesslich eine experimentelle Untersuchung der elementaren Lebensprocesse. Bis jetzt ist es aber nur möglich diese zu verfolgen, insoweit sie sich in unmittelbaren Veränderungen des mikroskopischen Bildes oder allenfalls noch derjenigen Eigenschaften zu erkennen geben, die sich der Untersuchung mit dem polarisirten Lichtstrahl verrathen; alle sonstigen physikalischen und chemischen Veränderungen bleiben ausgeschlossen. Ein wesentlicher

---

*) W. Roux, Der Kampf der Theile im Organismus. Leipzig 1881. Archiv f. Anatomie, 1883. Zeitschr. f. Naturwissenschaften. N. F. IX, 1883.

Unterschied solcher Experimente von den an grösseren Organen oder am ganzen Pflanzen- und Thierorganismus auszuführenden besteht nun darin, dass das mikroskopische Experiment eine räumliche Isolirung der Einwirkungen nur in sehr unvollkommener Weise vornehmen kann. Dadurch beschränken sich wesentlich seine Aufgaben. Sein hauptsächlichstes Gebiet blieben bis jetzt die elementaren Bewegungsvorgänge, wie Protoplasma-, Wimper- und Muskelbewegungen, letztere namentlich mit Rücksicht auf die etwaigen Veränderungen der doppelbrechenden Muskelelemente. Daran schliesst sich das Studium der capillaren Kreislaufserscheinungen und der in das pathologische Gebiet der Entzündungs- und Exsudationsprocesse herüberreichenden Effecte von experimentellen Einwirkungen auf dieselben. Auch die Regenerations-, Befruchtungs- und Entwicklungsvorgänge haben bis zu einem gewissen Grade begonnen, Objecte der experimentellen Morphologie zu werden. Gegenüber diesem Umfang wachsender Aufgaben ist das Inventar experimenteller Hülfsmittel leider ein beschränktes: die Wärme, chemische Reactionen und der elektrische Strom, sie alle im Verhältniss zur Zartheit der Objecte in ziemlich roher Form der Anwendung, bilden neben dem Polarisationsapparat und der gelegentlichen mechanischen Einwirkung die einzigen Agentien, über die der Mikroskopiker bei seinen Versuchen gebietet.

### c. Die physiologisch-chemische Untersuchung.

An die Untersuchung der Formbestandtheile schliesst sich diejenige der Stoffbestandtheile am unmittelbarsten an. Die Physiologie verwendet hier keine ihr eigenthümlichen Methoden, sondern sie entlehnt diese der Chemie, aber sie bedient sich ihrer allerdings unter wesentlich andern Gesichtspunkten. Die Eigenschaften der organischen Stoffbestandtheile sind für sie nur insofern von Interesse, als sie auf die Lebenseigenschaften der Organismen, ihrer Gewebe und Organe Licht werfen. Da nun an und für sich sowohl die Eigenschaften einer chemischen Verbindung wie ihre Entstehungsbedingungen in der rationellen Zusammensetzung ihren Ausdruck finden müssen, so ist die Kenntniss der Constitution der organischen Stoffe auch für die Physiologie von unschätzbarem Werthe, und nicht minder lassen sich reiche Aufschlüsse über die chemischen Vorgänge im Thierkörper erwarten, wenn es gelingt, dessen Stoffverbindungen auf synthetischem Wege aus den Elementen oder aus einfacheren

Verbindungen herzustellen. Leider aber ist die chemische Analyse und Synthese noch weit von diesem Ziele entfernt. Gerade von den physiologisch wichtigsten Stoffen, den Eiweisskörpern und ihren Verwandten, kennen wir mit Sicherheit nur die elementare Zusammensetzung; auch die für die Lebensfunctionen so wichtigen pflanzlichen und thierischen Farbstoffe, wie das Chlorophyll und Hämoglobin, sind uns noch dunkel in Bezug auf ihre Constitution. Dem entsprechend ist man zwar im allgemeinen im Stande, die einfacheren organischen Stoffe, welche die Bestandtheile thierischer und pflanzlicher Excrete bilden, auch auf künstlichem Wege durch Oxydation und Spaltung zu erzeugen. Für die zusammengesetzteren Gewebsbestandtheile aber sind bis jetzt nur die Organismen selbst, namentlich die Pflanzen, als Erzeugungsstätten bekannt. Dieser Umstand hat die Folge mit sich geführt, dass die chemischen Processe im Thierkörper unserem Verständnisse zugänglicher sind als die in der Pflanze.

Da die Untersuchung der chemischen Stoffbestandtheile für die Physiologie nur das Mittel bildet, um zu einem Verständniss der chemischen Lebenserscheinungen zu gelangen, so verwendet sie neben der chemischen Analyse hauptsächlich noch zwei Methoden: 1) die vergleichende Beobachtung der die chemischen Processe begleitenden morphologischen Vorgänge, und 2) die Nachbildung der physiologisch-chemischen Processe ausserhalb des Organismus. Bei allen den synthetischen Processen im Pflanzen- und Thierkörper, deren künstliche Nacherzeugung unmöglich ist, wie der Bildung des Amylon, der Cellulose, des Chlorophyll, der Eiweissstoffe in der Pflanze, oder der Rückbildung des Verdauungseiweisses in genuines Eiweiss, der Bildung von Hämoglobin, Protoplasma- und Kernsubstanzen der Zellen im Thierkörper, sind wir auf die erste dieser Methoden angewiesen. Hier ist es besonders die Pflanzenphysiologie, in der auf das glücklichste die mikroskopische Beobachtung der chemischen Analyse zu Hülfe gekommen ist, indem es ihr gelang, die Succession des Auftretens der einzelnen Zellbestandtheile mit einiger Sicherheit zu ermitteln*). Zurückgeblieben ist in dieser Beziehung die animalische Physiologie wohl deshalb, weil sich hier einige der wichtigsten Stoffbildungsvorgänge, wie die Regeneration des genuinen Eiweisses, der morphologischen Untersuchung entziehen; nur über

---

*) Vgl. Jul. Sachs, Vorlesungen über Pflanzenphysiologie, S. 357 ff. W. Pfeffer, Pflanzenphysiologie, I, S. 266 ff.

die Bildung der Blutbestandtheile besitzen wir manche, aber chemisch noch schwer zu deutende Beobachtungen. Uebrigens ist es ein Nachtheil dieser Methode, dass sie uns immer nur über die äussere Succession der Erscheinungen Auskunft gibt, und dass daher die eigentlich chemische Seite des Vorgangs der Hypothese überlassen bleibt, die natürlich um so unsicherer ist, je weniger wir von der wahren Constitution der in Frage kommenden Verbindungen unterrichtet sind. Hier ist daher die Methode der Nachbildung der Processe ausserhalb des Organismus ungleich fruchtbarer; ihr Nachtheil besteht nur darin, dass sie im allgemeinen bloss auf die organischen Zersetzungsprocesse, und auch auf diese nicht in allen Fällen, anwendbar ist. So können wir zwar durch künstliche Verdauungsgemische und auf noch andern Wegen Eiweisskörper in Peptone, durch Fermente die complexeren Kohlehydrate in einfachere verwandeln, wir vermögen ferner die meisten thierischen Excretionsstoffe künstlich aus Gewebebildnern durch die Einwirkung von Oxydationsmitteln zu erzeugen, aber im letzteren Falle weichen die Producte quantitativ und zum Theil qualitativ sehr erheblich von denjenigen ab, die bei der natürlichen Oxydation im thierischen Körper selbst entstehen. Die hypothetische Reconstruction der physiologisch-chemischen Processe bleibt also auch hier nicht erspart, und die künstliche Nachbildung der Producte vermittelt höchstens eine gewisse chemische Controle der Hypothesen, die leider oft noch der zureichenden Verification entbehren.

### d. Die physiologisch-physikalische Untersuchung.

Wie die chemische Untersuchung der Lebenserscheinungen der Chemie, so entlehnt die physikalische der Physik ihre fundamentalen Methoden. Auch hier gliedert sich die Untersuchung in eine Analyse der Eigenschaften und in eine solche der Vorgänge. Wir untersuchen, um die Leistungsfähigkeit der einzelnen Organe und Gewebe zu würdigen, die Elasticität und Cohäsion der Knochen und Muskeln, die osmotischen Eigenschaften pflanzlicher und thierischer Membranen, die Wärmeverhältnisse der verschiedenen Organe, die elektrischen Eigenschaften bestimmter Gewebe. Manche dieser Untersuchungen, wie die der Elasticität und Cohäsion, berühren sich mit den Aufgaben der mechanischen Morphologie, andere, wie die der optischen Eigenschaften, werden, von der Prüfung der brechenden Medien des Auges abgesehen, fast ganz von der optischen Mor-

phologie in Anspruch genommen. Ueberall da bleibt aber die Untersuchung der physikalischen Eigenschaften der specifisch physikalischen Untersuchuug vorbehalten, wo dieselbe nur die Vorbereitung bilden soll für die Erforschung der Veränderungen, welche die Theile bei ihrer Function erfahren. In diesem Sinne prüfen wir zunächst die elastischen Eigenschaften des Muskels im Ruhezustand, um dann die Veränderungen derselben während seiner Contraction zu ermitteln, oder wir vergleichen die elektrischen Eigenschaften der Nerven und Muskeln vor und während der Reizung. Aehnlich bildet die thermische Untersuchung der Theile in ihrem gewöhnlichen normalen Zustand die Vorbereitung, um die mannigfachen Abweichungen davon in Folge bestimmter innerer Vorgänge oder äusserer Einwirkungen messend zu verfolgen.

Auch die physikalische Untersuchung versucht es, wo irgend möglich, die physikalischen Processe, die im lebenden Körper zur Beobachtung kommen, ausserhalb desselben nachzubilden, um sie auf diese Weise vollständig in ihren Entstehungsbedingungen zu erforschen. Aber diese Nachbildung gelingt noch viel schwieriger als die der chemischen Processe. Denn gerade die physikalische Seite der Lebensvorgänge ist nicht nur an jene zusammengesetzten organischen Stoffe gebunden, deren synthetische Erzeugung ausserhalb des Pflanzen- und Thierkörpers bis jetzt nicht gelang, sondern sie hängt sogar von bestimmten physiologischen Eigenschaften der Stoffe ab, die ausserhalb des lebenden Organismus unwiederbringlich verloren gehen. Dadurch ist das Gebiet der synthetischen Untersuchungen der physiologischen Physik ausserordentlich eng umgrenzt. Es beschränkt sich fast ganz auf einige Fälle, in denen sich die dem todten Körper entnommenen Gewebe noch zu Versuchen verwerthen lassen, aus denen auf die physiologischen Processe, an denen jene Gewebe betheiligt sind, Rückschlüsse gemacht werden können. Ein wichtiges Gebiet dieser Art bilden die osmotischen Versuche. Hier werden pflanzliche und thierische Membranen oder andere poröse Scheidewände benützt, um über die allgemeinen Gesetze der unter ähnlichen Bedingungen jedenfalls auch innerhalb des Organismus stattfindenden Diffusion von Flüssigkeiten oder Gasen durch feuchte Membranen Aufschluss zu gewinnen. Ein anderes Gebiet bilden die calorimetrischen Versuche, die den Zweck verfolgen, aus der Verbrennungswärme der Nahrungs- und Gewebsbestandtheile auf den Werth, den diese für die Wärmebildung und Arbeitserzeugung innerhalb des lebenden Körpers besitzen, zurückschliessen zu lassen. In

andern Fällen versucht man eine schematische Nachbildung physiologischer Vorgänge, indem man von der Voraussetzung ausgeht, dass ähnlichen Wirkungen auch ähnliche Ursachen entsprechen werden. So construirte z. B. du Bois durch Verlöthung von Kupfer- und Zinkstücken Elemente, die, in eine leitende Flüssigkeit getaucht, Effecte hervorbrachten, die den von ihm beobachteten Nerven- und Muskelströmen ähnlich waren*). Engelmann suchte seine Annahme, dass die Contraction des Muskels eine durch die plötzliche Wärmeentwicklung in den Disdiaklasten entstehende thermische Quellung sei, an einer im Wasser gequollenen Darmsaite, die sich bei der Erwärmung energisch verkürzt, zu veranschaulichen**). Bei Versuchen dieser Art darf jedoch die logische Regel, dass zwar mit dem Grund die Folge, keineswegs aber mit der Folge der Grund gegeben ist, nicht übersehen werden. Der schematische Versuch kann höchstens die allgemeine Möglichkeit einer Hypothese beweisen; ihre Verification muss auf anderen Wegen gesucht werden.

### c. Die physiologische und pathologische Functionsanalyse.

Die Hülfsmittel der morphologischen, chemischen und physikalischen Untersuchung reichen, so unerlässlich sie sind, doch für sich allein niemals zu, um vollständigen Aufschluss über die Functionen des lebenden Organismus und seiner Theile zu geben, sondern sie müssen zu diesem Zweck durch eine experimentelle Analyse der Functionen ergänzt werden. Unter dieser verstehen wir aber jeden willkürlichen Eingriff in die Lebensvorgänge, welcher nachweisbare Veränderungen derselben herbeiführt. In den meisten Fällen bringt es ein solcher Eingriff mit sich, dass der Zusammenhang der Theile durch mechanische Gewalt verändert werden muss, indem man bald einzelne Organe völlig eliminirt, bald sie irgend welchen instrumentellen Einwirkungen zugänglich macht. Das häufigste und unerlässlichste Hülfsmittel der Functionsanalyse ist daher die Vivisection, aber sie ist keineswegs das einzige, da zu ähnlichen Zwecken auch Einwirkungen auf den ganzen Organismus oder dessen einzelne Organe vorkommen können, bei denen keine Zergliederung desselben stattfindet.

Die physiologische Functionsanalyse kann entweder von der

---

*) E. du Bois-Reymond, Untersuchungen über thierische Elektricität. I, S. 577 ff.

**) Th. W. Engelmann, Der Ursprung der Muskelkraft. Leipzig 1893.

Frage nach der Function gewisser Organe oder Organcomplexe oder aber von der Frage nach der Wirkung bestimmter äusserer Agentien auf den Organismus oder auf einzelne Theile desselben ausgehen. Die erste dieser Fragen ist die nächstliegende und kommt bei der Untersuchung der normalen Lebensvorgänge zur Anwendung; wir wollen die aus ihr entspringenden Methoden als die der directen Functionsanalyse bezeichnen. Die zweite Frage erhebt sich vorzugsweise in solchen Fällen, wo die functionellen Erscheinungen im allgemeinen bereits bekannt sind, und wo ihre Veränderungen unter bestimmten ungewöhnlichen Einwirkungen erforscht werden sollen. Die so entstehenden Methoden, die wir als die Influenzmethoden bezeichnen wollen, dienen theils zur näheren Untersuchung bestimmter normaler Lebenseinflüsse mittelst der Abänderung derselben, theils bilden sie, unter Zuhülfenahme abnormer Einwirkungen, das hauptsächlichste Inventar der experimentellen Pathologie. Uebrigens ist es selbstverständlich, dass sich beide Methoden nur an ihren Ausgangspunkten unterscheiden, in der Durchführung aber fortwährend in einander eingreifen.

Die directe Functionsanalyse benützt zwei Fundamentalmethoden, die meistens nach oder neben einander zur Anwendung kommen, wenn nicht aus bestimmten Gründen die eine von ihnen unmöglich wird. Sie lassen sich als specielle Fälle der allgemeinen Methoden der Elimination und der Gradation der Bedingungen betrachten. (S. 363.) Die erste besteht in der Functionsaufhebung, die zweite in der quantitativen Functionsveränderung. Eine Functionsaufhebung wird bald durch die völlige Entfernung eines Organs, bald durch die Lösung seiner functionellen Verbindungen bewirkt. Es ist besonders der Anfang der Functionsanalyse, bei dem es sich zunächst nur um die Feststellung der allgemeinen physiologischen Function bestimmter Organe handelt, welcher diese Hülfsmittel verwendet. So hat die Pflanzenphysiologie die Wege der Saftströmung in den dicotylen Holzpflanzen durch die Beobachtung des Einflusses, den Partialdurchschneidungen des Stengels auf die Ernährung der einzelnen Theile ausüben, zu ermitteln gesucht. Die animalische Physiologie hat zur Bestimmung der Functionen der Nervenwurzeln, der Nervenfasern des Rückenmarks, der einzelnen Theile des Gehirns Durchschneidungs- und Exstirpationsversuche angewandt. Ebenso sind einzelne Drüsen, wie die Milz, bei niederen Thieren die Leber, zum Behuf der Feststellung ihrer physiologischen Bedeutung ganz aus dem Körper entfernt worden. Eine weit

mannigfaltigere Anwendung lassen die Methoden der quantitativen Functionsänderung zu. In den einfachsten Fällen bedient man sich ihrer zum Behuf der Bestätigung der auf dem Weg der Aufhebung der Function gewonnenen Resultate. Hier verlangt dann der Gegensatz, dass die Aenderung in einer Steigerung der Function bestehe. Dahin gehören namentlich die qualitativen Reizversuche der animalischen Nervenphysiologie. Bei Reizung einer Nervenwurzel z. B. müssen die eintretenden Schmerzäusserungen oder Muskelcontractionen den bei der Durchschneidung beobachteten Ausfallserscheinungen entsprechen. Complicirtere Aufgaben für diese Methode ergeben sich, wenn die allgemeine Beschaffenheit der Function ermittelt ist und es sich nun darum handelt, dieselbe in Bezug auf ihre einzelnen Bedingungen näher zu verfolgen. Hier wird es erforderlich, die Veränderungen, denen die Functionen in Folge bestimmter äusserer Einwirkungen unterworfen sind, zu bestimmen und unter steter Vergleichung mit der quantitativen Abstufung der äusseren Einwirkungen messend zu prüfen. Da nun diese stets physikalischer und chemischer Art sind, so sieht sich die Functionsänderung in der Regel genöthigt, die physikalisch- und chemisch-physiologische Untersuchung zu Hülfe zu nehmen. So untersucht die Pflanzenphysiologie die vegetabilischen Ernährungsvorgänge, indem sie in willkürlicher Weise die chemische Beschaffenheit der die Wurzel umgebenden Ernährungsflüssigkeiten oder der umgebenden Luft verändert und nun theils das Wachsthum der Pflanze, theils die Beschaffenheit ihrer Stoffwechselproducte quantitativ ermittelt. So untersucht man ferner seit den berühmten Versuchen von Knight den Einfluss der Schwere auf das Wachsthum, indem man theils die Pflanze in eine von ihrer Normalstellung abweichende Lage bringt, theils die normale Wirkung der Schwere in einem bestimmten Grade durch die Wirkung einer centrifugalen Beschleunigung compensirt*). Die animalische Physiologie verfolgt die Schwankungen des Blutdrucks, indem sie gleichzeitig bald das Herz, bald die Blutgefässe, bald die Athmungsmechanik bestimmten verändernden Bedingungen aussetzt, u. s. w. In allen diesen Fällen verbindet sich nicht selten die Functionsänderung mit der Influenzmethode; immerhin bleibt der Ausgangspunkt ein anderer, insofern nicht die allgemeine Frage erhoben wird, welchen Einfluss ein bestimmtes Agens auf den Organismus ausübt, sondern die speciellere, welche Veränderungen eine

*) Vgl. Sachs, Vorlesungen über Pflanzenphysiologie, S. 828 ff.

bestimmte Function durch eine äussere Einwirkung erfährt. Die Stellung dieser Frage setzt daher meistens schon gewisse Resultate voraus, die zuvor durch die eigentliche Influenzmethode erhalten worden sind. So ist man zur Verwendung gewisser Gifte für die physiologische Functionsanalyse erst geschritten, nachdem die von den Toxikologen angewandte Influenzmethode einzelne Wirkungen derselben kennen gelehrt hatte. Nachdem man z. B. erfahren, dass das Strychnin Starrkrämpfe verursacht, welche durch Hautreize ausgelöst werden, lag es nahe, dasselbe bei der Analyse der Rückenmarksfunctionen zu verwerthen, und ähnliche Gesichtspunkte haben zur Anwendung anderer Gifte, wie des Digitalin, Atropin, Muscarin u. s. w., bei der physiologischen Analyse der Herzinnervation geführt*).

Die letzteren Bemerkungen kennzeichnen schon die wesentlichen Eigenthümlichkeiten der Influenzmethode. Die Frage, welche Wirkung ein bestimmtes Agens auf den Organismus ausübt, ist an und für sich ebenso gut möglich wie die andere, welche Leistungen der Organismus selbst oder ein einzelner Theil vollbringt. Aber in dem Zusammenhang physiologischer Untersuchungen wird man doch nur unter zwei Bedingungen zu jener ersten Fragestellung kommen: erstens in den Anfängen der Forschung, in denen noch ein unsicheres Umhertasten nach den zweckmässigsten Hülfsmitteln der Functionsanalyse stattfindet, und wo sich nun die Influenzmethode mit der Functionsaufhebung combinirt, um der tiefer eindringenden quantitativen Functionsänderung den Weg zu bereiten; und zweitens in dem speciellen Fall, wo es sich darum handelt, theils die Bedingungen des Uebergangs der normalen in die abnormen Lebenserscheinungen, theils aber auch direct die Heilsamkeit oder Schädlichkeit gewisser äusserer Einwirkungen zu erforschen. Mit diesen Problemen befinden wir uns aber schon auf dem Boden der experimentellen Pathologie, in deren Diensten gegenwärtig noch vorzugsweise die Influenzmethode Verwendung findet. Natürlich können in diesem Sinne alle möglichen Einflüsse, mechanische, thermische, elektrische, chemische, in Frage kommen. Aber vorzugsweise sind es doch zwei Arten der Einwirkung, die das physiologische und pathologische Interesse in Anspruch nehmen: erstens gewisse Intoxicationen, d. h. chemische, insbesondere toxische Einwirkungen auf den Organismus, die ebenso für das Verständniss der Störungen

*) Vgl. mein Lehrbuch der Physiologie, 4. Aufl., S. 336, 347.

der Functionen wie für das der medicamentösen Beeinflussungen von Interesse sind; zweitens gewisse Einwirkungen niederer Organismen auf höhere, unter denen die unter dem Namen der Infectionen bekannten Einwirkungen bestimmter Spaltpilze eine hervorragende Stellung einnehmen. Ein zureichendes Verständniss der auf diese Weise mittelst der Influenzmethode erhaltenen Resultate ist natürlich nur auf Grund einer eingehenden Analyse der normalen Lebensfunctionen möglich; doch können jene auch wieder für diese fruchtbringend werden, wie namentlich die Geschichte der Intoxicationsversuche zeigt, während das Studium der Infectionen hierfür noch allzu sehr in seinen Anfängen begriffen ist. Immerhin lassen die Erscheinungen des periodischen Verlaufs der meisten Infectionen, der Immunität gegen künftige Ansteckungen bei manchen unter ihnen, der Vererbung bei andern vermuthen, dass die hier sich erhebenden Fragen mit den tiefsten Problemen der Biologie im Zusammenhang stehen. Die Schwierigkeit des Studiums der Infectionen liegt übrigens hauptsächlich darin, dass es gleichzeitig eine Functionsanalyse der inficirten wie der inficirenden Organismen voraussetzt.

Neben diesem experimentellen Weg gibt es noch einen zweiten, auf dem die pathologische der normalen Physiologie Dienste zu leisten berufen ist: die Beobachtung bestimmter, durch Krankheitsbedingungen herbeigeführter Functionsstörungen und ihre Vergleichung mit den sie verursachenden Structurveränderungen. Die Resultate der klinischen und der pathologisch-anatomischen Beobachtung können so in ihrer Vereinigung einen Werth gewinnen, welcher dem der Vivisection äquivalent ist. Dabei findet lediglich eine Umkehrung der bei dieser befolgten Methodik statt, indem die Beobachtung der anatomischen Läsion derjenigen der functionellen Veränderungen nicht vorangeht sondern nachfolgt. Doch ist oft genug auch das physiologische Experiment genöthigt diesen Gang einzuhalten, da eine genauere Untersuchung selbst der willkürlich gesetzten anatomischen Störungen nicht immer während des Lebens möglich ist. Der grösste Nachtheil der pathologischen Beobachtung liegt darin, dass sie von der Gunst des Zufalls abhängt. Aber für die meisten Gebiete der Physiologie ist sie das einzige Hülfsmittel, das den Menschen selbst zum Object der functionellen Analyse zu machen gestattet. Unschätzbar ist sie darum namentlich in solchen Fällen, wo die Bedingungen der menschlichen Organisation erheblich abweichen, wie z. B. bei den Functionen der höheren Nervencentren. Ausserdem hat hier die Beobachtung am Menschen noch

den besonderen Vortheil, dass sie eine zuverlässigere Prüfung der psychischen Veränderungen gestattet, welche die physischen Störungen begleiten.

## 2. Die allgemeinen Gesetze der Lebenserscheinungen.

### a. Die biologischen Richtungen.

Auf andern Gebieten der Naturforschung sind die Gegensätze der Zweck- und Causalerklärung gegenwärtig beinahe verschwunden, oder sie haben doch aufgehört Gegensätze zu sein, da man den teleologischen Principien stets zugleich eine causale Bedeutung zugesteht. (Vgl. oben S. 303 ff.) Anders in der Biologie. Hier ist der Kampf jener Anschauungen noch immer nicht ganz erloschen. Zugleich aber hat vermöge der besonderen Natur des Gegenstandes die teleologische Auffassung eigenthümliche Formen angenommen, die, historisch aus einander hervorgegangen, unter den Namen des Animismus und Vitalismus bekannt sind. Ihnen gegenüber hat die causale Auffassung der Lebensprocesse stets die mechanische Natur derselben behauptet und demnach die Forderung aufgestellt, dass die Physiologie den Organismus unter dem Gesichtspunkt einer natürlich entstandenen Maschine zu betrachten habe*).

Der Streit dieser Anschauungen reicht bis in die frühesten Anfänge der Speculation zurück. Indem der Hylozoismus der ältesten Naturphilosophie das Bewusstsein auf die äussere Natur überträgt, denkt er sich unter allen Naturerscheinungen zumeist die Lebensvorgänge nach Analogie der zweckbewussten Willenshandlungen. Umgekehrt unterwirft die Atomistik dem der äusseren Natur entnommenen Princip der mechanischen Bewegung das eigene Sein des Menschen; das Leben entspringt ihr, wie alles Geschehen, aus dem Stoss der Atome. Gerade wegen der Ausschliesslichkeit, mit der diese Richtungen ihre Principien anwenden, stehen sie sich aber näher als die später aus ihnen hervorgegangenen Entwicklungen. Dem antiken Atomismus gilt schliesslich ebenso gut wie dem ursprünglichen Hylozoismus die Seele als der Grund des Lebens. Erst die Platonisch-Aristotelische Philosophie hat durch den Gegensatz,

---

*) Ueber die allgemeinere Bedeutung der genannten Richtungen vgl. Bd. I, S. 633 ff.

in dem sie sich zu dem Materialismus der älteren Naturphilosophie entwickelte, die Ausbildung der animistischen Anschauung in ihrer engeren Begrenzung auf die eigentlichen Lebenserscheinungen angeregt. Sogar die Unterscheidung höherer geistiger Kräfte von den niederen, an die Materie gebundenen Lebenskräften ist in ihr bereits vorgebildet. Als daher späterhin die peripatetische und die stoische Schule den Platonischen Dualismus zu beseitigen suchten, lag es nahe, jene Lebenskräfte selbst als materielle Principien zu denken und auf diese Weise dem causalen Materialismus der Atomistiker einen teleologischen gegenüberzustellen. Erzwangen sich nun vollends innerhalb des letzteren wiederum die Bewusstseinsvorgänge die Anerkennung einer Selbständigkeit, die ihre Trennung von den sonstigen Lebenserscheinungen rechtfertigte, so war damit jener Vitalismus fertig, den zuerst Galen in die Biologie einführte, der aber die Herrschaft der Galenischen Medicin lange überdauert hat.

Dieser Entstehung gemäss bildet der Vitalismus eine Art Mittelglied zwischen Animismus und Mechanismus. Mit jenem nimmt er in den lebenden Wesen zweckthätige Kräfte an, mit diesem setzt er voraus, dass die Ursachen des Lebens an die lebende Materie als solche gebunden seien. Eben deshalb lässt sich die vitalistische Anschauung leicht mit einer mechanistischen und atomistischen in Bezug auf die leblose Natur vereinigen. Gerade in dieser Form hat der Vitalismus die neuere Physiologie von Albrecht Haller bis auf Johannes Müller beherrscht. Es ist dann während einiger Jahrzehnte in Folge des Aufschwungs der physikalischen und chemischen Forschungsmethoden die mechanistische Anschauung in den Vordergrund getreten, bis in der neuesten Zeit durch die Beschäftigung mit den Entwicklungsproblemen abermals teleologische Erklärungsprincipien zu grösserer Geltung gelangten. Diese vermeiden es aber unter der sichtlichen Nachwirkung der vorangegangenen Periode meist noch geflissentlich die Form des früheren Vitalismus anzunehmen. Hierdurch gewinnen die gegenwärtig in der Biologie herrschenden Anschauungen ihren eigenthümlichen, deutlich einen Uebergangszustand der Wissenschaft verrathenden Charakter.

An verschiedenen Erscheinungen gibt sich dieser Uebergangszustand zu erkennen. Die auffallendste besteht in dem weitverbreiteten Vorkommen einer unbewussten Teleologie, die meist mit einer energischen Polemik gegen die bewusste Teleologie verbunden ist, womit es dann zusammenhängt, dass gewisse teleologische Erklärungen von ihren Urhebern oder Anhängern für causale oder

selbst für „mechanische“ gehalten werden. So kann man in Schriften über die Darwin'sche Theorie Ausführungen begegnen, in denen es als ein Verdienst Darwins gepriesen wird, dass durch ihn an die Stelle eines mystischen Schöpfungsplanes oder zweckthätiger Lebenskräfte eine „Causalerklärung“ der Lebensformen durch die Gesetze der Vererbung, der Anpassung und des Kampfes ums Dasein getreten sei*). Wir meinen nun, dass das Verdienst Darwins nicht im geringsten geschmälert wird, wenn man zugesteht, dass diese Gesetze zunächst einen rein teleologischen Charakter besitzen. Die Bedeutung seiner Theorie besteht vielmehr darin, dass sie eine unfruchtbare durch eine voraussichtlich fruchtbarere Teleologie ersetzt, indem die von ihr aufgestellten teleologischen Principien mehr Aussicht zu einer künftigen Causalerklärung bieten als die Lebenskräfte der älteren Biologie. Dieser Nutzen der Theorie wird aber allerdings wieder in Frage gestellt, wenn man sich bei den Begriffen der Vererbung und Anpassung beruhigt, als ob es, wo sie einmal ins Feld geführt sind, überhaupt nichts mehr zu erklären gäbe.

Dass die Biologie zu jener Umkehrung der causalen Betrachtung, in welcher alle Zweckerklärung besteht, in bevorzugter Weise veranlasst wird, erklärt sich leicht aus der Beschaffenheit ihrer Objecte. Niemand hat dies, ohne sich freilich dessen bewusst zu sein, nachdrücklicher anerkannt als die mechanistische Richtung der Physiologie, indem sie mit Vorliebe den Organismus als eine „natürliche Maschine“ bezeichnete. Werden doch die Leistungen einer Maschine vor allem nach den Zwecken beurtheilt, die sie erfüllen soll, daher auch nächst der Biologie gerade die Mechanik am reichsten an teleologischen Principien ist. (Vgl. S. 302 ff.) In ihr ist aber zugleich für alle andern Naturwissenschaften ein Vorbild aufgestellt für die Beziehung, in welche die teleologischen zu den causalen Principien treten müssen, wenn beide in fruchtbarer Weise zusammenwirken sollen. Nach diesem Vorbilde ist denn auch namentlich vermittelst der morphologischen Methode mancher bedeutungsvolle Beitrag zum Verständniss der mechanischen Zweckmässigkeit der Organismen geliefert worden. Wenn hierbei zunächst die Bau- und Structurverhältnisse, die bleibenden Erzeugnisse bestimmter physiologischer Functionen, mehr als die Functionen selbst einer Erklärung zugänglich waren, so ist dies deshalb begreiflich, weil bei jenen Ver-

*) Vgl. z. B. Haeckel, Generelle Morphologie der Organismen, Bd. I, S. 97 ff.

hältnissen nur einfache statische und mechanische Principien zur Anwendung kommen, während die physiologischen Functionen überall auf einem verwickelten Zusammenwirken physikalischer und chemischer Kräfte beruhen. Hier ist darum ein Ineinandergreifen teleologischer und causaler Erklärung bis jetzt nur dann möglich, wenn man sich, wie z. B. bei der Theorie der Blutbewegung, auf die Betrachtung der unmittelbar wirksamen mechanischen Kräfte beschränken kann. Um so charakteristischer ist es aber für die sich vollziehende Wandlung der biologischen Anschauungen, dass man in einem ähnlichen Sinne von einer „teleologischen Mechanik“ auch in solchen Fällen zu sprechen beginnt, wo der eigentliche Grund der Zweckmässigkeit gar nicht erklärt, sondern als gegeben in den vorhandenen Eigenschaften der Organismen vorausgesetzt wird. So z. B. wenn man darauf hinweist, dass trockene Stoffe besonders stark die Nerven der Mundschleimhaut erregen, wodurch die für das Verdauungsgeschäft äusserst zweckmässige Speichelabsonderung bewirkt werde, oder dass Sauerstoffmangel die Athembewegungen in Gang bringe, die jenen Mangel wieder beseitigen, u. s. w.*). Hier fehlt uns eben zum vollen Verständniss der mechanischen Zweckmässigkeit die Kenntniss der ursächlichen Bedingungen, durch welche diejenigen Einrichtungen der Organisation entstanden sind, vermöge deren, wie Pflüger sich ausdrückt, „die Ursache eines jeden Bedürfnisses eines lebendigen Wesens zugleich die Ursache der Befriedigung des Bedürfnisses ist“. Dieser Satz selbst ermächtigt uns nur, unter Voraussetzung der gegebenen zweckmässigen Organisation das Zweckprincip in dem allein berechtigten Sinne zu verwenden, in dem jeder Zweckzusammenhang zugleich ein Causalzusammenhang ist. Immerhin ist mit dieser Richtigstellung ein wichtiger Schritt geschehen. Zunächst musste der Gedanke der mechanischen Zweckmässigkeit, den William Harvey schon für die Mechanik des Kreislaufs verwerthete, auf alle andern Functionen ausgedehnt werden. Diese Leistung hat hauptsächlich die neueste Periode der physiologischen Forschung vollbracht, die in Folge des Gegensatzes, in dem sie sich zu dem vorangegangenen Vitalismus befand, zuerst jede Teleologie verwarf, um schliesslich selbst, gezwungen durch die Natur ihrer Untersuchungsobjecte, in der mechanischen Teleologie zu endigen. Dabei ist eine Zeit lang jene Idee der „natürlichen Maschine“, die sich in den alten iatromechanischen Schulen ausgebildet hatte, darin

---

*) Pflüger, in seinem Archiv für Physiologie, Bd. 15, S. 57 ff.

lebendig geblieben, dass man den letzten Grund der zweckmässigen Mechanik des Lebens, den Organismus, meist als gegeben voraussetzte und daher die Beschäftigung mit den Entwicklungserscheinungen geflissentlich vermied. Auch diese Periode hat bereits ihr Ende erreicht. Im Anschlusse an die Theorie der Entstehung der Arten ist das Interesse an den Entwicklungsproblemen lebendiger geworden, während zugleich die Möglichkeit ihrer Lösung in erreichbarere Entfernung gerückt scheint. Ist es auch zunächst der Natur der Sache nach die morphologische Methode, die hier überwiegt, so beginnen doch neben ihr die übrigen Hülfsmittel der Experimentalphysiologie allmählich der Entwicklungsgeschichte dienstbar zu werden. Ob eine teleologische Mechanik, die nicht bloss den gewordenen, sondern auch den werdenden Organismus umfasst, jemals zur Vollendung gelangen wird, mag zweifelhaft scheinen. Schwerlich wird sich dies Gebiet ganz der Herrschaft unverificirbarer Hypothesen, die gleichwohl zur Vollendung der Einheit unserer Naturanschauung unerlässlich sind, entziehen können. Jeder Schritt weiter dürfte aber der Erkenntniss näher führen, dass zur Erklärung der ersten Entstehung organischer Zweckmässigkeit jene subjective Form der Zweckerklärung nicht mehr ausreicht, in die wir nöthigenfalls jede Causalerklärung umkehren können, sondern dass hier der Zweck objective Bedeutung gewinnt, da die lebenden Wesen nicht bloss durch äussere Ursachen bewegt werden, sondern vor allem sich selbst nach Zweckmotiven bewegen, so dass wir schon bei den niedersten Formen, und gerade bei ihnen mehr als bei manchen der entwickelteren, zweckmässige Handlungen, die sichtlich ein Bewusstsein verrathen, einen Einfluss gewinnen sehen auf die bleibende Organisation.

### b. Teleologische Principien der Biologie.

Der Begriff des Zwecks ist auf die lebenden Wesen in doppelter Weise anwendbar, indem entweder ihre Eigenschaften oder die an ihnen zur Beobachtung kommenden Lebensvorgänge unter dem Gesichtspunkt jenes Begriffs betrachtet werden. Die erste dieser teleologischen Auffassungen ist im ganzen die ältere, doch geht sie ohne deutliche Grenze in die zweite über. Was uns in die Augen fällt, ehe wir uns noch den Zusammenhang der einzelnen Lebensprocesse klar gemacht haben, ist die Zweckmässigkeit der Organisation. Verbindet sich auch eine solche Betrachtung stets mit der Rücksicht auf die Leistungen, zu denen die lebenden Wesen befähigt

sind, so ist man doch meist geneigt, für jene Leistungen sofort in den vorausgesetzten dauernden Lebenseigenschaften die zureichende Erklärung zu finden. Dies geschieht, indem die Eigenschaften ohne weiteres in zweckthätige Kräfte umgewandelt werden. Auf diese Weise setzt der Vitalismus an die Stelle einer Erklärung der Lebenserscheinungen eine Classification der Eigenschaften lebender Wesen, wobei er zugleich jeder fundamentalen Eigenschaft das Prädicat einer Kraft beilegt. Am augenfälligsten gibt sich diese Verwechslung von descriptiver Classification und Erklärung darin zu erkennen, dass gewisse Generalbegriffe aufgestellt werden, die für alle oder für viele sehr differente Erscheinungen den gemeinsamen Erklärungsgrund enthalten, während man doch ausserdem für jede eigenthümlich geartete Leistung noch eine specifische Kraft annimmt. So tritt hier an die Stelle des Princips der Kräftecomposition, wie es in der physikalischen Mechanik Geltung beansprucht, eine Art von Kräftehierarchie. Der allgemeinen Lebenskraft sind alle einzelnen Lebenskräfte, der Bildungs- und Wachsthumstrieb, die Assimilations- und Organisationskraft, die Sensibilität und Irritabilität, unterthan, und unter diesen theilt sich z. B. wieder der Bildungstrieb in eine Generations- und Reproductionskraft*). Wir sehen heute in diesen Classenbegriffen keine Erklärungsprincipien mehr. Nichts desto weniger können sie in einer berichtigten Bedeutung theils zur abkürzenden Bezeichnung für gewisse complexe Eigenschaften und Vorgänge dienen, theils aber auch deshalb nützlich sein, weil hinreichend sicherstehende Causalbegriffe noch nicht existiren. Wenn wir beobachten, dass ein abgeschnittener Körpertheil in seiner ursprünglichen Beschaffenheit wiedererzeugt wird, oder dass das Wachsthum der Organe bei der Entwicklung nach einer gewissen Norm vor sich geht, so verbinden wir zwar mit solchen Erscheinungen den Gedanken, dass sie aus bestimmten physikalischen und chemischen Ursachen entspringen. So lange uns aber diese Ursachen noch dunkel sind, befinden wir uns mit der Deutung der Vorgänge nothgedrungen auf der teleologischen Stufe. Nicht anders geht es mit dem Begriff des Lebens selbst. Nicht bloss für die Unterscheidung des Lebendigen und Todten pflegen wir uns noch heute dieses Begriffs zu bedienen, sondern wir können insbesondere die verschiedenen Grade der Resistenzfähigkeit, die ein Organismus

*) Vgl. J. F. Blumenbach, Ueber den Bildungstrieb. Göttingen 1791, S. 92.

gleichen äusseren Einwirkungen gegenüber darbietet, kaum anders als durch die Statuirung gradweiser Verschiedenheiten der Lebenskraft ausdrücken*). Aber selbst wenn es einmal gelingen wird, die physikalischen und chemischen Bedingungen der Lebenserscheinungen tiefer zu durchschauen, so werden jene Begriffe zur abkürzenden Bezeichnung der zu Grunde liegenden complexen Vorgänge kaum zu entbehren sein. Denn es kann sich in der Biologie immer nur darum handeln, die teleologische mit der causalen Erklärung in dem Sinne zu verbinden, in welchem dies die allgemeine Beziehung des Zwecks zum Causalprincip fordert.

Eine solche Verbindung wird nun angebahnt durch die zweite Form biologischer Zweckerklärung, durch die Aufstellung teleologischer Gesetze der Lebensvorgänge. Nachdem sich für die Functionen des fertigen Organismus durchgängig das Princip der Causalerklärung praktische Geltung errungen, ist es nur noch das Gebiet der Entwicklungserscheinungen, in welchem der Hauptsache nach die einseitig teleologische Form der Erklärung nicht überschritten ist. Dennoch hat die neuere Biologie darin einen Fortschritt gemacht, dass sie das allgemeine Entwicklungsgesetz, das man früher für jede organische Species annahm, ohne damit etwas anderes auszudrücken als den gesammten Erscheinungscomplex regelmässig auf einander folgender Entwicklungszustände, in eine Anzahl von Theilgesetzen zerlegte, die einer causalen Deutung zugänglicher zu sein scheinen. Einer solchen Zerlegung musste zuerst eine Verallgemeinerung des Entwicklungsgesetzes selbst vorausgehen. Sie bestand darin, dass sich neben der individuellen Entwicklung, welche die frühere naturwissenschaftliche Tradition allein anerkannte, die Entwicklung der Arten Geltung errang, worauf sich dann nothwendig auch die mannigfachen Beziehungen zwischen individueller und genereller Entwicklung der Beobachtung aufdrängten. Dieser Standpunkt, schon vorbereitet in der speculativen Naturphilosophie dieses Jahrhunderts, und in Bezug auf den Parallelismus der generellen und individuellen Entwicklung namentlich durch die paläontologischen Arbeiten von Louis Agassiz nahe gelegt, hat in der Darwin'schen Theorie einen epochemachenden Ausdruck gefunden. Die Bedeutung dieser Theorie besteht, wie schon oben

*) Auch der Ausdruck „constitutionelle Kraft", den man in der Generationslehre gebraucht hat, um damit die Fähigkeit der Arterhaltung bei der Fortpflanzung zu bezeichnen (V. Hensen, Physiologie der Zeugung, Hermanns Handbuch, VI, 2, S. 175), ist offenbar synonym mit Lebenskraft.

bemerkt, keineswegs darin, dass sie eine Causalerklärung der Entwicklungserscheinungen gibt oder auch nur zu geben versucht. Vielmehr zerlegt sie nur ein teleologisches Gesetz von complexem Charakter, das Entwicklungsgesetz, in einige einfachere teleologische Principien.

Das Entwicklungsgesetz sagt aus, dass alle organischen Wesen aus der Differenzirung einfacher Formen von gleichartiger Beschaffenheit ursprünglich hervorgegangen sind und bei der individuellen Entwicklung noch fortwährend hervorgehen. Dieses Gesetz ist ein teleologisches, denn es fasst die Differenzirung der einfachen Formen als einen Process auf, der die Erzeugung der zusammengesetzten Form zu seinem Zweck hat. Auch wo dies nicht ausdrücklich gesagt ist, da tritt doch der Zweckgedanke darin hervor, dass jener Differenzirungsprocess nicht in Bezug auf seine Causalbedingungen, sondern nur mit Rücksicht auf seinen Erfolg untersucht wird. Die Darwin'sche Theorie zerlegt nun das Entwicklungsgesetz in zwei speciellere Gesetze: in das Vererbungsgesetz und das Anpassungsgesetz. Zwischen beiden sind die Entwicklungsprobleme dergestalt vertheilt, dass auf das Vererbungsgesetz alle Vorgänge zurückgeführt werden, die einer constanten Wiederkehr unterworfen sind, auf das Anpassungsgesetz alle Erscheinungen, in denen die Regel der constanten Wiederkehr Ausnahmen erfährt. Das Vererbungsgesetz hat daher hauptsächlich die individuelle, das Anpassungsgesetz die generelle Entwicklung begreiflich zu machen. Denn jene wiederholt sich nicht nur von Generation zu Generation, sondern es wiederholen sich in ihr auch ausserdem die Hauptzüge der generellen Entwicklung. Die letztere dagegen hat sich wahrscheinlich nur einmal vollzogen, und sie kann daher nur aus Abänderungen erklärt werden, denen die Individuen bei ihrer Entwicklung unterworfen waren. Aber eine Befestigung und Häufung solcher Abänderungen wird doch nur verständlich, wenn man auch hier das Vererbungsgesetz zu Hülfe nimmt. Auf diese Weise wird es beiden Principien durch ihr Ineinandergreifen erst möglich, die wechselvollen Vorgänge der Entwicklung zu deuten.

Hierbei ist es jedoch ein misslicher Umstand, dass die Hauptlast der Erklärung dem Vererbungsgesetz zufällt, das einer causalen Interpretation am schwersten zugänglich ist. Indem es nicht bloss die Wiederkehr bestimmter Erscheinungen, sondern auch deren regelmässige Zeitfolge verbürgen soll, ist es von dem Entwicklungsgesetz eben nur darin verschieden, dass es die auf Anpassung bezogenen

Ausnahmeerscheinungen abgestreift hat. Zur Deutung des Entwicklungsgesetzes hat nun schon das vorige Jahrhundert zwei Anschauungen ausgebildet, die unter den Namen der Epigenesis und der Evolution einander bekämpften, und deren wesentlicher Gegensatz darin lag, dass die Wiederkehr der gleichen Erscheinungen bei der Epigenesis auf die Wiederkehr der nämlichen äusseren Bedingungen, bei der Evolution auf ein Freiwerden innerer latenter Kräfte zurückgeführt wurde, die von den Erzeugern auf ihre Nachkommen übergehen und daher in den Stammeltern einer jeden Species ursprünglich enthalten sein sollten.

Ihre naivste Gestaltung hatte die evolutionistische Hypothese in den Lehren der „Ovulisten" und „Animalculisten" des 17. Jahrhunderts gefunden, nach denen die Eier oder die Spermatozoen die seit Anfang der Schöpfung in den Ureltern der Species eingeschachtelten, aber noch nicht ausgewachsenen Thiere sind. Solchen zum Theil von den Trugbildern unvollkommener Mikroskope unterstützten Theorien gegenüber war die von Casp. Friedr. Wolff zum ersten Mal ausgebildete epigenetische Theorie, welche die Entwicklung als eine der Krystallisation ähnliche Contactwirkung organisirter Elemente auf unorganische Stoffe betrachtete, ein wichtiger Fortschritt*). Gleichwohl kann man auch in ihr heute nur noch eine unzureichende Analogie sehen. Darum ist es überhaupt wohl kaum gerechtfertigt, neu auftauchende Erklärungsversuche immer noch den alten Begriffen der Epigenese und Evolution unterzuordnen. Vielmehr besitzen die heutigen Hypothesen ebensowohl epigenetische als evolutionistische Elemente. So vertritt Darwins „provisorische Hypothese der Pangenesis" im allgemeinen den Standpunkt der Epigenesis**). Doch erweitert sie diesen, indem sie nicht, wie es bei Wolff geschehen war, von einem Punkte successiv alle Theile des Körpers sich organisiren lässt, sondern indem aus jedem Theil, aus jeder einzelnen Zelle organisirende Elemente entspringen sollen, die zuerst in die Sexualzellen und dann aus diesen in den Embryonal-

---

*) Zur Geschichte dieser Theorien vgl. His, Arch. für Anthrop. IV, S. 197, 317, V, S. 69.

**) Darwin, Das Variiren der Thiere und Pflanzen. Deutsche Ausgabe, II, S. 470 ff. Noch mehr nähern sich wohl der epigenetischen Theorie Wolffs die Anschauungen Herbert Spencers (Principien der Biologie, Deutsche Ausg. I, S. 440 ff., II, S. 1 ff.). Doch nimmt auch er eine unzählige Menge „physiologischer Einheiten" an, deren jede die Eigenschaft besitzen soll, auf geeignete Stoffe eine „polarisirende" Wirkung auszuüben.

körper übergehen, in welchem sie, wachsend und sich vermehrend, das Wachsthum aller Organe veranlassen. Durch diese Verallgemeinerung nähert sich aber die Pangenesis der Evolution. Denn insofern zu allen Organanlagen die Keime in dem elterlichen Organismus enthalten sind, ist der Vorgang der Vererbung zugleich eine Evolution vorhandener Anlagen*). Aber diese setzt sich anderseits wieder aus einer Summe epigenetischer Elementarvorgänge zusammen, indem den Keimchen die Fähigkeit zugeschrieben wird unorganisirten Stoff zu organisiren.

In Wahrheit ist es daher ein anderer Unterschied, der sich an Stelle jener nur noch in gewissen Anklängen weiterlebenden Gegensätze in der neueren Entwicklungsgeschichte in den Vordergrund drängt. Auf der einen Seite begegnen uns Deutungsversuche, die darauf ausgehen die Vererbungs- und Entwicklungserscheinungen aus der Constitution eines ursprünglichen Stoffs, eines Keimplasmas oder kleinster Keimmolecüle und -molecülgruppen (Keimchen, Pangene, Biophoren, Iden u. s. w.) abzuleiten: wir wollen sie die Stofftheorien nennen. Auf der andern Seite treten Anschauungen auf, die in der regelmässig periodischen Wiederholung des Formenwandels das wesentliche Merkmal aller Entwicklung erblicken und ihre Betrachtung daher an die anderer regelmässig periodischer Naturvorgänge anlehnen: wir wollen sie als die Bewegungstheorien bezeichnen.

Die Stofftheorien, zu denen die grösste Zahl der in neuerer Zeit ausgebildeten Vererbungshypothesen gehört, sind im allgemeinen Modificationen der oben skizzirten Darwin'schen Hypothese der Pangenesis, die ihrerseits schon in den Vorstellungen der Atomistiker des Alterthums ihr Vorbild hat. Mag noch so sehr anerkannt werden, dass man in den verschiedenen Gestaltungen der pangenetischen Stofftheorie bemüht gewesen ist, theils dem Zusammenhang der Entwicklung mit den übrigen Lebensvorgängen, wie Ernährung und Wachsthum, Rechnung zu tragen**), theils die wichtigen Aufschlüsse, die wir der mikroskopischen Beobachtung über die Processe der Kerntheilung und Befruchtung verdanken, in eine nähere Beziehung zu den Erklärungsversuchen zu bringen***), so leiden doch

---

*) In der That zählt A. Weismann (Das Keimplasma. Jena 1892, S. 3 ff.) Darwins Lehre zu den evolutionistischen Hypothesen.

**) So besonders Nägeli, Mechanisch-physiologische Theorie der Abstammungslehre. München und Leipzig 1884.

***) Hierher gehören namentlich Hugo de Vries, Intracellulare Pangenesis. Jena 1889, und A. Weismann, Das Keimplasma. Jena 1892 (dazu mehrere

alle diese Stoffhypothesen an dem nämlichen Mangel: das Problem der Entwicklung wird von dem Ganzen hinweggenommen, um es auf hypothetische Elemente zu übertragen. Weder erfahren wir, wie das Wachsthum und die Vermehrung der Keimchen geschehen soll, noch wird es uns begreiflich gemacht, durch welche Wahlverwandtschaft die aus allen Körpertheilen in die Sexualzellen übergegangenen Elemente in der gehörigen Weise sich anordnen, oder durch welche Bedingungen die vererbten Eigenschaften in einer bestimmten zeitlichen Reihenfolge auftreten. Um auf diese Fragen zu antworten, müsste augenscheinlich die Stofftheorie die Eigenschaften, die sie an ihren Keimelementen voraussetzt, irgendwie auf bekannte Eigenschaften chemischer Verbindungen zurückführen oder sie wenigstens durch solche verständlich machen. Dies geschieht aber nicht, sondern die Hypothesen bleiben im Kreise rein biologischer, also teleologischer Betrachtungen*).

Wie die Stoffhypothesen bei der Erklärung der Entwicklung auf die Vererbung der Eigenschaften, so stützen sich die Bewegungshypothesen auf den zeitlichen Verlauf der Entwicklungen. In diesem Sinne hat zuerst W. His auf die Periodicität der Reizungserscheinungen hingewiesen**). Von dem Satze ausgehend, dass die Entwicklung als eine Folge successiv ausgelöster Bewegungen zu deuten sei, betrachtete er das Ei als eine erregbare Substanz, in welcher durch die Befruchtung oder (bei ungeschlechtlicher Zeugung)

---

vorangegangene Schriften desselben Verfassers), deren Arbeiten übrigens durch manche scharfsinnige Deutungsversuche im Einzelnen, ebenso wie das vorhin erwähnte Werk Nägelis, ihre Verdienste besitzen.

*) Eine grosse Rolle hat übrigens in dem Kampf der einzelnen Theorien dieser Richtung die Frage gespielt, ob, wie Darwin annahm, eine Vererbung erworbener Eigenschaften stattfinde, oder ob dies nicht möglich sei, alle individuellen Differenzen also, insofern sie nicht in äusseren Einwirkungen ihren Grund haben, aus der Vermischung verschiedener Keimstoffe bei der sexuellen Fortpflanzung entspringen, wie Weismann nachzuweisen suchte. Natürlich ist dies zunächst eine empirische Frage. Gleichwohl steht dieselbe in enger Beziehung zu den theoretischen Vorstellungen. Vererben sich erworbene Eigenschaften, so muss man eine fortwährende Veränderlichkeit der Keimelemente durch äussere Einflüsse annehmen. Ist das Gegentheil der Fall, so ist eine Continuität des Keimplasmas vorauszusetzen, welche während der ganzen Lebensgeschichte einer Species dauert. Die erste Ansicht ist daher epigenetischen, die zweite evolutionistischen Vorstellungen zugeneigt. Vgl. zu diesem Streit Weismann, Das Keimplasma, S. 515 ff., Die Continuität des Keimplasmas, 1855, und im entgegengesetzten Sinne Th. Eimer, Die Entstehung der Arten, I, 1888, S. 84 ff.

**) W. His, Unsere Körperform, Leipzig 1875, S. 145 ff.

durch andere ihr entsprechend wirkende Vorgänge die Wachsthumserregung ausgelöst werde, die nun in einer bestimmten, von den ursprünglich die Entwicklung bestimmenden Factoren abhängigen Regelmässigkeit in Raum und Zeit verlaufe*). Diese Theorie fügt sich der erweiterten Bedeutung ein, die in der neueren Physiologie der Begriff des Reizes allmählich gewonnen hat. Hier bot zunächst das Nervensystem der Thiere Fälle dar, wo der endliche Reizeffect von dem ursprünglichen Reizimpuls räumlich wie zeitlich weit getrennt sein können, und wo sich dann ein zusammengesetzter Reizungsvorgang stets in eine Folge einzelner Reizübertragungen zerlegen lässt. Auf diese Weise lag es nahe, das Schema dieses zusammengesetzten Reizverlaufs auf alle jene verwickelten Lebensvorgänge, die eine periodische Wiederkehr darbieten, wie z. B. auf die Reifung der Eier im Eierstock, auf den Wechsel von Wachen und Schlaf, zu übertragen**). Einen noch weiteren Schritt vollzog die Pflanzenphysiologie, da sie, von den einfachsten Reizbewegungen ausgehend, mehr und mehr genöthigt wurde, ein Ineinandergreifen von Reizungen anzunehmen, durch welches räumlich weit entfernte Organe in Verbindung gesetzt werden können***). Nun drängt der Begriff des Reizes in den einfacheren Fällen seiner Anwendung, z. B. bei den Nerven- und Muskelreizungen, bei den Bewegungen reizbarer Pflanzentheile, unmittelbar zu einer causalen Interpretation auf Grundlage bekannter physikalisch-chemischer Vorgänge; und der Uebertragung dieser auf zusammengesetztere, eine Vielheit von Organen und einen längeren Zeitverlauf umspannende Vorgänge steht wenigstens principiell nichts im Wege, wenn auch die Einzelerklärung noch unüberwindliche Schwierigkeiten vorfinden sollte. Das physikalische Mittelglied, das hier den Gesichtspunkt zu einem allgemeinen Verständniss solcher im einzelnen noch unaufgeklärter Processe abgibt, ist der Begriff der Auslösung. Jeder Reizungsvorgang ist, physikalisch gesprochen, ein Auslösungsprocess, und das physikalische Merkmal der Auslösung besteht darin, dass bei ihr eine geringe lebendige Kraft, wenn sie nur an geeigneter

---

*) Aehnliche Anschauungen hat auch Haeckel entwickelt, indem er dabei besonders die Analogie der periodischen Entwicklungserscheinungen mit den Wellenbewegungen betonte. (Haeckel, Die Perigenesis der Plastidule oder die Wellenzeugung der Lebenstheilchen. Berlin 1876.) Gerade diese Analogie ist übrigens, wie aus dem Folgenden hervorgehen wird, wenig zutreffend.

**) Pflüger, Untersuchungen aus dem Bonner physiol. Laboratorium, 1865, und Archiv für Physiologie, Bd. 10, S. 468.

***) Vgl. W. Pfeffer, Die Reizbarkeit der Pflanzen. Verh. der Ges. deutscher Naturforscher und Aerzte. Allg. Th. 1893.

Stelle einwirkt, latente in actuelle Energien überführt, die an Grösse die auslösende Kraft weit übertreffen können. Greifen nun solche Auslösungen mehrfach und regelmässig in einander ein, indem ein Theil der ausgelösten Energie wieder fernere Auslösungen bewirkt, so kommt dadurch ein regelmässiger Verlauf von Erscheinungen zu Stande, der sich über immer weitere Strecken des Raumes und der Zeit ausdehnt. Es ist klar, dass diesem allgemeinen Charakter der Auslösungsvorgänge auch die Entwicklungserscheinungen entsprechen. Indem die Bewegungshypothese die organische Entwicklung auf den Begriff der Reizung und mit dieser auf den der Auslösung zurückführt, steht sie also einer causalen Erklärung der Erscheinungen näher als die Stoffhypothese mit ihren lediglich die Lebenseigenschaften im Kleinen wiederholenden Keimelementen. Aber so lange der Begriff des Reizes selbst noch als der teleologische Ausdruck für eine Summe von Auslösungsvorgängen anzusehen ist, für deren Erklärung wir bis jetzt nur physikalische und chemische Analogien zu Hülfe nehmen können, steht auch hier die teleologische Deutung noch im Vordergrund, und der Hinweis auf den physikalisch-chemischen Mechanismus der Auslösungen bezeichnet eine künftige Aufgabe, für deren Inangriffnahme uns vorerst bloss allgemeine physikalische Analogien zu Gebote stehen.

Mehr als das Vererbungsgesetz ist das Anpassungsgesetz in einzelnen Fällen einer causalen Interpretation zugänglich gewesen. Sucht man alle Vorgänge, die sich dem Begriff der Anpassung unterordnen lassen, in gewisse Classen zu bringen, so kann eine mechanische, eine chemische und eine functionelle Anpassung unterschieden werden.

Unter ihnen ist die mechanische Anpassung am klarsten zu durchschauen. Sie bezieht sich fast ausschliesslich auf das wechselseitige Verhältniss der Theile des Einzelorganismus. Bei dem Wachsthum der Gewebe und Organe formen und ordnen sich die einzelnen Elemente theils unter dem Einfluss der durch ihr eigenes Wachsthum erzeugten Spannungen, theils unter der Wirkung äusserer Druck- und Zugkräfte. So scheint bei der Bildung von Zellennetzen durchweg das „Princip der kleinsten Flächen" befolgt zu sein, nach welchem sich die Oberflächen der einzelnen zähflüssigen Zellkörper derart ins Gleichgewicht setzen, dass die Summe der Oberflächen unter den gegebenen Bedingungen ein Minimum wird*). Bei der

*) G. Berthold, Studien üb. Protoplasmamechanik. Leipzig 1886, Cap. VII.

Pflanze hinterlassen in Folge des festen Gefüges der Zellwände und der Regelmässigkeit des Wachsthums die Wachsthumsspannungen deutliche Spuren sowohl in den Schichtungen der Zellwandungen selbst wie in den Anordnungen der Zellreihen, indem sich regelmässige Curvensysteme ausbilden, die unmittelbar auf die nach den verschiedenen Richtungen stattfindenden relativen Wachsthumsgeschwindigkeiten zurückschliessen lassen. Charakteristisch ist in dieser Hinsicht besonders das Verhältniss der zu dem Umfang des wachsenden Pflanzentheils concentrischen, meist kreisförmigen oder elliptischen Curven zu den sie senkrecht durchschneidenden hyperbolischen oder parabolischen Linien, ein Verhältniss für das die Jahresringe und die sie durchsetzenden Markstrahlen ein bekanntes Beispiel abgeben*). Ebenso lässt sich die regelmässige spiralige Anordnung der Blattstellungen auf die mechanischen Folgen des wechselseitigen Drucks zurückführen, den die Blattanlagen an den Vegetationspunkten ausüben**). Am Thierkörper sind wegen der meist verwickelteren Wachsthumsbedingungen mechanische Wirkungen von ähnlicher Regelmässigkeit von vornherein nur bei relativ einfachen Verhältnissen der Organisation zu erwarten. Unter solchen, wie z. B. bei der Anordnung der Furchungszellen, in den Schichtungen epithelialer Gewebe, treten sie in völlig analoger Weise auf***). Wo dagegen die durch das Wachsthum entstehenden Formen von so complexer Art sind wie die entwickelteren Thierformen, da können wir natürlich auch nicht mehr voraussetzen, dass ihnen einfache geometrische Anordnungen der Elemente entsprechen. Immerhin werden auch dann gewisse Gestaltungen als mechanische Folgen voraufgegangener Wachsthumsbedingungen zu deuten sein. So hat man die Faltungen der Keimscheibe aus einem ungleichen Flächenwachsthum derselben†), so den Verlauf der Gehirnfurchen der Säugethiere aus den verschiedenen Verhältnissen des Längen- und Breitenwachsthums der Hirnmasse abzuleiten gesucht††).

So werthvoll nun aber eine derartige Mechanik der Wachsthumsbewegungen für ein Verständniss der organischen Formen sein mag, so ist doch nicht zu übersehen, dass dabei das Princip der mechani-

---

*) Schwendener, Monatsber. der Berl. Akademie, 1880, S. 412.

**) Schwendener, Mechanische Theorie der Blattstellungen. Leipzig 1878.

***) A. Rauber, Thier und Pflanze. Akadem. Programm. Leipzig 1881. S. 34. W. Roux, Der Kampf der Theile im Organismus. Leipzig 1881.

†) W. His, Unsere Körperform, S. 45 f.

††) Vgl. meine Grundzüge der physiol. Psychologie. 4. Aufl., I, S. 88 f.

schen Anpassung nur unter der Voraussetzung gegebener Wachsthumsbedingungen einer causalen Erklärung zugänglich gemacht wird. In dieser Beziehung befinden wir uns bei der zweiten Form mechanischer Anpassung, bei der äussere Druck- und Zugkräfte als die ursächlichen Factoren auftreten, in einer günstigeren Lage. Hierher gehören zunächst die für die bleibenden oder vorübergehenden Formgestaltungen der Pflanzen massgebenden Richtungsbewegungen, für die theils die Schwere theils äussere mechanische Einwirkungen bestimmend sind*). Eine bedeutsame Erscheinung gleicher Art ist ferner die Ausbildung mechanischer Structurformen, d. h. solcher Anordnungen von Gewebselementen, die einerseits bestimmten mechanischen Zwecken dienen, anderseits aus mechanischen Ursachen entspringen, die mit diesen Zwecken in unmittelbarer Verbindung stehen. So bilden die durch grössere Cohäsion und Elasticität sich auszeichnenden Bastzellen der Pflanze ein mechanisches System, das im allgemeinen nach den Richtungen der stärksten Zug- und Druckkräfte angeordnet ist, während die weicheren Parenchymzellen die Lücken dieses Systems ausfüllen**). Am augenfälligsten bietet aber die spongiöse Substanz gewisser Knochen, wie des menschlichen Oberschenkels, eine mechanische Structur dar. Indem der Gelenkkopf sammt Hals einen nahezu horizontalen, etwas schief nach oben gerichteten Träger bildet, auf dem eine sehr bedeutende Last ruht, ordnen sich die Knochenbälkchen der spongiösen Substanz nach einem genau den statischen Druck- und Zugcurven entsprechenden Curvensystem***).

Schwieriger ist im allgemeinen der causale Zusammenhang der chemischen Anpassungen zu durchschauen. Man darf hoffen, dass Versuche über die Einwirkung kleiner Mengen chemischer Stoffe auf die Lebenseigenschaften einfachster Organismen, wie man sie auszuführen begonnen hat†), sowie das Studium der mannigfachen Vorgänge, die unter dem teleologischen Begriff der „Gewöhnung“ zusammengefasst werden, mit der Zeit einiges Licht in das

---

*) Pfeffer, Sitzungsber. der sächs. Ges. der Wiss., math.-phys. Cl., 1891, S. 638.

**) Schwendener, Das mechanische Princip im anatomischen Bau der Monocotylen. Leipzig 1874.

***) G. H. Meyer, Die Statik und Mechanik des menschlichen Knochengerüstes. Leipzig 1873. Jul. Wolff, Virchows Archiv, Bd. 50, S. 398 ff.

†) Pfeffer, Untersuchungen aus dem botanischen Institut zu Tübingen, I (1884) und II (1888), Ber. der sächs. Ges. der Wiss., 6. März 1893.

Dunkel dieser Classe von Anpassungen bringen werden. Bis jetzt sind aber fast nur gewisse complexe Wirkungen derselben der Beobachtung zugänglich. Hierher gehören z. B. die Erscheinungen der so genannten Acclimatisation. Dass solche Veränderungen der physiologischen Eigenschaften, wie sie Pflanzen und Thiere unter dem dauernden Einfluss des Klimawechsels annehmen, in letzter Instanz chemischer Art sind, kann nicht zweifelhaft sein*). Die nähere Beschaffenheit derselben ist uns aber durchweg noch unbekannt.

Die Anpassungen endlich, die ich als functionelle bezeichnet habe, stimmen sämmtlich darin überein, dass die Ausübung irgend welcher physiologischer Functionen auf den Körperbau oder auf andere Functionen entweder des nämlichen Organismus oder auch anderer mit diesem in Wechselbeziehungen stehender Organismen einen Einfluss gewinnt. Verhältnissmässig am klarsten gestalten sich diese Anpassungen dann, wenn sie sich innerhalb eines einzigen Wesens vollziehen. Die einfachsten Fälle solcher Art, die zum Theil in das Gebiet der mechanischen und chemischen Anpassung herüberreichen, bestehen in der Ausbildung der Organe durch Uebung, ihrer Verkümmerung durch Nichtübung**). Andere individuelle Anpassungen werden durch das Nervensystem vermittelt, dessen Centraltheile wichtige Einrichtungen zur wechselseitigen Regulation der Functionen enthalten. Die Wechselwirkungen zwischen Herz- und Gefässinnervation, die Selbststeuerung der Athmung, die Wärmeregulirung durch Haut und Lungen sind augenfällige Beispiele dieser Art***). Indem so schon der normale Ablauf der Lebensprocesse überall auf einer wechselseitigen Regulirung der Functionen beruht, wird es zugleich begreiflich, dass bei der Einwirkung abnormer Verhältnisse durch die nämlichen Hülfsmittel eine Ausgleichung der Störungen geschehen kann, welche die Widerstandsfähigkeit des Organismus vergrössert. So werden Circulationsstörungen zunächst durch gesteigerte Herzaction und dann durch die eintretende Vergrösserung des Herzens compensirt; die Abnahme der athmenden Oberfläche bei Lungenerkrankungen gleicht sich aus durch gesteigerte Respirationsfrequenz, u. s. w.

Liegen in allen diesen Fällen in bestimmten Reflexmechanismen des centralen Nervensystems oder andern verhältnissmässig leicht

---

*) Beispiele vgl. in grosser Zahl bei Darwin, Das Variiren der Thiere und Pflanzen, bes. II, S. 369 ff.

**) Vgl. Darwin, Das Variiren der Thiere und Pflanzen etc., I, S. 91, 153 ff.

***) Vgl. mein Lehrbuch der Physiologie, 4. Aufl., S. 357, 414, 492.

übersehbaren Wechselbeziehungen der Organe die Quellen der functionellen Anpassung, so wird dagegen das Verständniss dieser erschwert, wenn sie sich nicht auf einen einzelnen Organismus beschränkt, sondern zwischen verschiedenen, oft weit von einander abstehenden Wesen vollzieht. Wie sollen wir es deuten, wenn Insekten und die Blüthen die diese besuchen, die Form der Mundtheile der Insekten und die Gestaltung der Blüthenorgane sichtlich einander angepasst sind, oder wenn in einer den Zufall ausschliessenden grossen Anzahl von Fällen die Färbungen der Thiere mit ihrer Umgebung übereinstimmen, ja wenn manchmal Form und Färbung auf das treueste umgebende Gegenstände, wie ein Blatt oder einen Baumzweig, nachzuahmen scheinen?*) Darwin suchte diese Erscheinungen hauptsächlich durch zwei Voraussetzungen zu erklären: erstens durch die Annahme einer unbegrenzten Variabilität der Individuen, und zweitens durch einen „Kampf ums Dasein", der den alleinigen Fortbestand solcher Varietäten sichere, deren Eigenschaften den Lebensbedingungen am meisten angepasst seien. Von diesen Voraussetzungen lässt sich aber nur die zweite einigermassen durch die Beobachtung bestätigen. Dagegen bewegt sich die Variabilität der Individuen erfahrungsgemäss nur zwischen engen Grenzen, wie dies ja auch die Gültigkeit des Vererbungsgesetzes mit sich bringt. Nun steht es allerdings frei, eine beinahe beliebig lange Zeit für die Ausbildung einer dauernden Veränderung zu Hülfe zu nehmen. Aber es bleibt die Schwierigkeit, dass bei jedem einzelnen Vorgang dieser Art ein Anfang gegeben sein muss, der die bestimmte Richtung zweckmässiger Anpassung bereits besitzt, und der doch noch nicht durch den Kampf ums Dasein bedingt sein kann. Wenn z. B. Farbe und Geruch für viele Blüthen nützlich sind, weil sie dadurch aus der Ferne den sie besuchenden Insekten, die den Samenstaub von einer Blüthe zur andern tragen, kenntlich werden, so ist damit nicht im geringsten begreiflich gemacht, durch welche Bedingungen ursprünglich bestimmte Farb- und Geruchsstoffe in jenen Blüthen entstanden sind. Kennten wir aber die Ursachen dieses Vorgangs, so wäre uns damit auch für die weitere Steigerung desselben eine von dem Insektenbesuch ganz unabhängige Causalerklärung an die Hand gegeben, und jener würde vielleicht zu einem secundären Moment von bloss unterstützendem Charakter herabgedrückt. Ebenso

*) Herm. Müller, Befruchtung der Blumen durch Insekten. Leipzig 1872. Wallace, Beiträge zur Theorie der natürl. Zuchtwahl. Deutsch von A. B. Meyer. Erlangen 1870, S. 51 ff.

ist es verständlich, dass der Schmuck gewisser männlicher Thiere durch die Bevorzugung, welche die Weibchen den damit ausgestatteten Bewerbern gewähren, befestigt und gesteigert werden kann. Aber es bleibt nicht nur unerfindlich, wie das Liebesbedürfniss einer primitiven Henne im Stande gewesen sein soll den Hahn mit den Anfängen von Kamm und Sporn auszustatten, sondern es spricht auch alle psychologische Wahrscheinlichkeit dagegen, dass jemals dem Ungewohnten freiwillig der Vorzug vor dem Gewohnten gegeben worden sei.

Darwin selbst hat sich der Triftigkeit dieser Bedenken, wie es scheint, nicht verschlossen, da er in den späteren Auflagen seines Werkes „über die Entstehung der Arten“ gegenüber der unbegrenzten Variabilität und Concurrenz die Bedeutung der direct verändernden Wirkung der Lebensbedingungen stärker betonte. Freilich aber sind hier gerade die functionellen Anpassungen zwischen verschiedenen Wesen in ihrer ersten Entstehungsweise noch beinahe völlig dunkel. Vorläufig steht nur die eine Forderung fest, dass deren Ursachen zunächst individuelle sein müssen, und dass daher durch die Wechselbeziehungen der Individuen zwar gewisse Wirkungen verstärkt, niemals aber solche hervorgebracht werden können. In beiden Fällen dürfte ein Moment allzu sehr der Beachtung entzogen geblieben sein. Es besteht in dem Einflusse, den die Willenshandlungen thierischer Wesen zunächst auf ihre eigene Organisation und dann indirect auf die Organisation anderer Wesen, mit denen sie in Wechselwirkungen stehen, ausüben. Bei dem „Kampf ums Dasein“ hat man, insoweit es sich bei ihm um einen Wettstreit um Nahrung und Fortpflanzung handelt, diesem Einflusse bereits Rechnung getragen, ohne dass freilich an die psychologische Natur desselben gedacht wurde. Bedenkt man, dass schon die niedersten Organismen einfachste Triebäusserungen erkennen lassen, die eine unbefangene Beobachtung als Willenshandlungen auffassen muss*), so wird dieser Einfluss bei den Vorgängen der functionellen Anpassung kaum hoch genug anzuschlagen sein. Dies ist aber logisch um so bedeutsamer, als damit der Zweck jene objective Bedeutung gewinnt, bei der Zweckmotive als die Ursachen bestimmter Naturvorgänge auftreten**). Mit der Anerkennung, dass psychische Ursachen auf die Ausbildung der organischen Formen bestimmend einwirken, ja für die Anfänge aller organischen Ent-

*) Vgl. Grundzüge der physiol. Psychologie, 4. Aufl., II, S. 507 ff.

**) Vgl. Bd. I, S. 646 ff. und System der Philosophie S. 520 ff.

wicklung vielleicht unerlässlich sind, ist nun aber zugleich ausgesprochen, dass das Problem der Entwicklung überhaupt kein rein physiologisches, sondern zu einem wesentlichen Theile zugleich ein psychologisches Problem ist. Es wird daher auf diesen Gegenstand eingehender in der Logik der Psychologie zurückzukommen sein (Abschn. IV, Cap. II); insbesondere wird auch dort erst die Frage beantwortet werden können, in welchem Sinne ein Hereingreifen psychischer Causalität in den physischen Ablauf der Lebensprocesse überhaupt angenommen und mit dem für alle Naturvorgänge festzuhaltenden Postulat der geschlossenen Naturcausalität in Uebereinstimmung gebracht werden könne*).

Indem in der Theorie *Darwins* die Gesetze der Vererbung und der Anpassung derart mit einander verbunden werden, dass sie die wachsende Differenzirung der organischen Formen begreiflich machen, kommt in ihr schliesslich noch ein Princip zur Anwendung, welches, von den allgemeinsten nach und nach auf die beschränkteren Erfahrungsgebiete übergehend, in mehreren Naturwissenschaften eine hervorragende Bedeutung als heuristisches Hülfsprincip errungen hat: das Princip der Anhäufung sehr grosser Veränderungen durch die langsame Entstehung kleiner Abweichungen oder, wie wir es kürzer nennen können, *das Princip der Summation kleiner Wirkungen in langer Zeit*. Seinen Ursprung hat dieses Princip in der Astronomie genommen, in der schon durch die ungeheuren räumlichen Grössen, über die sich ihr Beobachtungsgebiet erstreckt, der Gedanke auch mit unermesslichen Zeitgrössen zu rechnen nahe gelegt wird. Die durch den biblischen Schöpfungsmythus genährte Vorstellung einer einmaligen, in wenigen auf einander folgenden Akten verlaufenden Schöpfungsgeschichte wurde zuerst durch die Nachweisung überaus langer Perioden für gewisse astronomische Vorgänge, wie z. B. für die Präcession der Tag- und Nachtgleichen, die Störungen der Planetenbahnen, und dann durch die grossen kosmogonischen Theorien des vorigen Jahrhunderts aus der Wissenschaft verdrängt**). Erst in unserem Jahrhundert begann aber das nämliche

---

*) Ueber das genannte Postulat vgl. oben Cap. I, S. 332.

**) Eine bezeichnende Stelle in *Kants* „Naturgeschichte des Himmels" lautet: „Die Schöpfung ist nicht das Werk von einem Augenblicke . . . Es werden Millionen und ganze Gebirge von Millionen Jahrhunderten verfliessen, binnen welcher immer neue Welten und Weltordnungen nach einander in den entfernten Weiten von dem Mittelpunkte der Natur sich bilden und zur Voll-

Princip auf die Betrachtung der irdischen Vorgänge, zunächst der geologischen Veränderungen an der Erdoberfläche Anwendung zu finden. Hier erwies sich dasselbe deshalb überaus fruchtbar, weil es die Annahme gestattete, dass die nämlichen Kräfte, die wir noch jetzt bei der Bildung unserer Erdrinde thätig sehen, stets in ähnlicher Weise wirksam gewesen seien, im Gegensatze zu der vorangegangenen „Katastrophentheorie", die umgekehrt kurzdauernde Umwälzungen durch aussergewöhnliche gewaltige Naturkräfte angenommen hatte. Diese Katastrophentheorie, die eigentlich nur dem Schöpfungsmythus eine wissenschaftliche Form gab, fand in der wirklichen Erfahrung nur äusserst spärliche Anhaltspunkte an gewissen localen Katastrophen von beschränkter Intensität vor.

Darwin hat es selbst ausdrücklich bezeugt, dass das vornehmlich von Lyell in der Geologie siegreich durchgeführte Princip der langsamen Veränderungen seinen eigenen Ideen über die Entstehung der organischen Arten durch allmähliche Anpassung ihre Richtung gegeben habe*). Zu der bei der Uebertragung des Princips von der Astronomie auf die Geologie gewonnenen Möglichkeit der Vermeidung aller nicht schon in der gewöhnlichen Erfahrung vorkommenden Katastrophen kam aber nun bei dieser zweiten Uebertragung von der Geologie auf die Biologie noch der weitere grosse Vortheil, dass hier die Existenz von Naturobjecten dem causalen Verständ-

kommenheit gelangen werden." (Werke, Ausg. von Rosenkranz und Schubert, Bd. 6, S. 160.) Auf die Erwägung, „dass, wenn man bei der Berechnung der Planetenbahnen bloss auf die Ungleichheiten von sehr langen Perioden sieht, die Summe der Massen aller Planeten, wenn sie stückweise durch die grossen Axen ihrer Bahnen dividirt werden, immer sehr nahe beständig ist", gründete ferner Laplace seine früher erwähnte Stabilitätshypothese. (Vgl. Laplace, Darstellung des Weltsystems, deutsch von Hauff, S. 51, und oben S. 464.)

*) Der Erste, der den Gedanken der langsamen geologischen Veränderungen aussprach, scheint übrigens K. E. A. von Hoff gewesen zu sein, in einem Werke, dessen Kenntniss ich der Güte meines Collegen Fr. Ratzel verdanke: Geschichte der durch Ueberlieferung nachgewiesenen natürlichen Veränderungen der Erdoberfläche, 1. Theil. Gotha 1822. Sehr klar hat schon von Hoff ausgeführt, dass der wesentliche Unterschied des neuen geologischen Standpunkts vom alten nur darin bestehe, dass dieser mit unermesslichen Kraftgrössen, jener mit unermesslichen Zeiträumen operire (Einl. S. 4 ff.), dass aber durch diese Verschiebung des Begriffs die Vorgänge eigentlich erst aus unbegreiflichen in begreifliche und natürliche sich umwandeln. von Hoffs Werk ist erst wieder in neuester Zeit der Vergessenheit entrissen worden. Unabhängig von ihm und mit grösserem Erfolg hat später Lyell in seinen „Principles of Geology" (zuerst 1830—33 erschienen) das Princip der langsamen Transformationen zur Geltung gebracht.

nisse näher gerückt wurde, die schon um ihrer qualitativen Verwicklung willen eine natürliche Entstehung innerhalb absehbarer Zeitgrenzen völlig aussichtslos machten. So hat das Princip der Anhäufung kleiner Wirkungen in dem Masse sich leistungsfähiger erwiesen, als es von den grossen Phänomenen des Universums aus mehr und mehr auf beschränktere Objecte überging. Freilich aber musste diese grössere Leistungsfähigkeit einigermassen durch die grössere Unsicherheit der begleitenden Hypothesen, welche die verwickeltere Natur der Gegenstände mit sich brachte, erkauft werden.

### c. Causale Principien der Biologie.

Der Biologie ist die Forderung einer causalen Erklärung der Lebenserscheinungen zunächst von aussen, von den exacteren Gebieten der Naturlehre aus, entgegengebracht worden, und lange sind die Nachtheile dieses fremdartigen Ursprungs fühlbar gewesen. Die iatromechanischen Richtungen erschöpfen sich in mechanischen Deutungen, ohne meist nach einer Bestätigung ihrer Hypothesen zu fragen. Nur wenige Erscheinungen von verhältnissmässig einfachem Charakter, wie der Kreislauf des Blutes und die thierischen Ortsbewegungen, waren schon frühe einem mechanischen Verständnisse zugängig geworden. Für die meisten andern Lebensvorgänge eröffnete sich erst dann die Möglichkeit einer causalen Analyse, als die Chemie in das Stadium ihrer wissenschaftlichen Entwicklung getreten war. Denn nicht lange konnte es verborgen bleiben, dass die Lebensprocesse entweder selbst in chemischen Verbindungs- und Zersetzungsvorgängen bestehen oder innig an solche gebunden sind. Nichts bezeichnet deutlicher den nahen Zusammenhang, in dem die neuere Entwicklung der physiologischen zu derjenigen der chemischen Forschung steht, als die Thatsache, dass beide von einer und derselben Entdeckung ausgegangen sind: von der Erkenntniss des Wesens der Verbrennung. Lavoisier, der Entdecker des Sauerstoffs, ist zugleich der Erste, der die thierische Athmung als einen Verbrennungsvorgang auffassen lehrte und damit auf die Quellen der thierischen Wärmebildung hinwies. Lavoisier und Laplace unternahmen es, die Intensität dieses Verbrennungsprocesses an der erzeugten Wärmemenge zu messen. Sie eröffnen damit die Reihe jener calorimetrischen Versuche, die in diesem Jahrhundert die Hauptgrundlagen für die Erkenntniss des thierischen Kräftewechsels gebildet haben. Bald schliesst sich an die chemische Erforschung der

thierischen Athmung die durch die Untersuchungen von Ingenhouss, Senebier und Saussure vermittelte Erkenntniss des reducirenden Gaswechsels der grünen Pflanzentheile und ihrer Beeinflussung durch das Licht. Damit ist der erste Schritt zu jener Statik des organischen Stoffwechsels gethan, deren Begründung die glänzendste Leistung des chemischen Theils der neueren Physiologie, wenn nicht der Physiologie überhaupt ist. Die Beziehung zwischen Pflanzen- und Thierwelt, die sich durch die Erkenntniss des Kreislaufs der Stoffe eröffnet, ist aber nicht bloss an sich eine Thatsache vom höchsten Interesse, sondern sie ist insbesondere auch deshalb bedeutungsvoll, weil sie das erste klar erkannte Beispiel einer wechselseitigen Regulation von Lebensvorgängen abgibt. Je mehr es in Folge des Fortschritts der physikalischen und chemischen Methodik der Physiologie gelungen ist, die Erscheinungen in ihre physikalischen und chemischen Elementarprocesse zu zerlegen, um so mehr haben sich analoge regulatorische Vorgänge auch innerhalb des einzelnen Organismus als eine wesentliche Eigenthümlichkeit des Lebens herausgestellt. So wird die Nahrungsaufnahme bestimmt durch den Wärme- und Kraftverbrauch, die Blutzufuhr zu den Verdauungsdrüsen und die secretorischen Processe in diesen werden angeregt durch die mechanischen und chemischen Bedingungen, welche die Nahrungsaufnahme begleiten, u. s. w. Ebenso gehören hierher die oben besprochenen functionellen Anpassungen, die namentlich durch das Nervensystem der Thiere in vielseitigster Weise vermittelt werden, für die es aber auch der Pflanze keineswegs an mannigfaltigen Vorrichtungen fehlt, obgleich dieselben natürlich in Folge des Mangels an einem dem Nervensystem gleichenden Functionscentrum mehr auf die einzelnen Organe selber vertheilt sind. So erweist sich jeder Organismus als ein aus einer grossen Anzahl in einander greifender Selbstregulirungen zusammengesetzter Apparat, der, sobald er mit andern gleich- und verschiedenartigen Organismen in Wechselwirkung tritt, nun alsbald auf das so entstehende Ganze ebenfalls das Princip der Selbstregulirung übertragen muss.

Mit dem Umsichgreifen dieser Betrachtungsweise, durch die erst die von den alten Iatromechanikern gehegte Idee der „natürlichen Maschine“ in die richtige Beleuchtung rückte, ist die Physiologie dem allgemeinen Princip nahe getreten, das sie ihren Causalerklärungen zu Grunde legen kann, auf so verschiedenen physikalischen und chemischen Bedingungen diese im einzelnen auch beruhen mögen. Dieses allgemeinste Princip ist kein anderes als

das der gesammten Naturlehre: das Princip der Constanz der Energie.

Die Biologie gebraucht dasselbe bald als ein Gesetz, in welches die durch Induction gefundenen Thatsachen als specielle Fälle sich einfügen, bald als ein Postulat, das sie einem Zusammenhang noch zu zergliedernder Erscheinungen entgegenbringt. Als ein Gesetz hat sich das Energieprincip im allgemeinen für alle jene Erscheinungen des Kräftewechsels in der organischen Natur bewährt, die an die Vorgänge des Stoffwechsels gebunden sind. Die Verhältnisse wechselseitiger Regulirung in der Statik des Stoffwechsels mussten von Anfang an auf ein Gesetz hinweisen, das eine ähnliche Constanz, wie sie der Austausch der Stoffe der Beobachtung darbietet, auch für die dynamische Seite des Vorgangs verbürge. In der That bildet schon der einzelne Organismus vermöge der Vorrichtungen der Selbstregulirung, mit denen er ausgestattet ist, ein bis zu einem gewissen Grade in sich geschlossenes System des Stoff- und Kräftewechsels, wie es ähnlich nur entweder an künstlichen Maschinen oder im grossen und hier freilich zugleich viel vollkommener an unserm Sonnensystem verwirklicht ist. Ebenso nähert sich einem solchen geschlossenen System ein Complex verschiedenartiger, pflanzlicher und thierischer Organismen, der einen vollständigen Stoffwechselkreislauf zu bilden vermag, und den man daher schon bei der Entdeckung der complementären Formen des respiratorischen Gasaustausches einem „Mikrokosmus“ verglichen hat. Aber in der Unerlässlichkeit des Sonnenlichts für die chemische Werkstätte der Pflanze tritt zugleich die Gebundenheit einer solchen Welt im Kleinen an den allgemeinen Zusammenhang kosmischer Wirkungen zu Tage. So ist es denn wohl kein zufälliger Umstand, dass Physiologen die ersten Verkünder des Energieprincips gewesen sind, und dass der Kräftewechsel der Organismen zu dessen ersten Anwendungen gehörte*).

Die physiologische Durchführung des Energieprincips trennt sich nun in zwei verschiedene Aufgaben. Die erste besteht in der Beurtheilung des gesammten Wechsels der Energie in einem einzelnen Organismus oder in einem gegebenen Zusammenhang organischer

---

*) J. R. Mayer, Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur. Liebigs Annalen, 1842. H. Helmholtz, Ueber die Erhaltung der Kraft. Berlin 1847. Vgl. ausserdem namentlich die Abhandlung von R. Mayer, Die organische Bewegung in ihrem Zusammenhange mit dem Stoffwechsel. Heilbronn 1846. (Abgedruckt in: Die Mechanik der Wärme, 2. Aufl., S. 13 ff.)

Wesen. Diese Untersuchung, die bis jetzt allein in einigermassen zureichender Weise durchgeführt ist, geht vollständig der allgemeinen Statik des Stoffwechsels parallel. Sie frägt nicht nach den speciellen Umwandlungen der Energie im Verlauf der Lebensvorgänge, sondern sie sucht nur, ähnlich wie es bei der Beurtheilung des Nutzeffects einer Arbeitsmaschine geschieht, die Zu- und Abfuhr der Energie und die Umwandlung der potentiellen in actuelle Energie oder dieser in jene quantitativ zu schätzen. Die Schwierigkeiten, die sich hier darbieten, gehören mehr der thermochemischen als der physiologischen Untersuchung an. Es führt zu falschen Resultaten, wenn man, wie es ursprünglich geschah, den Energiewerth der im Pflanzen- und Thierkörper enthaltenen organischen Verbindungen bloss nach der Kohlenstoff- und Wasserstoffmenge schätzt, ohne Rücksicht auf die Art, wie die Atome an einander gebunden sind. Denn eine Verbindung repräsentirt einen um so grösseren Vorrath an potentieller Energie, je loser, einen um so geringeren, je fester ihre Atome an einander gekettet sind. Eine vollständige Beurtheilung des Energiewechsels in einem Organismus setzt also nicht nur voraus, dass die Zu- und Abfuhr an actueller Energie in der Form von Licht, Wärme und mechanischer Arbeit bekannt seien, sondern dass ausserdem der Verbrennungs- oder Energiewerth aller Stoffbestandtheile sowie die Veränderungen, die derselbe in Folge der stattfindenden Verbindungen und Zersetzungen erfährt, gemessen werden. Dieses umfassende Problem ist, obgleich es keine erheblichen methodischen Schwierigkeiten bietet, dennoch wegen der zahlreichen Einzeluntersuchungen die es voraussetzt erst theilweise gelöst.

Die zweite Aufgabe bei der physiologischen Anwendung des Energiegesetzes besteht in der unter seiner Führung vorgenommenen Untersuchung der einzelnen Lebensvorgänge. Hier handelt es sich darum, nicht bloss im allgemeinen die Bewegung der Energie quantitativ zu verfolgen, sondern ihre speciellen Umwandlungen mit Rücksicht auf die daraus hervorgehenden physiologischen Leistungen nachzuweisen. Es ist klar, dass dabei die eingehendste physikalische und chemische Zergliederung der Processe vorausgesetzt wird. In Folge der methodischen Schwierigkeiten, die sich einer solchen bieten, ist darum diese Seite der Anwendungen des Energiegesetzes erst wenig fortgeschritten. So sind z. B. die Physiologen noch keineswegs darüber einig, auf welchen speciellen Vorgängen jene Oxydationsprocesse beruhen, durch die das Blut die bekannten Veränderungen aus der arteriellen in die venöse Beschaffenheit erfährt, ja

an welchen Orten, ob im Blute selbst oder in den Geweben, diese Oxydationen stattfinden. So hat uns ferner das Studium der elektrischen, thermischen, elastischen und sonstigen Eigenschaften des Muskels noch kaum der Lösung des Problems nach dem Wesen der Contractionskraft näher geführt. Immerhin hat sich in solchen Fällen eine Art provisorischer Anwendung des Energiegesetzes fruchtbar erwiesen, indem man, von der näheren Beschaffenheit der Energieformen abstrahirend, die Vorgänge lediglich als Bewegungen irgend welcher Art ansah, auf die das Energiegesetz anwendbar sei, ähnlich wie dies schon auf physikalischem Gebiet in den allgemeinen Untersuchungen der mechanischen Wärmetheorie zu geschehen pflegt. Namentlich die Zergliederung der Innervationsvorgänge fordert zu einer derartigen Betrachtung heraus*).

Alle diese Anwendungen des Energieprincips beziehen sich jedoch, ebenso wie die speciellen physikalisch-chemischen Causalerklärungen, zu denen bestimmte einzelne Lebensvorgänge herausfordern, auf die Verhältnisse des entwickelten Organismus, bei welchem die oben erörterten Bedingungen des Stoffwechsels die Annahme gestatten, dass innerhalb gewisser Grenzen der Zeit und der functionellen Leistung jede Abgabe actueller Energie nach aussen durch eine äquivalente Zufuhr potentieller Energie compensirt und so ein Zustand der Stabilität des Kräftewechsels hergestellt werde. Diese Voraussetzung hört auf gültig zu sein bei den Vorgängen der Entwicklung, für deren Beurtheilung wir, wie oben erörtert, vorläufig auf gewisse teleologische Principien, wie das Princip der Vererbung und der Anpassung, angewiesen sind, die eine causale Umdeutung noch nicht oder nur mittelst unsicherer, auf allgemeine Analogien gestützter Hypothesen zulassen. Zugleich gehören aber die Entwicklungserscheinungen zu denjenigen Lebensvorgängen, die, ähnlich wie etwa die einzelnen Ernährungsprocesse oder die Reizbewegungen, speciellere Erklärungen herausfordern, bei denen man sich mit der allgemeinen Subsumtion unter das Energiegesetz nicht begnügt sondern über die physikalische oder chemische Natur der Vorgänge Rechenschaft zu geben sucht. Bietet sich doch die Entwicklungsgeschichte eines organischen Wesens der Beobachtung als eine Reihe

*) Anwendungen des Energieprincips auf pflanzenphysiologische Probleme vgl. bei Pfeffer, Studien zur Energetik der Pflanzen, Verh. der sächs. Ges. der Wiss., math.-phys. Cl., XVIII, 1892, auf nervenphysiologische in meinen Untersuchungen zur Mechanik der Nerven und Nervencentren, I, S. 261 ff.; II, S. 108 ff., im Auszug Physiol. Psych. 4. Aufl., I, S. 261, 273 ff.

von Formwandlungen dar, die auf Stoffbewegungen, also in letzter Instanz auf mechanische Vorgänge zurückgeführt werden müssen. Für die causale Interpretation der Entwicklung wird daher viel weniger die allgemeine Anwendung des Energieprincips von Bedeutung sein, das sich vorzugsweise für Stabilitätszustände fruchtbar erweist, als die Ermittelung der Kräfte, die jene Stoffbewegungen hervorbringen.

Die Unzulänglichkeit des Energieprincips in diesem besonderen Fall ist übrigens nur eine Folge der allgemeinen Eigenschaft desselben, überhaupt nur gewisse in Zustandsgleichungen darstellbare Beziehungen herauszugreifen, ohne den causalen Verknüpfungen im einzelnen nachzugehen, durch die, insofern eine exacte Darstellung derselben möglich ist, in der Form von Kraft- und von Transformationsgleichungen erst eine erschöpfende Interpretation der Erscheinungen gewonnen werden kann*). Die vorherrschende Geltung allgemeiner Energiebetrachtungen in der Physiologie ist daher unverkennbar zugleich das Symptom einer noch unzureichenden Analyse der Erscheinungen. Dass dieser Zustand als ein definitiver zu betrachten sei, ist aber um so unwahrscheinlicher, als gerade das letzte und wichtigste physiologische Problem, das der Entwicklung, als eine eminent dynamische Aufgabe bei jenen vorzugsweise für die Statik des Stoff- und Kräftewechsels fruchtbaren Energiebetrachtungen leer ausgeht. Diese Thatsache findet schliesslich auch darin ihren Ausdruck, dass namentlich das Entwicklungsproblem zunächst zur Bildung eigenthümlicher biologischer Grundbegriffe und dann im Anschlusse an sie zur Aufstellung specieller physiologischer und psychophysischer Hypothesen auffordert, welche zwar nicht eine Causalerklärung im einzelnen, aber doch ein zusammenhängendes Verständniss für das Ganze der Lebensvorgänge eröffnen sollen.

## 3. Die biologischen Grundbegriffe und die Hypothesen über den allgemeinen Zusammenhang der Lebensvorgänge.

### a. Das organische Individuum und der Elementarorganismus.

Die unmittelbar gegebenen Objecte der biologischen Forschung sind die individuellen Organismen. Sie erweisen sich nach

*) Vgl. oben Cap. I, S. 327 ff.

Bau und Function zumeist als höchst zusammengesetzte Gebilde, und es erhebt sich daher nothwendig die Frage nach den biologischen Elementen, aus denen sie aufgebaut sind. Diese Frage entspricht vollständig der innerhalb der physikalischen und chemischen Forschung entstehenden nach dem elementaren Substrat der physikalischen und chemischen Vorgänge. Aber wenn schon in diesen beiden Fällen die Elementarbegriffe gewisse Unterschiede zeigten, die aus ihrer verschiedenen Anwendung entspringen, so trennt eine noch grössere Kluft die biologischen Elemente von den analogen Einheiten der unorganischen Naturlehre. Diese, die physikalischen und chemischen Atome und Molecüle, müssen sich wiederfinden in den Organismen, und jede physikalische oder chemische Untersuchung der letzteren muss auf sie zurückgreifen. Aber ausserdem ist es eine naheliegende Forderung, dass die Erscheinungen, in denen die charakteristischen Unterschiede des Lebendigen und Leblosen bestehen, in ihrer elementarsten Form an gewissen Einheiten von specifischer Beschaffenheit verwirklicht seien. Solche Erscheinungen sind die Functionen des Wachsthums durch Assimilation, der spontanen Bewegung und der Fortpflanzung. Die Elemente, an denen sie auftreten, besitzen die physiologische Bedeutung von Elementarorganismen, und die Analyse ihrer Lebenserscheinungen muss gemäss dem Princip der Einfachheit der erste Schritt zur Erforschung der causalen Bedingungen des Lebens überhaupt sein.

Die Biologie geniesst nun den grossen Vortheil, dass ihre Elemente nicht bloss aus den Erscheinungen an zusammengesetzten Körpern erschlossen, sondern direct mit Hülfe des Mikroskops gesehen werden können. Dennoch hatte man auch die Elementarorganismen aus allgemeinen Gründen vorausgesetzt, noch ehe sie beobachtet waren*). Ihre wirkliche Entdeckung beginnt mit dem hauptsächlich durch Schleiden geführten Nachweis, dass alle Pflanzen aus Zellen entstehen und aus solchen zusammengesetzt sind. Nach diesem Vorbilde bezeichnete Schwann auch die thierischen Elementartheile als Zellen und schrieb ihnen eine analoge, aus Kern, Membran und flüssigem Inhalt bestehende Zusammen-

*) Vgl. in dieser Beziehung besonders Oken, Lehrbuch der Naturphilosophie, II, S. 25 ff. Trotz der leeren Analogien zwischen dem Kosmologischen und Organologischen, welche Okens Darstellung durchzieht, lässt sich nicht verkennen, dass die Construction seiner „Urbläschen“ nebenbei auf den oben angedeuteten biologischen Forderungen beruht.

setzung zu*). Seit dieser Zeit hat die Auffassung von dem Bau der Zelle so gewaltige Umwandlungen erfahren, dass der Name „Zelle“ nur noch die Bedeutung einer gleichgültigen Gesammtbezeichnung beanspruchen kann, die ihre Bevorzugung vor dem an sich zutreffenderen und bereits von Schwann gebrauchten Wort „Elementarorganismus“ nur ihrer Kürze verdankt. Diese Umgestaltungen sind bis jetzt hauptsächlich durch die Vervollkommnung der morphologischen Methode herbeigeführt, während die für die physiologischen Probleme vor allem aussichtsreiche Combination mit der experimentellen Untersuchung noch in ihren Anfängen begriffen ist.

Frühe schon ist in der Morphologie der Zelle die Frage nach dem Verhältniss des organischen zu dem unorganischen Individuum, der Zelle zum Krystall erörtert worden. Schwann hielt die Zellenbildung für eine Krystallisation imbibitionsfähiger Stoffe, welche in Folge der Bildung einer den zuerst ausgeschiedenen Kern umgebenden Membran, die von aussen Flüssigkeit einsauge, in der Form von weichen kugelförmigen Massen erfolge. Diese Annahmen haben sich in der Beobachtung nicht bestätigt, und sie sind, seitdem vornehmlich Max Schultze auf die secundäre Bedeutung und den häufigen Mangel der Membran hinwies, in dieser Form unhaltbar geworden**). Die neueren Anschauungen sind dann theils durch die Resultate der Untersuchung der Zellstructuren mit dem polarisirten Lichte theils durch die Analyse des eigenthümlichen Aggregatzustandes der Gewebe und ihrer Elemente bestimmt worden. So betrachtet Nägeli die in Zellmembranen oder auch in festeren Niederschlägen innerhalb der Zellen abgelagerten Elemente wegen ihrer meist doppelbrechenden Eigenschaften als kleine, regelmässig orientirte Krystalle, die sich in Folge der Verwandtschaft ihrer Substanz zum Wasser in der Regel nicht zu grösseren Krystallen verbinden, sondern in kugelförmigen oder andern unkrystallinischen Massen abscheiden. Während also der Krystall aus vollkommen gleichartigen Molecülen oder Molecülgruppen besteht, so dass wir ihn, falls er regelmässig ausgebildet ist, als das vergrösserte Bild der unsichtbaren kleinsten Theile betrachten können, werden in der organisirten Substanz die Molecüle und Molecülgruppen durch veränderliche Wassermengen zu krystallinischen kleinen Körpern vereinigt,

*) Th. Schwann, Mikroskopische Untersuchungen über die Uebereinstimmung in der Structur und in dem Wachsthum der Thiere und Pflanzen. Berlin 1839.

**) Max Schultze, Archiv f. Anatomie und Physiologie, 1861, S. 17 ff.

die Nägeli als Micelle bezeichnet. Aus grösseren Verbänden solcher Micellen bauen erst die mikroskopisch sichtbaren Elemente sich auf*). Die Gestaltung der letzteren ist zunächst von jener zähflüssigen, contractilen Substanz abhängig, die, als der ursprüngliche Leibesinhalt aller Elementarorganismen, den Namen Protoplasma erhalten hat. Die tiefer eindringende mikroskopische Analyse hat übrigens gezeigt, dass das Protoplasma ebenso wenig wie der Kern der Zelle von der früher vermutheten relativ einfachen Beschaffenheit ist, sondern dass beide eine ebenso complicirte morphologische wie chemische Structur besitzen. Von besonderem Interesse ist die erstere hauptsächlich in solchen Fällen, wo sie eine bestimmte Regelmässigkeit erkennen lässt, oder wo sie unter dem Einfluss functioneller Vorgänge bestimmte Veränderungen erfährt, wie dies bei den vom Kern ausgehenden Zelltheilungen der Fall ist**). Obgleich diese Veränderungen bis jetzt bloss der morphologischen Untersuchung zugänglich sind, so erwecken doch die Erscheinungen in fast zwingender Weise die Vorstellung einer Reihe mit mechanischer Nothwendigkeit auf einander folgender molecularer Anziehungen und Abstossungen. Nur von einer tiefern Erkenntniss der dem äusseren Formwechsel zu Grunde liegenden chemischen Processe lässt sich das dereinstige Verständniss solcher Vorgänge erwarten. Die Erforschung des Chemismus der Zelle leidet aber unter der Schwierigkeit, dass die chemische Analyse grösserer Massen bedarf, und dass erst, nachdem an ihnen die Untersuchung durchgeführt ist, mittelst mikrochemischer Reactionen die Betheiligung der einzelnen morphologischen Substrate an dem Chemismus des Ganzen bis zu einem gewissen Grade erschlossen werden kann. Von diesem Princip ausgehend hat man bis jetzt erst die elementaren Assimilations- und Wachsthumsvorgänge

*) Vgl. C. v. Nägeli, Theorie der Gährung. München 1879, S. 121 ff. Mechanisch-physiologische Theorie der Abstammungslehre, München 1884, S. 30 ff. Gegen Nägelis Auffassung lässt sich einwenden, dass auch durch die molecularen Spannungen der Zellmembranen, z. B. durch ungleiche Wachsthumsspannungen, eine Doppelbrechung hervorgerufen werden kann. (Strasburger, Ueber den Bau und das Wachsthum der Zellhäute. Jena 1882.) Eine Mitwirkung dieses Factors ist in der That für gewisse Fälle nicht abzuweisen. Doch treten uns häufig in Zellen, wie z. B. in den thierischen Muskelzellen, Elemente mit doppelbrechenden Eigenschaften unter Bedingungen entgegen, die eine solche Erklärung ausschliessen.

**) Vgl. Flemming, Zellsubstanz, Kern und Zelltheilung. Leipzig 1882, und Art. „Zelle" in Merkel und Bonnet, Ergebnisse der Anatomie und Entwicklungsgeschichte, I, 1891.

einigermassen zu erforschen vermocht, indem theils die Stoffwechselprocesse der zusammengesetzten Pflanzen und Thiere mit den Resultaten morphologischer und mikrochemischer Analyse verglichen, theils aber die chemischen Wirkungen untersucht wurden, die an gewisse Complexe von Elementarorganismen gebunden sind. Solche Wirkungen sind namentlich die von niederen Organismen ausgehenden Gährungsvorgänge, deren Studium deshalb von allgemeinerem biologischem Interesse ist, weil die an den Gährungen betheiligten organischen Wesen dem primitiven Zustand von Elementarorganismen entsprechen, so dass hier aus den Massenerscheinungen direct auf die Elementarerscheinungen zurückgeschlossen werden kann.

Die grösste Schwierigkeit bietet aber die allen Entwicklungsvorgängen zu Grunde liegende Elementarfunction, die Zellvermehrung, dar. Die morphologische Untersuchung hat hier in der fundamentalen Uebereinstimmung der Zeugung zusammengesetzter Organismen mit der Vermehrung der einfachen Zellen einen wichtigen Gesichtspunkt zur Geltung gebracht. Diese Uebereinstimmung ist ihrerseits an das wichtige biologische Gesetz geknüpft, dass der Keim, und zwar sowohl das Ei wie die Spermazelle, eines jeden zusammengesetzten Organismus nach Form und Function die Bedeutung eines Elementarorganismus besitzt. Nimmt man hierzu die weitere Thatsache, dass, so weit unsere sichere Erfahrung reicht, keine Zelle anders als aus einer vorhandenen älteren Zelle entsteht, so gewinnen der Satz „omne vivum ex ovo“ des Harvey und die neue Form „omnis cellula e cellula“, die Virchow ihm gegeben, oder auch die andere „omnis nucleus e nucleo“, in die man jene wegen der Bedeutung des Kerns für die Zelltheilung umgewandelt hat, eine identische Bedeutung. Zugleich sind wir damit der wichtigen Frage nach dem Verhältniss des Elementarorganismus zum Gesammtorganismus näher getreten.

Ueber dieses Verhältniss sind im allgemeinen zwei Anschauungen möglich. Entweder denkt man sich, der Gesammtorganismus sei potentiell in dem Elementarorganismus, in der Keimzelle, aus der er unter bestimmten Bedingungen, in der Regel in Folge der Wechselwirkung mit einer andern Keimzelle, hervorgegangen ist, enthalten, seine Entwicklung beruhe also auf den ursprünglich in dieser latent liegenden Kräften. Oder man nimmt an, jede einzelne Stufe der Entwicklung sei eine nothwendige Folge der theils unmittelbar in dem Keime selbst vermöge seines gerade vorhandenen Zustandes theils in äusseren Verhältnissen gegebenen Bedingungen, und es sei

demnach auch der Gesammtorganismus ein Product aller der einzelnen Wirkungen, die der Keim im Laufe der Entwicklung erfährt. Es ist klar, dass diese Anschauungen wieder auf die Gegensätze der Evolution und der Epigenesis hinauskommen (S. 541). Doch scheint es auch hier, dass sie sich mit dem zunehmenden Streben nach causalem Verständiss der Vorgänge allmählich ausgleichen. Durch den Nachweis, dass der Keim die morphologische Natur der Zelle besitzt, wird nämlich zunächst die Auffassung nahe gelegt, alle Unterschiede organischer Entwicklung seien auf latente Differenzen der Keimzellen zurückzuführen. Sie hat in der Vererbungstheorie eine Unterstützung gefunden, da man es in der Regel als einen selbstverständlichen Corollarsatz des Vererbungsgesetzes betrachtete, dass die vererbten Charaktere in einer bestimmten zeitlichen Reihenfolge entstehen, indem jeder derselben nur während einer gewissen Zeit latent bleibe. Dem gegenüber wurde jedoch besonders durch die mechanischen Anpassungen der Gewebe die Ansicht begünstigt, ein wesentlicher Factor bei der Gestaltung des Gesammtorganismus sei in den unmittelbaren Wechselwirkungen der Theile gegeben. Die erste dieser Vorstellungen musste für sich allein zu einer einseitig teleologischen Auffassung des Vererbungsgesetzes führen. Denn die Causalerklärung kann einen gegebenen Zustand immer nur aus dem unmittelbar vorangegangenen ableiten, und die Beziehung von einander entfernter Entwicklungszustände kann daher nur durch die successive Verfolgung aller vorhandenen Zwischenstufen ermittelt werden. Da nun, wie die Erscheinungen der mechanischen Anpassung lehren, bei dem Uebergang jeder Stufe in die nächstfolgende äussere Einflüsse und Wechselwirkungen coexistirender Elemente zur Geltung kommen, so wird die Annahme, dass in der Keimzelle selbst alle aus ihr hervorgehenden Entwicklungen als latente Energien enthalten seien, unmöglich. Vielmehr erscheint nun vom Standpunkte der causalen Betrachtung aus die ganze Entwicklung der Keimzelle zum fertigen Organismus als eine Reihenfolge von Auslösungen, deren Erfolge ausserdem unter dem Einfluss der verwickelten physikalischen Bedingungen stehen, die durch die unmittelbaren Wechselwirkungen der Theile sowie durch die Einflüsse der Aussenwelt hervorgebracht werden. Wenn trotzdem gewisse Entwicklungskreise einander so ähnlich sind, dass die Beobachtung kaum merkliche Unterschiede zwischen ihnen aufzufinden vermag, so beweist dies eben nur, dass selbst so verwickelte Vorgänge in Bezug auf die bei ihnen wirksamen Factoren und die Art ihres Ineinandergreifens eine

grosse Constanz darbieten können. Deshalb ist aber doch die Befruchtung des Eies in nicht anderem Sinne Ursache des entwickelten Organismus, als etwa das Sonnenlicht die Ursache für die Existenz der lebenden Wesen auf unserer Erde ist. Nicht einmal in der Periodicität der Entwicklungserscheinungen kann, angesichts der zahlreichen Beispiele periodischen Wechsels der Energie in der unorganischen Natur, eine specifische Eigenthümlichkeit derselben gesehen werden. Wohl aber weist diese Eigenschaft darauf hin, dass mit jenen Auslösungsprocessen, die wir bei der Entwicklung des Keimes zum Gesammtorganismus voraussetzen, Bedingungen verbunden sein müssen, die schliesslich einen Stillstand des Processes herbeiführen. Da Vermehrung und Wachsthum der Zellen die elementaren Vorgänge sind, die das Wachsthum des gesammten Organismus zusammensetzen, so lassen sich jene Bedingungen dahin formuliren: Jeder Elementarorganismus ist nur einer begrenzten Vermehrung und einer begrenzten Massezunahme fähig. Dass die hier gemeinten Grenzen nicht völlig feste, sondern in Folge meist noch unbekannter Ursachen variable sind, lehren die individuellen Unterschiede der Wachsthumsgrösse und die Fälle von Bildungsmangel und -excess. Die Existenz jener Grenzen aber ist eine Theilerscheinung der allgemeinen Thatsache, die in der Begrenzung des Lebens selbst uns entgegentritt.

### b. Die systematischen Begriffe der Biologie.

Da unserer unmittelbaren Beobachtung überall nur das Individuum gegeben ist, so sind die Begriffe von Art, Gattung, Familie u. s. w. Erzeugnisse einer generalisirenden Abstraction. Die Bedingungen und Zwecke derselben sind in der allgemeinen Methodenlehre erörtert worden. (Abschn. I, Cap. II, S. 52 ff.) Hier bleibt uns übrig, die Bedeutung zu untersuchen, welche die systematischen Begriffe für die Probleme der erklärenden Biologie besitzen.

In den wissenschaftlichen Anschauungen hat sich in dieser Beziehung eine eigenthümliche Wandlung vollzogen. Die ältere Naturgeschichte legte den oberen Classenbegriffen einen um so geringeren theoretischen Werth bei, je mehr sie sich bei ihrer Feststellung logischer Willkür bewusst war. Nur die Species galt als ein natürlich gegebener Zusammenhang, mochte man sie nun rein morphologisch definiren als die Individuen, die in allen wesentlichen Merkmalen übereinstimmen, oder physiologisch als diejenigen, die

bei sexueller Verbindung einer unbeschränkten Fortpflanzung fähig seien. Die vergleichende Richtung der Naturgeschichte fügte zu der Species noch den Typus als einen ebenfalls durch die Natur selbst gebildeten allgemeineren Gattungsbegriff, der zwar nicht auf gemeinsame Abstammung, aber doch auf irgend eine tiefere Beziehung der unter ihm enthaltenen Formen zurückschliessen lasse. Darwin beseitigte die bisherige Form des Speciesbegriffs, indem er auf die fliessenden Uebergänge der Art in die Varietät und dieser in die individuelle Abänderung sowie auf die Unhaltbarkeit der physiologischen Kriterien der Fortpflanzungsfähigkeit aufmerksam machte. Die Species rückte dadurch unter die willkürlichen Kategorien der Systematik. Dagegen blieb in der älteren, der polyphyletischen Abstammung der Formen zugeneigten Richtung der Entwicklungstheorie der Begriff des Typus zunächst noch in seinem ihm durch die vergleichende Morphologie zugewiesenen Rechte. Die Species hatte so ihren Charakter der Ursprünglichkeit dem Typus abgetreten. Mit dem Uebergang der polyphyletischen in die monophyletische Anschauung wurden aber alle Typen auf einen einzigen, den der Keimzelle gleichenden Urorganismus, oder allenfalls sogar auf die formlose Protoplasmamasse eingeschränkt. Die entwickelteren Typen behielten nur die Bedeutung abgeleiteter Stammformen für die einander näheren Gattungen, womit sie übrigens immer noch der auf dieser Stufenleiter tiefer stehenden Species weit überlegen blieben.

Mit dieser Umkehrung, die sich durch die Entwicklungstheorie in der biologischen Werthschätzung der systematischen Begriffe vollzog, verband sich mit innerer Nothwendigkeit eine bestimmtere Auffassung von der Bedeutung der Merkmale, die für die Zwecke der systematischen Eintheilung verwendet werden. Auf dem Standpunkt der älteren Naturgeschichte erschienen zwei Formunterschiede als gleichwerthig, sobald sie für die Beobachtung ungefähr mit gleicher Deutlichkeit bemerkbar waren. Gerade bei verwandten Formen waren dies aber nicht selten solche Eigenschaften, die mit den Lebensbedingungen der Species und der Function bestimmter Organe in nahem Zusammenhang standen. Mit dem Vorwalten des genetischen Gesichtspunktes musste gegenüber derartigen physiologischen oder Anpassungsmerkmalen bei der Beurtheilung der systematischen Stellung den rein morphologischen oder Vererbungsmerkmalen der Vorzug eingeräumt werden. Der Charakter eines solchen kommt nun einer bestimmten Formeigenschaft um so gewisser zu, je weniger eine unmittelbare physiologische

Bedeutung derselben ersichtlich ist. In der That stellt daher Darwin die Regel auf, je weniger ein Theil der Organisation für bestimmte physiologische Zwecke geeignet sei, um so wichtiger sei er für die Beurtheilung der systematischen Stellung; insbesondere wird aus diesem Grunde den rudimentären Organen von ihm ein hoher genetischer und systematischer Werth beigemessen*). Auch in dieser Beziehung ist übrigens die genetische Auffassung Darwins in der vergleichenden Richtung der Naturgeschichte vorbereitet. Denn Cuvier und Decandolle bevorzugen bereits in ähnlicher Weise die morphologischen oder „homologen" vor den physiologischen oder „analogen" Charakteren. In beiden Fällen ist dies eine Folge des Vorrangs, den sich der Begriff des Typus vor dem der Species errungen. Gerade die Darwinsche Auffassung lässt aber jenen Unterschied der Charaktere wieder als einen fliessenden erscheinen, da es nach ihr kein Merkmal geben kann, das nicht irgend einmal ein physiologisches Bedürfniss erfüllt hätte. Die rein morphologischen sind also lediglich solche physiologische Merkmale, die sich überlebt haben. Dabei ist nun nicht einzusehen, warum sich ein Merkmal durchaus überlebt haben muss, um einen systematischen Werth zu gewinnen, und so erfährt denn auch jene Regel zahlreiche Ausnahmen, in denen gewisse Eigenschaften der Organisation gleichzeitig genetische und functionelle Bedeutung beanspruchen.

Wie auf solche Weise die Entwicklungstheorie die unteren Begriffe der Systematik, vor allen den Speciesbegriff, ihrer Unveränderlichkeit beraubt hat, so sind schliesslich unter ihrer Einwirkung auch die obersten Begriffe derselben, die schon in der gemeinen Wahrnehmung verhältnissmässig sicher fixirten Unterschiede von Pflanze und Thier, schwankend geworden. Nachdem durch das theoretische Einheitsbedürfniss die ursprünglichen Stammtypen auf einen einzigen einfachsten reducirt waren, erhob sich die Frage, welches Verhältniss zwischen diesem Urorganismus und den beiden Hauptformen organischer Wesen anzunehmen sei. Die nächstliegende Antwort lautete: der Urorganismus ist weder Pflanze noch Thier, aber er enthält in sich die Anlage zu beiden, ähnlich wie auch die Zelle bei ihrer ersten Entstehung die specifischen Unterschiede von Pflanzen- und Thierzelle noch nicht ausgebildet hat. Aus dieser Reflexion ist Haeckels Reich der Protisten hervorgegangen, welches alle diejenigen niedersten Lebensformen vereinigt, die nicht

*) Darwin, Entstehung der Arten, 6. Aufl., S. 495 ff.

mit Sicherheit zum Pflanzen- oder Thierreich gerechnet werden können. Sucht man jedoch nach einer scharfen Begriffsgrenze, so lässt sich eine solche zwar für die Unterscheidung von Pflanze und Thier, nicht aber für die Abtrennung jener indifferenten Zwischenorganismen feststellen. Derartige fundamentale Unterscheidungsmerkmale können nämlich wieder morphologischer oder physiologischer Art sein. Nun ist es im gegenwärtigen Falle eine selbstverständliche Folge der genetischen Uebereinstimmung zwischen pflanzlicher und thierischer Organisation, dass zwar die ausgebildeten Formen sofort rein morphologisch nach den Structur- und Wachsthumsverhältnissen der Zellen unterschieden werden können, dass dies aber bei den Anfängen der Entwicklung, gerade da also wo es sich um die Abgrenzung der Protisten von den niedersten Pflanzen und Thieren handelt, nicht mehr möglich ist. In der That hat darum auch Haeckel eine physiologische Charakteristik der drei Reiche zu geben versucht, und er hat, weil die früher angewandten Merkmale der Empfindung und Bewegung theils unsicher theils hinfällig sind, hierzu die Erscheinungen des Stoff- und Kräftewechsels benutzt*). Da die Pflanzen organische Verbindungen produciren und die lebendige Kraft des Sonnenlichts in potentielle chemische Energie überführen, während die Thiere jene Verbindungen zersetzen und aus chemischer Energie Wärme und Bewegung erzeugen, so scheint ihm dieser Gegensatz ein entscheidendes Kriterium zu sein. Doch bei den Protisten gerathen wir sofort in Verlegenheit. Wenn Haeckel sagt, dass sich bei ihnen Reduction und Oxydation das Gleichgewicht halten, dass sie bald Wärme binden, bald mechanische Arbeit erzeugen u. s. w., so ist diese Definition sichtlich zum Behuf der Construction eines „indifferenten Organismus“ erfunden. Nach allem, was wir von dem Stoffwechsel dieser Organismen wissen, ist er mit demjenigen der Thiere identisch, denen sie auch durch ihre Bewegungs- und anscheinende Empfindungsfähigkeit gleichen. Damit geräth aber gleichzeitig die Unterscheidung zwischen Pflanze und Thier ins Wanken. Sie ist dem Stoff- und Kräftewechsel bei der Chlorophyllathmung entnommen. Doch diese ist immer nur ein transitorisches Phänomen und überdies bei der zusammengesetzten Pflanze an einzelne Organe gebunden, während die übrigen Theile fortwährend und die ganze Pflanze in der Zeit wo sie dem Lichte entzogen ist in ihrem Stoff-

*) Haeckel, Generelle Morphologie, I, S. 232.

wechsel dem Thiere gleichen. Von diesem Gesichtspunkte aus müsste also, wie Pflüger mit Recht bemerkt hat, das Thier als der Urorganismus und die Pflanze als ein einseitig entwickeltes Thier betrachtet werden*). In Wahrheit aber wird man in dieser Unmöglichkeit, überall zutreffende Unterschiedsmerkmale aufzufinden, nur eine Bestätigung der Thatsache sehen können, dass auch die allgemeinsten Begriffe der organischen Systematik künstliche Grenzen bezeichnen, um die sich die Natur selbst nicht kümmert. Zwar entsprechen selbstverständlich jenen Grenzen natürliche Unterschiede, doch diese werden nicht sprungweise sondern, wie jede Entwicklung, in allmählichen Uebergängen erreicht. In der Ausbildung solcher Unterschiede kommt dann jedem der physiologischen Momente, die man meist einseitig bevorzugte, seine relative Bedeutung zu. Empfindung und Bewegung besitzt, wie wir nach den Zeugnissen der generellen und individuellen Entwicklungsgeschichte annehmen dürfen, jedes ursprüngliche organische Wesen. In der Pflanze gehen jene Eigenschaften in Folge der eigenthümlichen Assimilations- und Wachsthumsverhältnisse, die sich in ihr ausbilden, frühzeitig verloren. Dies Schicksal muss aber wieder auf die ganze Richtung der Organisation verändernd zurückwirken. Es ist augenfällig, dass der innere Bau der Pflanzen ein weit gleichförmigerer ist, und dass unter den äusseren Organen diejenigen, die den unmittelbaren Wirkungen der Aussenwelt am meisten ausgesetzt sind, wie Blüthe, Blätter, Wurzeln, die grössten Variationen darbieten. In diesen Unterschieden dürfte eine Thatsache ihren Ausdruck finden, auf die überdies der ganze Bauunterschied beider Lebensformen hinweist: die Pflanze verhält sich fast durchaus passiv gegenüber den Wirkungen der Aussenwelt; das Thier steht ihr mit seinem Wollen activ gegenüber. Die Zweckmässigkeit seines Körperbaus beruht daher zu einem grossen Theil auf der Zweckmässigkeit seiner eigenen Handlungen, und die Vielgestaltigkeit der thierischen Triebe bedingt von selbst eine grössere Mannigfaltigkeit der Organisation.

### c. Die Ursachen des Lebens.

Leben und Tod unterscheiden sich vor allem durch die Fähigkeit des lebenden Körpers, während einer längeren Zeit das vollständige Gleichgewicht seiner Stoffzusammensetzung bewahren zu

---

*) Pflüger, Arch. f. Physiologie, Bd. 10, S. 305.

können. Er gleicht darin dem leblosen Körper der unorganischen Natur. Während aber hier das Gleichgewicht die Folge der Unveränderlichkeit ist, resultirt es dort aus einer Summe unablässiger Veränderungen. Leider ist uns die Constitution des Protoplasmas und der andern gewebebildenden Stoffe zu wenig bekannt, als dass über die specielle Natur der elementaren Stoffwechselvorgänge, deren Ergebniss jenes physiologische Gleichgewicht ist, andere als höchst unsichere Vermuthungen möglich wären. Nur über die allgemeinen Bedingungen dieser Vorgänge lassen sich bis jetzt an der Hand der thermochemischen Vorstellungen und des Princips der Erhaltung der Energie einige Voraussetzungen gewinnen.

Durch Pflüger ist der Nachweis geführt worden, dass ein Thier ohne Sauerstoffzufuhr während einer gewissen Zeit fortzuleben vermag*). Hierdurch hat die frühere durch Lavoisier zur Geltung gebrachte Annahme, dass das Leben auf einem Verbrennungsprocess beruhe, insofern eine Veränderung erfahren, als nun nicht mehr der Lebensprocess selbst als eine directe Oxydation aufgefasst werden kann. Damit stimmen aber zugleich die der Stabilität zersetzbarer Verbindungen entnommenen allgemeinen Gesichtspunkte überein. Beruht das Gleichgewicht der Zusammensetzung des lebenden Protoplasmas darauf, dass dasselbe einzelne Theile seines complexen Molecüls verliert und wieder aus seiner Umgebung ergänzt, so ist damit eine fortwährende Selbstzersetzung als die chemische Bedingung des Lebens gefordert. Sie bewirkt, dass neue Molecüle der Nahrung dem Protoplasma aggregirt, und dass die abgestossenen Molecüle durch den zugeführten Sauerstoff verbrannt werden. Das wirkliche Gleichgewicht der Lebensvorgänge wird dann freilich nur in Folge dieser äusseren Einwirkungen möglich. Denn wenn Gleichgewicht bestehen soll, so müssen offenbar die Molecularbewegungen des Protoplasmas und die äussere Zu- und Abfuhr der Stoffe so regulirt sein, dass in einer gegebenen Zeit ebenso viele Molecüle aggregirt als abgestossen und unter Kraftausgabe oxydirt werden.

Dieser Zustand des Gleichgewichts kann nun entweder durch ein Uebergewicht der Erneuerung über die Zersetzung oder umgekehrt durch ein solches der Zersetzung über die Erneuerung gestört werden. Auf der ersten dieser Gleichgewichtsänderungen beruhen alle Wachsthums- und Zeugungserscheinungen, die beide

---

*) Pflüger, in seinem Archiv f. Physiologie, Bd. 10, S. 251 und Bd. 11, S. 222.

innig mit einander zusammenhängen, da das Wachsthum der zusammengesetzten Individuen zum Theil aus der Zellenfortpflanzung entspringt, und da die einfachen Formen der Zellenvermehrung als unmittelbare Folgen des Zellenwachsthums auftreten. Für die Auffassung dieser Vorgänge ist es von grösster Bedeutung, dass sie in hohem Grade unabhängig von den Bedingungen der äusseren Stoffzufuhr zu sein scheinen. Natürlich hört dei lebende Körper zu wachsen auf, wenn ihm der Stoff mangelt; aber dieser bleibt wirkungslos, wenn die günstigen inneren Bedingungen in dem lebenden Protoplasma fehlen. Schon das Wachsthum erscheint darum keineswegs als ein so einfacher Process wie etwa die Vergrösserung eines Krystalls. Denn bei dem organischen Wachsthum setzt jede Aggregation neuer Masse eine neue chemische Umwandlung voraus, durch die das leblose Nahrungseiweiss in lebendes Protoplasma übergeht. Eine solche Umwandlung wird, gerade so wie im stationären Ernährungszustand, selbstverständlich nicht das ganze Eiweissmolecül auf einmal ergreifen, sondern sie wird sich wieder nur an einzelnen Molecültheilen, die dem lebenden Protoplasma aggregirt werden, vollziehen können. Aber während im Fall des Gleichgewichts auf diese Weise nur der abgehende Ausfall gedeckt wird, müssen hier mehr Theilmolecüle aufgenommen werden, als verloren gegangen sind. Dies kann man sich nach sonstigen chemischen Analogien auf doppelte Weise geschehend denken. Zunächst liesse sich mit Pflüger eine Entstehung polymerer Verbindungen annehmen, bei der die Grösse des Gesammtmolecüls durch die Aggregirung neuer Theilmolecüle von gleicher Zusammensetzung zunimmt*). Da polymere Verbindungen meist analoge chemische und physikalische Eigenschaften besitzen, so ist es denkbar, dass auf diese Weise das Protoplasma wächst, ohne dass sich die Zahl seiner Gesammtmolecüle vermehrt. Man kann aber auch an Spaltungsprocesse denken, aus deren Theilungsproducten unter Mitwirkung der Molecüle des Nahrungseiweisses mehrere Gesammtmolecüle wieder entstehen können. Sucht man diese chemischen Vorgänge mit den morphologischen Veränderungen in Beziehung zu bringen, so kann man annehmen, dass die Zunahme durch Polymerisirung dem einfachen Wachsthum, die Zunahme durch Spaltung aber allen denjenigen Formen

---

*) Man erinnere sich z. B. an folgende einfache Reihe:

$CH_3.CO.HO$ Essigsäure,

$CH_3.CH_2.CO.HO$ Propionsäure,

$CH_3.CH_2.CH_2.CO.HO$ normale Buttersäure u. s. w.

des Wachsthums und der Zeugung entspreche, die auf Zellentheilung beruhen. Wollte man alles Wachsthum auf die Aggregation polymerer Molecüle zurückführen, so würde man, um eine Beziehung zu den morphologischen Thatsachen herzustellen, genöthigt sein, schliesslich den ganzen Organismus als ein einziges chemisches Riesenmolecül anzusehen, eine Anschauung der sich Pflüger in der That zuneigt. Betrachtet man dagegen die Zellentheilung als das morphologische Bild einer chemischen Spaltung, so wird damit von selbst die Grösse des Protoplasmamolecüls auf den Inhalt der einzelnen Theile beschränkt. Die häufig mit der Zellentheilung verbundene Erscheinung einer Ausscheidung von Bestandtheilen, die theils in die Excretionsstoffe übergehen, theils zur Bildung secundärer Erzeugnisse, wie der Membran und vielleicht auch des Kerns, verwendet werden, lässt sich leicht mit dieser Anschauung in Verbindung bringen. Denn die chemische Spaltung ist in der Regel mit der Bildung von Nebenproducten verbunden. Manche andere Begleiterscheinungen aber, wie die oft vorausgehenden Bewegungen des Protoplasmas, die Anordnung der Körnchenreihen desselben in Strahlenform und die Zerlegungen des Kerns, würden nun unmittelbar als ein Ausdruck der Molecularbewegungen anzusehen sein, die den chemischen Vorgang begleiten*).

Immerhin geben diese chemischen Gesichtspunkte über den Grund der eigenthümlichen Periodicität der Wachsthums- und Entwicklungsvorgänge noch keinen Aufschluss. Völlig irreführend ist hier die physikalische Analogie mit der Wellenbewegung. Diese ist ein continuirlicher Bewegungsvorgang mit periodisch wiederkehrenden Phasen; die Fortpflanzung dagegen ist bloss ein periodisch wiederkehrender Vorgang. Darin gleicht sie andern physiologischen Functionen, wie der Herzbewegung, der Athmung, dem Wechsel von Wachen und Schlaf. Von diesen physiologischen Analogien ist His ausgegangen bei seiner Annahme, dass die Anregung zur Entwicklung in einem Reizungsvorgang bestehe. (S. oben S. 543 f.) Nach den soeben zur Geltung gebrachten Anschauungen würde diese

*) Ueber die erwähnten morphologischen Erscheinungen vgl. O. Hertwig, Morphol. Jahrbuch, I, III u. IV (1875—78), Flemming, Zellsubstanz, Kern und Zelltheilung, S. 191 ff., und Th. Boveri, Art. „Befruchtung" in Merkel und Bonnet, Ergebnisse der Anatomie etc. I, 1891. Ueber die oben angedeutete Theorie der Entwicklungsvorgänge vgl. ferner mein System der Philosophie, S. 499 ff., und den Aufsatz „Biologische Probleme", Philos. Stud. V, S. 327 ff.

Voraussetzung auf den Vorgang der Zellentheilung beschränkt werden können, wodurch, abgesehen von der grösseren Länge der Perioden, die Analogie mit den die Theorie der Herz- und Athembewegungen leitenden Vorstellungen um so vollständiger wird. Hiernach liesse sich annehmen, dass sich in jeder entwicklungsfähigen Zelle während des Stoffwechsels Reizungsstoffe anhäufen, die, sobald sie in zureichender Menge entstanden sind, den Vorgang der Reizung, den wir in diesem Fall Zellentheilung nennen, auslösen. Vom chemischen Standpunkte aus würde daher die Reizung als eine Spaltung, der Reizungsstoff als ein Spaltungsferment zu deuten sein.

Diese Hypothese dürfte vor allem in den Erscheinungen der sexuellen Fortpflanzung eine Stütze finden. Rein morphologisch betrachtet besteht diese darin, dass eine Zelle, die für sich selbst die Fähigkeit der Spaltung verloren hat, sie wiedererlangt durch die Einwirkung eines aus einer fremden Zelle hervorgegangenen Elementes. Das Fermentartige des Vorgangs ist augenfällig; zugleich ist aber dessen stellvertretender Charakter nicht zu verkennen. Nachdem das Wachsthum des Gesammtkörpers zum Stillstand gekommen ist und in den meisten Geweben auch die Regeneration durch Zellentheilung ganz aufgehört hat oder nur noch unter ungewöhnlichen Bedingungen erfolgt, beginnt in den Sexualorganen erst jene Zellenproduction, die meist in periodischen Zwischenräumen zur Reifung und Abstossung der Sexualzellen führt. Die Ei- und die Spermazelle sind beide Träger des Zeugungsfermentes. Aber jedes dieser Elemente enthält das Zeugungsferment in einer wirkungsunfähigen Form. Die Rolle, die nach den neueren Beobachtungen von Hertwig, Fol u. A. der Spermakern und der Eikern bei der Befruchtung spielen, ihre attractive Bewegung, Verschmelzung und Theilung in die Kerne der Furchungszellen, machen es im höchsten Grade wahrscheinlich, dass der Kern zunächst der Sexualzellen und dann der Zellkern überhaupt der Träger der Zeugungsfermente ist. Die Eigenschaft eines Spaltungsfermentes gewinnen aber diese erst durch ihre Vereinigung, und die Fermente der Zellkerne entwickeln diese Eigenschaft im allgemeinen um so energischer, je näher ihre Entstehung noch dem Stadium der unmittelbaren Verbindung der ursprünglichen Fermente liegt. Alle diese Thatsachen rechtfertigen die Vermuthung, dass der Zellkern überhaupt ein Product der sexuellen Entwicklung sei, in welchem sich das in dem ersten Furchungskern enthaltene Spaltungsferment immer wieder erneuert.

Wie kommt es nun aber, dass diese Erneuerung allmählich abnimmt und endlich erlischt? Mit dieser Frage nähern wir uns dem zweiten Problem der dem Gleichgewicht gegenüberstehenden Lebensvorgänge, dem Problem der abnehmenden Veränderungen. Die Abnahme der Wachsthums- und Entwicklungsfähigkeit ist nur die Theilerscheinung eines allgemeineren, der aufsteigenden Entwicklung entgegengesetzten Processes. Zwischen beiden steht das Gleichgewicht eigentlich nur als ein idealer, auf die Dauer wenigstens niemals vollkommen verwirklichter Zustand. Man würde jedoch die richtige Auffassung jener Abnahme der Lebenskräfte von vornherein trüben, wenn man hier auf- und absteigende Bewegung als zwei Vorgänge ansehen wollte, die sich ablösen, wie das die alte Evolutionstheorie mit ihrer Annahme einer successiven Aus- und Einschachtelung gethan hat. Vielmehr sind die Hemmungen der Lebensprocesse von Anfang an wirksam; wie wäre es sonst denkbar, dass die Fähigkeit der Zellenvermehrung schon bald nach der ersten Furchung der Eizelle wieder erlischt? Und anderseits steht die Productionskraft des lebenden Organismus niemals ganz stille; wie wollte man es sonst deuten, dass bis ins höchste Alter einzelne Gewebe sich regeneriren, und dass die krankhaften Geschwülste der Greise manchmal die üppigste Zellenwucherung zeigen?

Das Aufhören des einfachen, nach unserer Voraussetzung auf Polymerisirung beruhenden Wachsthums ergibt sich als eine unmittelbare Folge dieses hypothetischen Vorgangs. Je complicirter polymere Molecüle werden, um so mehr sind sie im allgemeinen geneigt wieder in ihre Bestandtheile zu zerfallen, und bei einer gewissen Grenze hört darum das polymere Wachsthum überhaupt auf. Befremdender erscheint auf den ersten Blick der Stillstand der Spaltungsvorgänge. Hier wird man offenbar dazu gedrängt, die Ursache nicht in das Protoplasma selbst zu verlegen, das sich ja unverändert regenerirt, sondern in jene fermentartigen Stoffe, die wir als die äusseren Ursachen der Regeneration ansehen. Am nächsten liegt es, nach der Analogie mit andern Gährungsvorgängen, an eine Entstehung und Anhäufung von Zersetzungsproducten zu denken, die den Spaltungsprocess zuerst verlangsamen und dann völlig aufheben. Haben wir die Spaltungsfermente reizende Stoffe genannt, so können diese Gegenfermente als hemmende bezeichnet werden. Nun haben wir gesehen, dass das Spaltungsferment jedenfalls in dem Augenblick am wirksamsten ist, wo es direct aus der Verbindung der beiden sexuellen Zeugungselemente hervorging, wo also voraus-

sichtlich beide dem Verhältniss des Gleichgewichts am nächsten kommen. Demgemäss würde die einfachste Annahme sein, dass das Spaltungsferment in dem Masse an Wirksamkeit einbüsst, als der eine oder andere seiner Bestandtheile im Ueberschusse vorhanden ist. Hiermit steht in Uebereinstimmung, dass die wahrhaft zwittergeschlechtlichen Pflanzen und Thiere, bei denen gleichzeitig männliche und weibliche Sexualzellen zur Reife gelangen, nicht selten ein unbeschränkteres, hauptsächlich nur durch die Ernährungsbedingungen oder äussere Schädlichkeiten gehemmtes Wachsthum darbieten. Dennoch würde ein Baum wahrscheinlich sogar dann allmählich aufhören zu wachsen, wenn der Stamm den neuen Trieben immerfort gleichmässig den Ernährungssaft zuführen könnte. Da die Begegnung der heterogenen Zeugungselemente nothwendig localen Beschränkungen unterworfen ist, so wird dadurch auch die aus den inneren Bedingungen der vitalen Processe resultirende Grenze des Lebens immer nur um gewisse endliche Grössen erweitert werden können. In irgend einem Grad wird aber jene Erschöpfung des Lebens, die uns die Folgen der sogenannten Inzucht in vielen Fällen verrathen, auch dann nicht fehlen, wenn der Kreis der Lebenden, zwischen denen sich der Austausch vollzieht, ein noch so grosser sein sollte, da er eben ein unendlicher niemals sein kann. Die Annahme, dass der Tod der Einzelnen und der Gattungen im letzten Grunde eine Folge der äusseren Störungen sei, denen das Leben begegnet*), ist daher mit einer causalen Auffassung der Entwicklungserscheinungen kaum vereinbar. Die eigenthümliche Stufenfolge der letzteren wird vielmehr nur unter Voraussetzungen verständlich, in denen das Ende des Processes zugleich eingeschlossen ist. Jede Entwicklung trägt von Anfang an den Keim des Todes in sich.

Die für die sexuelle Fortpflanzung entwickelten Annahmen bedürfen nur unerheblicher Specialisirungen, um manche andere Thatsachen der Zeugungslehre in eine logische Verbindung zu bringen. Es ist noch aus andern Gründen wahrscheinlich, dass die stoffliche Zusammensetzung der Organismen Unterschiede darbietet, die den Unterschieden der Abstammung parallel gehen. Demnach werden auch in dieser Beziehung die Gattungen verschiedener von einander sein als die Arten, diese verschiedener als die engeren Stammesgemeinschaften; und als die letzten Unterschiede werden die der Individuen bleiben, bei denen die genetischen ausserdem noch von

*) A. Weismann, Ueber die Dauer des Lebens. Jena 1882.

den sexuellen Eigenschaften begleitet sind. Wenden wir diese Voraussetzung auf die Fortpflanzungsvorgänge an, so lässt sich unschwer verstehen, dass eine nahe Verwandtschaft der Organismen erfordert wird, wenn sich ihre Zeugungsfermente zu einem wirksamen Spaltungsferment vereinigen sollen, dass aber doch auch dauernde Gleichartigkeit der Elemente die Entwicklung beeinträchtigt. Schon die allgemeine Bedingung der geschlechtlichen Fortpflanzung, die Begegnung verschiedener Zeugungsstoffe, zeigt ja, dass eine gewisse Verschiedenheit der Componenten zur Einleitung der Entwicklung nothwendig ist. Wir haben also nur anzunehmen, dass die nämliche Regel, welche die sexuelle Fortpflanzung beherrscht, auch für die begleitenden Nebenbedingungen individueller Befähigung gültig sei. Aehnlich wie wir den Einfluss der individuellen Eigenthümlichkeiten auf die Fortpflanzung zunächst aus den sexuellen zu begreifen suchen, so lässt sich nun aber umgekehrt von den dort gewonnenen Anschauungen aus der Geschlechtsdifferenz selbst ein gewisses Verständniss abgewinnen. Fassen wir, wie oben geschehen, den Zellenkern als den Träger der Geschlechtsstoffe auf, in welchem die ursprüngliche Wirkung der Befruchtung für die ganze Lebenszeit nachwirkt, so werden wir, worauf auch andere Thatsachen hinweisen, die Entstehung der Geschlechtsdifferenz in eine sehr frühe Zeit der organischen Entwicklung, wenn nicht mit Hensen*) in den Anfang derselben zurückverlegen müssen. Von mehr als von der Ausbildung verschieden gearteter Zeugungsstoffe wird aber auf der frühesten Stufe nicht die Rede sein können. Hier liegt nun die Annahme nahe, dass die ersten Spaltungsfermente überhaupt in der Verbindung individuell verschiedener Protoplasmamassen ihre Quelle hatten. In der Copulation gewisser Algen und Protozoen scheinen uns heute noch Zeugungsvorgänge jener elementarsten Form bewahrt zu sein, wo die sexuelle einfach mit der individuellen Differenz zusammenfällt. Auf einer weiteren Stufe, welche durch die Fortpflanzungsverhältnisse der meisten Infusorien repräsentirt ist, bilden sich die getrennten Zeugungsfermente in dem Protoplasma eines und desselben Elementarorganismus als Ausscheidungsproducte, die in kernähnlichen Gebilden (Nucleus und Nucleolus der Infusorien) abgelagert werden, bis sie durch Selbstzersetzung oder durch Einwirkung von Zersetzungsproducten des Protoplasmas in den Zustand der so genannten Reife gelangen, der zugleich die physikalischen

*) Physiologie der Zeugung, Hermanns Handb. d. Physiol. VI, 2, S. 147.

Bedingungen zu ihrer Verbindung mit sich führt. Wie nun von diesen Anfängen aus sich die unendlich vielgestaltigen Formen der Fortpflanzungsvorgänge bei Pflanzen und Thieren entwickelt haben, lässt sich selbstverständlich nicht weiter verfolgen. Bei der Frage nach den Ursachen des Lebens kann es sich aber überhaupt nur darum handeln, dass man sich über die Entstehung der einfachsten Lebenserscheinungen Rechenschaft gebe. Der weiteren Differenzirung wird man nur auf Grund einer allmählichen Ermittelung der Entwicklungsbedingungen näher treten können. Dagegen dürfen wir dem entgegengesetzten Problem, obgleich es unserer positiven Erkenntniss mindestens ebenso unzugänglich ist, dem der Urzeugung oder der ersten Entstehung lebender Substanz, hier nicht aus dem Wege gehen. Denn der Gesichtspunkt, unter dem dasselbe betrachtet wird, ist für die Frage nach dem Wesen des Lebens von ebenso entscheidender Bedeutung wie die Interpretation der einfachsten Lebensvorgänge.

Die Schwierigkeiten dieses Problems hat man entweder dadurch zu beseitigen gesucht, dass man annahm, das Leben sei niemals entstanden, es sei ebenso ursprünglich wie die Materie selber, oder dass man sich die Urzeugung als einen Vorgang dachte, der den Formen einfachster Fortpflanzung analog sei. Die erste dieser Anschauungen hat in etwas verhüllter Form noch in neuerer Zeit in der Hypothese sich erhalten, organische Keime seien durch Meteore von einem auf den andern Weltkörper übertragen worden, und es habe sich also das organische Leben gewissermassen auf dem Wege der Ansteckung übertragen*). Dass diese Hypothese das Problem zurückschiebt, statt es zu lösen, liegt auf der Hand. Die lebensfähigen Substanzen sind chemische Verbindungen von bestimmten Affinitätseigenschaften. Mit dem nämlichen Rechte, mit dem man die Erforschung ihrer Entstehung durch eine solche Hypothese abwehrt, könnte ein Chemiker der Frage nach der Bildung der Kohlensäure mit der Antwort begegnen wollen, Kohlensäure sei immer in

*) Da der Erste, der diese Hypothese aufstellte, ein Arzt war, der sich mannigfach mit der Verbreitung der Infectionskrankheiten durch Pilzsporen beschäftigt hat, nämlich H. E. Richter (Schmidts Jahrbücher der Medicin, Bd. 126, S. 248), so wird man in der That nicht fehlgehen, wenn man die Idee der Ansteckung als die eigentliche Grundlage derselben betrachtet. Uebrigens sind auch W. Thomson und Helmholtz unabhängig von einander und von Richter auf die nämliche Idee gekommen. (Helmholtz, Wissensch. Vorträge, 3. Heft, S. 138 f.)

der Welt vorhanden gewesen. In einer hiervon wesentlich verschiedenen Form hat zu allen Zeiten der philosophische Hylozoismus die Ewigkeit des Lebens gelehrt. War es ihm zunächst auch mehr darum zu thun, das Leben für die ganze Natur zu retten, als es zu erklären, so galt doch das letztere oder vielmehr die Möglichkeit, eine solche Erklärung entbehren zu können, meist als ein erwünschter Nebenerfolg. Aber je mehr diese Anschauung es versuchte, mit sonstigen Erfahrungen im Einklang zu bleiben, um so mehr zeigte es sich, dass in ihr der Begriff des Lebens den Inhalt verloren hatte, den ihm die Physiologie gibt. So soll nach Fechner das Organische das frühere, das Unorganische das spätere, ein Ausscheidungsproduct der lebenden Materie sein, wobei dann diese in Folge solcher Ausscheidungen und Reinigungen immer mehr sich vervollkommne*). Hierdurch wird dann alles was die Physiologie lebende Materie nennt, das Protoplasma mit seinen Entwicklungsformen, zu einem secundären Erzeugniss. Das ursprüngliche Leben ist die einst in der glühenden Masse unseres Planeten enthaltene, der Trennung des organischen und unorganischen Stoffs vorausgehende Bewegung. Der so gebildete Begriff des Lebens ist aber ein vollkommen willkürlicher, für den die wesentlichsten Merkmale, die der empirische Begriff des Lebens darbietet, nicht zutreffen. Somit hätte auch diese Anschauung immer noch zu erklären, wie das Leben im physiologischen Sinne entstanden ist.

Von der zweiten der oben unterschiedenen Hypothesen sind bis dahin alle Versuche, eine Urzeugung auf experimentellem Wege zu Stande zu bringen, ausgegangen. Wie jedes organische Wachsthum mit der Zersetzung schon vorhandener organischer Substanzen verbunden ist, so hoffte man in sich zersetzenden, der Fäulniss unterworfenen Gemischen organischer Stoffe die günstigsten Bedingungen für eine Generatio aequivoca vorzufinden. Nähere Auskunft über die hierbei vermutheten morphologischen oder chemischen Vorgänge ist zwar von keinem der Anhänger einer Urzeugung aus Infusionen gegeben worden. Doch scheint es, dass man dabei die heftige moleculare Bewegung in einem faulenden Gährungsgemisch für besonders geeignet hielt, um die Synthese eines lebenden Protoplasmamolecüls zu bewirken. Ueberdies ist es ersichtlich, dass die einfachsten Fäulnissorganismen in faulenden Massen leicht sich ernähren und

*) G. Th. Fechner, Einige Ideen zur Schöpfungs- und Entwicklungsgeschichte der Organismen. Leipzig 1874. S. 41 ff.

fortpflanzen können; und man glaubte wohl annehmen zu dürfen, die für das Wachsthum eines organischen Wesens günstigsten Bedingungen seien auch für die Entstehung eines solchen die besten. Die experimentelle Widerlegung einer Urzeugung aus Infusionen hat den letzteren Gedanken als die schwache Seite des Beweisverfahrens herausgegriffen. Denn es lässt sich ihm offenbar mit grösserem Rechte die Vermuthung entgegenhalten, dass die Infusionsorganismen um so leichter in eine Flüssigkeit von aussen eindringen werden, je bessere Ernährungsbedingungen sie ihnen darbietet. Von dieser Erwägung ausgehend und unter gebührender Rücksichtnahme auf die ausserordentliche Lebenszähigkeit niederer Keime ist in der That der Beweis, dass auf dem angenommenen Wege eine Urzeugung nicht stattfindet, als geliefert zu betrachten, insoweit negative Resultate beweisend sein können. Auch findet dies Resultat darin eine Stütze, dass die hier vorausgesetzten Bedingungen nach unsern sonstigen Erfahrungen durchaus nicht solche sind, unter denen sich eine ursprüngliche Synthese organischer Verbindungen vollzieht. Wäre aber selbst die Infusionshypothese im Rechte, so würde damit dennoch für die Frage nach dem Ursprung des Lebens nicht viel gewonnen sein. Denn die Substanzen, die man zu den Infusionsgemischen verwendet, sind selbst schon Producte des Lebensprocesses. Wie bei der Theorie der Meteorinfection, so wird darum auch hier das Problem selbst nicht gelöst, sondern zurückgeschoben.

In Wahrheit sind es nun zwei Momente, die in einer unter sich übereinstimmenden, aber von den drei hier besprochenen Anschauungen abweichenden Weise die Richtung unserer Vermuthungen bestimmen müssen. Die Entstehung lebenden Protoplasmas aus unorganischen Materien vermögen wir in der jetzigen Natur nirgends nachzuweisen; und wir müssen doch die Thatsache einer solchen Entstehung voraussetzen, da in früheren Zuständen unseres Planeten eiweissartige Körper nicht existiren konnten. Es bleibt also allein die Annahme übrig, dass die Bedingungen zum Eintritt jenes Ereignisses nur während einer gewissen Uebergangsperiode existirten, nach der sie wieder verschwunden sind, ähnlich wie ja auch die Bedingungen für die Bildung gewisser Gesteinsarten, wie Flussspat, Feldspat, Quarz u. s. w., offenbar vorübergehender Art waren. Zweitens haben wir nach allem, was uns die künstliche Synthese organischer Verbindungen lehrt, allen Grund zu vermuthen, dass eine so verwickelt constituirte Verbindung wie das Protoplasma allmählich entstanden sei, wobei die noch jetzt in der Glühhitze bei

Gegenwart reducirender Metalle leicht aus unorganischen Verbindungen entstehenden einfachsten Kohlenstoffverbindungen, wie Acetylen, Ameisensäure, Cyan, vermuthlich die ersten Stufen gebildet haben werden*).

Gesetzt aber auch, die hier postulirten Causalbeziehungen seien zutreffend, und es gelänge sogar lebendes Protoplasma im chemischen Laboratorium hervorzubringen, so würde damit das Problem des Lebens immer erst nach seiner physischen Seite gelöst sein. Aus den Eigenschaften, die wir den chemischen Atomen beigelegt, würden wir die Gruppirungen der Stoffe und ihre Zersetzungen, vielleicht auch die damit verbundenen physikalischen Erscheinungen erklären können. Sobald aber diese Erscheinungen zugleich das Vorhandensein von Empfindungen oder von sonstigen psychischen Elementarvorgängen verrathen, sind diese als Thatsachen anzuerkennen, die in den für die physikalisch-chemische Erklärung gemachten Voraussetzungen nicht mit enthalten und darum auch unmöglich aus ihnen abzuleiten sind. Darin liegt schon für den physiologischen Standpunkt die Nöthigung, die einfachsten Formen des psychischen Geschehens nicht erst mit der Erzeugung der lebenden Substanz entstehen zu lassen, sondern mindestens die Anlage zu diesem Geschehen den ursprünglichsten Substanzelementen beizulegen. Dass Leben und Beseelung innig zusammenhängen, und dass beide nicht entstehen könnten, wenn nicht die Bedingungen zu ihnen in dem Substrat der Naturerscheinungen gegeben wären, dies ist der wahre Gedanke, der die hylozoistischen Ansichten leitet, den sie aber verfälschen, indem sie das potentielle in ein actuelles Leben umwandeln, und indem sie das Bild des Organismus, das den entwickelten Lebensformen entnommen ist, willkürlich auf zusammenhanglose Substanzcomplexe der leblosen Natur übertragen, in deren letzten Theilen vielleicht nur der Lebensfunke glimmt. Denn wenn der biologischen Beobachtung irgend ein Werth beizumessen ist, so kann dies eine Resultat als feststehend gelten, dass, so nothwendig es auch scheinen mag, schon in den Eigenschaften der anscheinend leblosen Körper die Bedingungen des Lebens anzunehmen, doch die zusammengesetzten Formen des Lebens erst die Erzeugnisse einer langen unter den

*) Auf die Unvermeidlichkeit dieser Annahmen habe ich schon in den früheren Auflagen meines Lehrbuchs der Physiologie hingewiesen. (Vgl. 3. Aufl., 1873, S. 169.) Auf die nämliche Anschauung ist dann auch Pflüger durch seine Betrachtungen über das Wesen der Lebensvorgänge geführt worden (a. a. O. Bd. 10, 1875, S. 339 f.).

verwickeltsten Causalbedingungen stattgefundenen Entwicklung sind. In diese Entwicklung greifen aber psychische Kräfte in so bestimmender Weise ein, sie sind insbesondere so sehr die für die Zweckmässigkeit der organischen Bildungen massgebenden Ursachen, dass die der Physiologie geläufige Anschauung über die Wechselbeziehung der körperlichen und geistigen Vorgänge ihre vollständige Umkehrung erfahren muss: nicht das geistige Leben ist ein Erzeugniss der physischen Organisation, sondern diese ist in allem, was sie an zweckvollen Einrichtungen der Selbstregulirung und der Energieverwerthung vor den Substanzcomplexen der unorganischen Natur voraus hat, eine geistige Schöpfung. So führt die Biologie bei ihren letzten Aufgaben unmittelbar hinüber zu den Grundproblemen der Psychologie*).

### d. Der Begriff der Krankheit.

In der Pathologie, dem verwickeltsten und schwierigsten Zweig der Biologie, hat jene mit mythologischen Vorstellungen zusammenhängende Form naturphilosophischer Betrachtung, die ursprünglich auf allen Gebieten der selbständigen Entwicklung der Naturwissenschaften voranging**), am dauerndsten nachgewirkt. Reichen doch die Anschauungen, zu denen auf dieser naturphilosophischen Grundlage die Heilkunde der Griechen gelangt war, in ihren letzten Ausläufern noch bis in unser Jahrhundert hinein. Der Gegensatz, der die Philosophie der jonischen Physiker entzweit, ob die Mannigfaltigkeit der Dinge von einem einzigen Princip oder von einer Mehrheit qualitativer Urstoffe, die dann wieder als Gegensätze zu denken seien, herkomme, — dieser im letzten Grund aus rein logischen Gesichtspunkten entsprungene Streit trennt auch die ärztlichen Schulen der Griechen. Für die Anhänger eines einzigen Urstoffs steht hier die Lehre des Anaximenes, der die Luft für diesen Stoff hält, in Folge der Bedeutung des Athmungsprocesses für alle Lebensvorgänge begreiflicher Weise im Vordergrund. Eine gründlichere Untersuchung der Krankheitserscheinungen dagegen musste bemüht sein, den mannigfachen Unterschieden derselben durch die Feststellung

*) Vgl. Abschn. IV, Cap. II, wo auch auf die Voraussetzungen einzugehen sein wird, die sich aus dieser Wirkung psychischer Kräfte auf materielle Vorgänge einerseits und aus dem oben S. 332 entwickelten Postulat der in sich geschlossenen Naturcausalität anderseits ergeben.

**) Vgl. oben S. 261.

der Veränderungen im einzelnen, namentlich der symptomatisch wichtigen Veränderungen des Blutes und der flüssigen Secrete, besser gerecht zu werden. So entstand, jener Richtung der „Pneumatiker“ gegenüber, die von dem grössten der griechischen Aerzte, von Hippokrates, vertretene „Humoralpathologie“ *). Indem diese die Krankheiten, wie überhaupt die wichtigsten organischen Vorgänge, auf die wechselnde Mischung der vier Cardinalsäfte Blut, Schleim, gelbe und schwarze Galle zurückführt, erinnert sie zweifellos nicht bloss durch die Vierzahl an die Empedokleischen Elemente, sondern sie ist eine Uebertragung derselben auf den Organismus, wie solches später namentlich von Galen nachdrücklich betont wurde, und sie beruht demnach gleich jenen auf dem Princip des logischen Gegensatzes. Nachdem im Mittelalter die Hippokratische Auffassung in der ihr durch das Galenische System gegebenen dogmatischen Gestaltung die Pathologie durchaus beherrscht hatte, regte sich erst vom Beginn der Neuzeit an wieder das Streben, auch auf diesem Gebiete zu einer selbständigen Beobachtung der Erscheinungen zurückzukehren, wie sie dereinst Hippokrates gelehrt; zugleich aber begann nun, von den exacten Wissenschaften und der in ihr wurzelnden mechanischen Weltanschauung ausgehend, die Tendenz nach einer mechanischen Erklärung herrschend zu werden. Diese iatromechanische Richtung kehrte zu den Anschauungen der alten Pneumatiker zurück, indem sie bemüht war, aus einer in den Nerven angenommenen feinen und leichtbeweglichen Materie, den „Nerven-“ oder „Lebensgeistern“ die wichtigsten Functionen des gesunden wie des kranken Organismus zu erklären. So erneuerten sich in dem Kampfe der Humoral- und der Solidarpathologie, die der Gegenüberstellung des soliden Nervensystems und der flüssigen Säfte des Körpers ihre Namen verdankten, die uralten naturphilosophischen Gegensätze. Zugleich begannen aber theils innerhalb dieser Gegensätze theils unabhängig von ihnen mannigfache Einflüsse von andern naturwissenschaftlichen Gebieten auf die Biologie und durch diese auf die Auffassung der Krankheitserscheinungen einzuwirken. Auf diese Weise ist die Pathologie bis in die neueste Zeit von animistischen und vitalistischen, mechanischen und chemischen Hypothesen mit wechselndem Glück beherrscht worden. Vielfach haben aber auch die allgemeinen biologischen Anschauungen in der Pathologie

---

*) H. Diels, Ueber die Excerpte von Menons Jatrike in dem Londoner Papyrus 137. Hermes, Bd. 28, S. 407. Im Auszug in den Preuss. Jahrbb. Bd. 44, S. 412.

ihre Hauptstütze gefunden. Vor allem gilt dies von denjenigen Lehren, die im Beginn der Neuzeit als eigenthümliche Neugestaltungen uralter Anschauungen den überkommenen Systemen entgegentraten. So schöpften ein Paracelsus und van Helmont ihre animistisch-chemischen Ideen zumeist aus der Beobachtung der Krankheitserscheinungen. Für den Vitalismus konnte es keine augenfälligere Bestätigung geben als der anscheinend so deutlich auf einen Kampf der Lebenskraft mit äusseren oder inneren Schädlichkeiten hinweisende Verlauf der Krankheiten. Selbst die mechanische Auffassung des Lebens gewann aber aus der pathologischen Beobachtung fruchtbare Anregungen. Ergab sich doch der für diese Lehre so wichtige Begriff der Selbstregulirung am leichtesten aus denjenigen im Gefolge der Krankheit auftretenden Reactionen, die entweder auf eine Beseitigung der Störung oder auf die Herstellung eines neuen, die Störung compensirenden Gleichgewichtszustandes gerichtet sind.

Der Kampf aller dieser Anschauungen dreht sich auf dem Gebiete der Pathologie hauptsächlich um einen Punkt: um die Frage nach der Krankheitsursache. Dass in den meisten Fällen die Krankheit durch äussere Einwirkungen verursacht werde, konnte von frühe an der Beobachtung nicht verborgen bleiben. Als die eigentliche Bedingung der Störung betrachtete man dabei aber doch die Veränderung, die in den Säften oder Geweben des Organismus entstehe, und die nun weitere Störungen und Ausgleichserscheinungen nach sich ziehe. Diese Ansicht passte ebenso gut in die mechanistische wie in die vitalistische Lehre. Ihr gegenüber führte Paracelsus eine in dem Volksaberglauben längst verbreitete Vorstellung in die wissenschaftliche Medicin ein: die Vorstellung, dass die Krankheit selber ein Wesen sei, in dessen Bekämpfung theils das natürliche Heilungsbestreben des Organismus bestehe, theils das künstliche Heilverfahren des Arztes bestehen müsse. So treten von nun an eine ontologische und eine functionelle Auffassung einander gegenüber. Schon Paracelsus hat seine Lehre von den krankmachenden Wesen, von der Keimung und Entwicklung derselben besonders auf die Beobachtung der contagiösen Krankheiten gestützt, deren Entstehung und typischer Verlauf auch in späterer Zeit immer wieder solche Ideen nahe legte*). Trotzdem ist lange die functionelle

*) Vgl. Kurt Sprengel, Geschichte der Arzneikunde, 3. Aufl., III, S. 449 ff.

Auffassung fast die allein herrschende geblieben, und wenn man auch nicht umhin konnte, bei den Contagien und Miasmen den Einfluss äusserer krankmachender Stoffe zuzugeben, so war man doch mehr geneigt in ihnen die Wirkungen unbekannter chemischer Substanzen als die organisirter Elemente zu sehen. Das Hauptaugenmerk blieb dabei immer auf die functionellen Veränderungen des erkrankten Organismus gerichtet, und je nachdem man hier den Ernährungsflüssigkeiten oder dem Nervensystem den entscheidenden Werth beilegte, siegte wieder die humoral- oder die solidarpathologische Auffassung, Richtungen, die in ihrer Einseitigkeit an die wechselnde Herrschaft des Vulkanismus und Neptunismus in der Geologie oder der Gravitations- und der elektrischen Spannungstheorie in der Chemie erinnern. In der That, wie diese chemischen Theorien aus einer Uebertragung von Begriffen entstanden, die anderen Wissensgebieten entnommen waren, so hatte sich auch im Wechsel der Zeiten die humoralpathologische Lehre mehr und mehr der chemischen, die solidarpathologische der mechanischen Richtung in der Physiologie angepasst. Denn das Blut, das allmählich die übrigen Cardinalsäfte in den Hintergrund drängte, galt als der Hauptsitz der chemischen Lebensvorgänge; die Bewegung des in den Nerven eingeschlossenen hypothetischen Fluidums, der „Nervengeister“, war namentlich seit Descartes ein Lieblingsgegenstand iatromechanischer Speculationen geworden. Daneben spiegelt sich übrigens in den epochemachenden Systemen des 17. und 18. Jahrhunderts deutlich der besondere Einfluss der Zeit: so in der von Sydenham auf humoralpathologischer Grundlage unternommenen Wiedererneuerung der Hippokratischen Beobachtungsmethode der Geist der Baconischen Induction, in seinem Begriff der Krankheitsspecies das beginnende Zeitalter der systematischen Naturgeschichte; so in Browns solidarpathologischem „Irritabilitätssystem“ die Bedeutung, die der Begriff der Reizbarkeit in der Physiologie insbesondere durch Hallers Irritabilitätslehre gewonnen hatte.

Gegenüber solchen von aussen in die Pathologie hineingetragenen Vorstellungen konnte die Aufgabe einer selbständigen Erforschung der im Organismus gelegenen Krankheitsursachen und Krankheitswirkungen erst von dem Augenblick an in den Gesichtskreis einer strengeren Methodik treten, als durch die systematische Zergliederung der erkrankten Organe an die Stelle der bisherigen äusseren allmählich eine innere Symptomatologie der Krankheiten

trat. Für die Auffassung des Wesens der Krankheit gewann aber die pathologische Anatomie einen entscheidenden Einfluss, namentlich seit die mikroskopische Untersuchung eine tiefere Einsicht in die elementare Beschaffenheit der krankhaften Veränderungen gewährte. Ihren Ausdruck fand die so entstandene neue Richtung in Virchows Cellularpathologie. Im Gegensatz zu jenen älteren humoral- und solidarpathologischen Lehren, die zumeist nur von der Beurtheilung allgemeiner Krankheitsbilder ausgegangen waren, suchte die Cellularpathologie die Elementartheile der Gewebe, insbesondere die letzten Lebenseinheiten, die Zellen, überall als die Träger der Krankheit darzuthun, während sie zugleich an dem im Grunde bereits von Sydenham aufgestellten Postulat festhielt, dass es specifische Unterschiede der elementaren Lebensvorgänge im normalen und im krankhaft veränderten Zustande nicht geben könne, und dass daher der letztere lediglich ein unter störenden Bedingungen, im übrigen aber nach allgemeingültigen physiologischen Gesetzen ablaufender Process sei*). Der so gewonnene Standpunkt ging demnach darauf aus, die Pathologie in eine „pathologische Physiologie“ umzuwandeln, die in ähnlicher Weise der mikroskopisch-anatomischen Untersuchung des krankhaft gestörten Körpers bedürfe, wie die normale Physiologie die normale Anatomie zu ihrer Grundlage habe. In dieser Forderung lag jedoch bereits die Tendenz zu einer Ergänzung und Erweiterung der cellularpathologischen Auffassung. Denn eine pathologische Physiologie musste sich nothwendig die Aufgabe stellen, mit der mikroskopischen Untersuchung das Experiment zu verbinden, und die Lösung dieser Aufgabe führte nun weiterhin zu Ergebnissen, die an verschiedenen Stellen die cellularpathologischen Anschauungen verdrängten. Hierdurch wurde aber die bereits von der Cellularpathologie angebahnte Ueberzeugung befestigt, dass es überhaupt unmöglich sei den Begriff der Krankheit einem einzigen allumfassenden Allgemeinbegriff unterzuordnen, sondern dass, entsprechend der grossen Mannigfaltigkeit der Lebensbedingungen, mannigfach verschiedene und oft in einander eingreifende Formen der Störung und ihrer Ausgleichung anzunehmen seien. Eine entscheidende Rolle spielte hierbei namentlich das Studium der Infectionskrankheiten, indem es auf diesem wichtigen Gebiete zu einer partiellen Wiederherstellung des ontologischen an Stelle des rein functionellen Begriffs der Krankheit führte.

---

*) R. Virchow, Cellularpathologie. 4. Aufl., Berlin 1871.

Der nächste, an sich freilich unzureichende Grund zu dieser Umwälzung der Anschauungen bestand in der Beobachtung der Lebenscyklen niederer Organismen. Hatte bereits van Helmont die Krankheit als eine „Fermentation" bezeichnet, so wurde in der neueren Zeit die genauere Kenntniss der bei den Gährungen organisirter Stoffe wirksamen Spaltpilze und ihrer weiten Verbreitung die Hauptquelle ähnlicher Hypothesen*). Zu dieser inneren kam bald noch eine äussere Analogie, die Aehnlichkeit mit den durch grössere parasitische Wesen hervorgerufenen Erkrankungen. Schoenlein, der Entdecker des Favuspilzes, hatte schon mit den Borken desselben die Darmabschorfungen im Typhus verglichen. Noch mehr erinnerte später die Trichinosis durch ihren typischen Verlauf an die Entwicklung contagiöser Erkrankungen. Ohne durch solche Analogien vorbereitet zu sein, würde man schwerlich den entscheidenden Schritt gethan haben, der in der directen mikroskopischen Nachweisung der Infectionsbakterien, ihrer künstlichen Züchtung und Uebertragung bestand. War auf diese Weise nachgewiesen, dass die an gewissen Orten haftende oder von erkrankten Individuen ausgehende Ansteckung sowie der typische Verlauf bestimmter Krankheiten auf der Uebertragung und Entwicklung bestimmter Bakterien oder anderer Mikroorganismen (namentlich Protozoen) beruhe, so knüpfte sich aber hieran sofort eine abermalige, jetzt berechtigtere Analogie: es konnte angenommen werden, dass auch in andern Fällen, wo der directe Nachweis noch nicht gelungen war, Infectionsfähigkeit und typischer Verlauf für das Vorhandensein krankmachender Organismen beweisend seien. Von diesen beiden Merkmalen musste die Infectionsfähigkeit wieder als das werthvollere erscheinen, weil hier die Uebertragung eines Krankheitsstoffes ausser Frage stand, andere Krankheitsstoffe als organisirte aber, abgesehen von den im allgemeinen leicht zu unterscheidenden eigentlichen Giftwirkungen, nicht bekannt sind. Der typische Verlauf für sich dagegen konnte ebenso gut bloss in den Lebenseigenschaften des erkrankten Organismus seinen Grund haben; und anderseits konnte man aus dem Mangel eines solchen Verlaufs noch nicht ohne weiteres auf das Fehlen einer Infection schliessen, da jener ausserdem eine regelmässige Entwicklung der Infectionsorganismen voraussetzt. Wie diese, so hat sich noch eine andere Analogie nicht als überall zu-

*) J. Henle, Handbuch der rationellen Pathologie. II, 2. S. 424 ff. Braunschweig 1853.

treffend erwiesen. Bei vielen Infectionskrankheiten von ausgeprägt typischem Verlauf, z. B. bei den acuten Exanthemen, verleiht die einmalige Erkrankung, auch wenn sie, wie bei der Schutzpockenimpfung, in einer milderen Form verläuft, eine gewisse Immunität gegen künftige Infectionen. Diesen stehen aber andere Fälle gegenüber, wo im Gegentheil die Erkrankung zu künftigen Infectionen geneigter zu machen scheint: so die Tuberculose, die Lungenentzündung, der Rheumatismus. Für diese beiden einander entgegengesetzten Fälle bieten sich jedoch abermals Analogien in den verschiedenartigen Vegetationsbedingungen der Pflanzen, unter denen es manche gibt, die rasch den Boden erschöpfen, so dass eine zweite Cultur erst nach längerer Zeit gelingt, indess andere solchen Beschränkungen nicht unterworfen sind.

Es konnte kaum ausbleiben, dass die überraschenden Entdeckungen der Bakteriologie zunächst zu einer Ueberschätzung der Bedeutung dieser mikroskopisch nachweisbaren Krankheitserreger führten, die in der Verschiedenheit ihrer Formen und Entwicklungsbedingungen in vielen Fällen wenigstens der typischen Verschiedenheit bestimmter Infectionskrankheiten parallel gehen. Doch bald musste sich eine kritische Reaction fühlbar machen, da man sich der Einsicht nicht verschliessen konnte, dass der krankheitserregende Pilz immer nur als ein Factor unter mehreren betrachtet werden kann, die neben ihm die Entstehung und den Verlauf der Infection bestimmen. Ein zweiter Factor liegt zweifellos in jenen noch völlig räthselhaften Bedingungen, die wir die individuelle Disposition nennen, ein dritter in den theils noch unbekannten theils wenigstens in ihrer Wirkungsweise unverstandenen localen Einflüssen. Aber noch in einer anderen Beziehung scheint eine Reaction nicht auszubleiben. Mit der Nachweisung der mikroskopischen Beschaffenheit, der äusseren Lebensformen und Lebensbedingungen bestimmter Infectionsorganismen besitzen wir noch nicht im geringsten ein causales Verständniss der Wirkungen, die sie ausüben. Wir können nur vermuthen, dass diese Wirkungen auf Stoffwechselproducten der Spaltpilze oder sonstiger Krankheitserreger beruhen, die in den Geweben oder Stoffwechselvorgängen des inficirten Organismus bestimmte chemische Reactionen hervorrufen. Die Kenntniss dieser chemischen Vorgänge würde aber zweifellos auch hier der functionellen Auffassung des Krankheitsprocesses wieder gewisse Rechte einräumen. Würden doch nicht eigentlich die Infectionsorganismen selbst, sondern eben diese Rückwirkungen auf die Functionen des

erkrankten Organismus als die unmittelbaren Krankheitsursachen anzusehen sein.

Immerhin fügten sich selbst mit diesem Vorbehalt die Infectionskrankheiten, deren Gebiet zugleich weit über die früheren Grenzen erweitert wurde, nicht mehr dem functionellen Krankheitsbegriff der älteren Schulen. Ebenso erfuhr nun aber auch in solchen Fällen, wo die primäre Krankheitsursache fortan in dem erkrankten Organismus selbst gesucht werden musste, die functionelle und insbesondere die cellularpathologische Auffassung wesentliche Berichtigungen. Unter dem gleichzeitigen Einfluss experimenteller und mikroskopischer Beobachtungen sah sich die Pathologie veranlasst, theils den durch das Blut theils den durch das Nervensystem vermittelten Wechselwirkungen der Organe wieder in erhöhtem Masse ihr Augenmerk zuzuwenden. Eine wichtige Stellung nimmt hier für die sich auf das Blut und die Ernährungssäfte beziehenden Wechselwirkungen die Entzündungslehre ein. Die Cellularpathologie hatte in der durch den Entzündungsreiz erzeugten Wucherung der Gewebszellen das Wesen des Entzündungsprocesses gesehen. Dieser der Untersuchung der erkrankten Gewebe entnommenen Anschauung traten in der neu entdeckten Wanderung der farblosen Blutzellen durch die Wände der Capillargefässe und in der Zunahme dieses Wanderungsprocesses in Folge der Entzündungsstauung Thatsachen gegenüber, die eine wesentlich andere Auffassung herausforderten. So sah denn Cohnheims Theorie der Entzündung in jener Wanderung und der sie begleitenden Vermehrung der im Blute enthaltenen Leukocyten die eigentliche Entzündungsursache. Als die Ursprungsstätten des entzündlichen Exsudates erschienen ihm aber in Folge dessen nicht mehr die entzündeten Organe selbst, sondern die allgemeinen Organe der Leukocytenbildung: die Milz, die Lymphdrüsen, das Knochenmark*). Die fortschreitende Beobachtung hat dann freilich zwar nicht die Beobachtungsgrundlagen dieser Theorie erschüttert, aber doch die Erscheinungen in dem erkrankten Gewebe selbst nicht vollständig aus ihr abzuleiten vermocht. So ist allmählich eine vermittelnde Auffassung zur Vorherrschaft gelangt, die neben jenen Wanderungserscheinungen eine Umwandlung der Eigenschaften des entzündeten Gewebes statuirt, die als eine Art Rückkehr der Zellen und wahrscheinlich auch der aus den Zellen

*) Jul. Cohnheim, Virchows Archiv f. pathol. Anatomie und Physiologie, Bd. 40, 1867.

hervorgegangenen und mit ihnen fortan in lebendiger Wechselwirkung stehenden Intercellularsubstanz auf eine embryonale Stufe der Entwicklungsfähigkeit gedeutet werden kann*).

Wie in diesem so gewannen noch in einem andern Fall entwicklungsgeschichtliche Gesichtspunkte auf die Theorie der Erkrankung einen massgebenden Einfluss. Jene krankhaften Geschwülste, bei denen die pathologische Beobachtung längst eine vererbte Disposition erkannt hatte, die Carcinome und die ihnen verwandten pathologischen Neubildungen, lehrte die mikroskopische Untersuchung als Gewebsformen kennen, die den embryonalen Bildungen verwandt seien. Nahm man nun als Ursache des oft enormen Wachsthums dieser Neubildungen eine embryonale Spaltungsfähigkeit der Zellen an, so lag es nahe, die Anlage zu diesen Erkrankungen in wirklich persistirenden Embryonalzellen zu sehen, die in irgend einer späteren Periode des Lebens, namentlich etwa unter dem Einfluss verminderter Resistenz der umgebenden Gewebe, zur Entwicklung gelangten. Eine Bestätigung dieser Hypothese glaubte Cohnheim darin zu finden, dass die Geschwülste in dem allgemeinen Typus ihrer Gewebsform meist dem umgebenden Gewebe homolog sind, und dass sie vorzugsweise an solchen Orten des Körpers auftreten, an denen wegen bestimmter Complicationen der Entwicklung am ehesten eine überschüssige Ablagerung von Embryonalzellen begreiflich erscheine**). Auch diese Theorie ging also von Analogien, aber nicht wie die Infectionstheorie zunächst von functionellen, sondern von morphologischen Analogien aus, theils von der allgemeinen mit dem embryonalen Gewebe, theils von der besonderen mit der Structur der Nachbarorgane. Ein Nachtheil aber war es, dass hier der Natur der Sache nach eine directe Bestätigung unmöglich blieb; daher es denn auch in diesem Fall an widerstreitenden Ansichten unter ihnen, namentlich an der Vermuthung einer Erregung durch noch unbekannte Infectionsorganismen nicht fehlte. Im ganzen scheint sich hier eine Auffassung Bahn zu brechen, die für die verschiedenen Formen eine abweichende causale Interpretation verlangt, indem sie die Carcinome und die ihnen verwandten Neubildungen als theilweise parasitäre, vielleicht durch ein Zusammen-

*) Vgl. den Bericht über die hauptsächlichsten hierher gehörigen Arbeiten bei Julius Weiss, Beiträge zur Entzündungslehre. Eine historische Studie. Leipzig u. Wien 1893.

**) J. Cohnheim, Vorlesungen über allgemeine Pathologie, 2. Aufl., I, S. 744.

wachsen eingedrungener Protozoen mit ursprünglichen, namentlich epithelialen Gewebszellen veranlasste Formen betrachtet, während für jene unschuldigeren Geschwulstformen, bei denen lediglich eine Wucherung schon vorhandener Gewebe stattfindet, die Theorie Cohnheims ihre Geltung besonders in den Fällen bewahren dürfte, wo die Elemente der Neubildungen einen ausgesprochen embryonalen Charakter besitzen*).

Vergegenwärtigen wir uns nochmals die hauptsächlichsten logischen Hülfsmittel, die bei der Ausbildung der pathologischen Anschauungen wirksam waren, so fällt, der Physiologie gegenüber, vor allem die grosse Rolle der Analogie in die Augen. Dieser überwiegende Gebrauch des im naturwissenschaftlichen Erfahrungsgebiet unvollkommensten logischen Verfahrens beruht theils auf der Schwierigkeit der Probleme, theils auf der verspäteten Einführung der experimentellen Beobachtung am Thiere. Immerhin macht sich in dem Analogieverfahren selbst ein deutlicher Fortschritt von der Aufstellung vieldeutiger Aehnlichkeiten zur allmählichen Erkenntniss bestimmterer Beziehungen geltend, und diese nehmen zugleich eine Form an, in der sie sich zu concreten Fragen gestalten, die Beobachtung und Experiment herausfordern. Auf diese Weise schliesst das Verfahren ab mit der Verification und Vervollständigung der ursprünglich nur durch Analogien gestützten Hypothesen. Obgleich in keinem Gebiet der Pathologie dieser Weg ganz vollendet ist, so bietet doch namentlich die Infectionslehre schon jetzt einzelne Beispiele dar, in denen die Methode wenigstens in Bezug auf einen der ursächlichen Factoren, den äusseren Krankheitserreger, wohl ihren Abschluss gefunden hat, während freilich gerade hier andere Factoren, namentlich die locale und die individuelle Disposition, noch dringend der Untersuchung bedürfen.

Die Auffassung vom Wesen der Krankheit hat sich nun in Folge der wachsenden Berücksichtigung aller dieser ursächlichen Factoren dergestalt erweitert, dass nur noch der allgemeine Begriff der Störung und ihrer Ausgleichung für sie übrig geblieben ist. Liegt die Ursache eines von der Norm abweichenden Verlaufs der Lebensvorgänge stets in irgend einer äusseren oder inneren Störung, die diese Vorgänge erfahren, so setzt sich dann weiterhin der Krankheitsverlauf selbst aus der Summe aller der Reactionen zusammen, die in Folge der Störung vermöge der natürlichen Lebens-

*) E. Klebs, Allgem. Pathologie, II (1889), S. 776 ff.

eigenschaften der Gewebe, Organe und ihrer Elemente entstehen. Diese Reactionen bestehen zumeist in Selbstregulirungen, die den bereits überall während des normalen Lebens stattfindenden analog, dabei aber der durch die Störung gesetzten Veränderung angepasst sind. Ein grosser Theil dieser pathologischen Selbstregulirungen ist demgemäss auf die allmähliche Ueberwindung und Beseitigung der störenden Agentien, ein anderer auf die dauernde Anpassung des Organismus an die letzteren gerichtet. Je nach dem Verhältniss der Selbstregulirungen zu einander und zu den Störungsursachen kann dann entweder der gestörte wieder in den normalen Lebensvorgang einmünden, oder, sei es auf die Dauer sei es für eine gewisse Zeit, einen zwar von der Norm abweichenden, aber mit dem allgemeinen Fortbestehen des Lebens verträglichen Gleichgewichtszustand erreichen. Endlich können aber auch die Selbstregulirungen ihrerseits Functionsstörungen herbeiführen, durch die sie die Bedeutung secundärer Krankheitsursachen annehmen, welche sich mit den von der primären Störung erzeugten verbinden oder, falls dieselben beseitigt sein sollten, einen neuen selbständigen Krankheitsverlauf erzeugen. Bilden nach allem dem die pathologischen Processe nicht ein eigenes Gebiet von Erscheinungen, sondern lediglich die Summe derjenigen physiologischen Vorgänge, die durch irgend welche störende Einwirkungen theils direct theils indirect hervorgerufen werden, so mussten mit der Erkenntniss dieses Verhältnisses nothwendig auch mehr und mehr die Methoden der pathologischen Untersuchung mit denen der physiologischen identisch werden oder in Modificationen derselben übergehen, wie sie sich aus den abweichenden Lebensbedingungen ergeben.

BIBLIOTHECA REGIA MONACENSIS

**Druckfehler.**

Seite 161, Zeile 7 von unten statt könnten lies: können.
„ 434 Anm. *) statt Koenig lies Krönig.

Verlag von FERDINAND ENKE in Stuttgart.

# Kulturgeschichte der Menschheit

## in ihrem organischen Aufbau.

Von

**JULIUS LIPPERT.**

Zwei Bände.

gr. 8. geh. 1886 u. 1887. Preis M. 20.—, eleg. geb. M. 25.—

Inhalt:

Einleitung. — Die Lebensfürsorge als Prinzip der Kulturgeschichte. — Die Urzeit. — Ausblick auf die Verbreitung der Menschheit. — Die ersten Fortschrittsversuche der Lebensfürsorge. — Die Zähmung des Feuers. — Die Fortschritte des Werkzeugs als Waffe. — Ausblick auf die Entwickelung differenzierter Geräte. — Fortschritte der Speisebereitung. — Fortschritte des Schmuckes und der Kleidung und ihr sozialer Einfluss. — Der beginnende Anbau und die Verbreitung der jüngeren Völker in Europa. — Das Nomadentum und die Verbreitung der Zugtiere. — Die Nahrungspflanzen im Gefolge der Kultur. — Die Genussmittel engeren Sinnes und ihre kulturgeschichtliche Bedeutung.

---

Lipperts leitender Grundgedanke ist, die Lebensfürsorge als das treibende Agens in der Entwickelung der menschlichen Kultur anzusehen; er geht von dem Grundsatz aus: unsre Bedürfnisse sind unsre treibenden Kräfte, und von diesem Ausgangspunkte aus deduziert er in streng logischer, von echt philosophischem Geiste getragener Weise den ganzen Aufbau unsrer Kultur. In der geistvoll klaren Einleitung zeichnet er uns den Urmenschen, so wie er sich uns noch im Wilden der heutigen Welt darstellt, als ein Wesen, welches beinahe ohne Phantasie und Gedächtnis auch den erschütterndsten Naturerscheinungen seiner Umgebung im ganzen fast gleichgültig gegenüberstand und die höchsten Glieder der Tierwelt nur um weniges überragte. Die an den Urmenschen herantretenden Anforderungen der Lebensfürsorge weckten in dem Menschen Thätigkeiten, welche zunächst als unbewusst vorhandene „Reflexbewegungen" sich geltend machten, sich von Geschlecht zu Geschlecht fortpflanzten, sich mit der Zeit anhäuften und so den „vererbten Instinkt" bildeten. Die Lebensfürsorge oder der Darwinische Kampf ums Dasein führte zur Erweckung, Entwickelung und allmählichen Vervollkommnung der Geisteskräfte des Menschen, welche uns so hoch über alle andern Glieder der organischen Schöpfung erheben. Aus der Sorge für das Notwendigste entstand die Sorge für das Nützliche, dann für das Angenehme; aus Eitelkeit und wirklichem Bedürfnis entstand die Sorge für Kleidung, Nahrung und Obdach, aus der Not das sittliche und das Pflichtgefühl, die Schamhaftigkeit, die Rechtsbegriffe, die Idee der Religion, die Fürsorge für die Zukunft, der Mensch wurde erfinderisch und haushälterisch und er lernte sich den Anforderungen anbequemen, welche das einfache physische Dasein an ihn, den Wehrlosen und Schwächeren, machte. So entstanden in ihm Erinnerungsvermögen oder Gedächtnis, Ideen, Vorstellungen, Gewohnheiten, Begriffe, Sprache u. s. w. Dies ist der Entwickelungsgang der Kultur, wie ihn Lippert mit logischer Schärfe und in echt philosophischem Geiste schildert, und zwar in so streng logischem Gedankengang, in solcher Klarheit und Fasslichkeit, dass jeder Denkende und Strebsame auch ohne philosophische Vorbildung seinen Ideen und Darlegungen mit höchstem Interesse zu folgen vermag. Lipperts Buch ist ein Werk ersten Ranges, von höchstem Interesse und grösster Lehrhaftigkeit für jeden Gebildeten.

(Ausland 1886. Nr. 24.)

---

# Ludwig Feuerbach.

Von

Dr. C. N. Starcke.

gr. 8. 1885. geh. M. 9.—

Verlag von FERDINAND ENKE in Stuttgart.

# System der Nationalökonomie.

Von **Gustav Cohn,**

ord. Professor der Staatswissenschaften an der Universität Göttingen.

I. Band: **Grundlegung.**

gr. 8. 1885. geh. M. 12. —

II. Band: **Finanzwissenschaft.**

gr. 8. 1889. geh. M. 16. —

Deshalb und nach seinen formellen und materiellen Vorzügen eignet sich Cohns Werk in besonderem Grade für die Elite der höher gebildeten Klassen. Staatsmännern, höhern Beamten, Parlamentariern und den doch gottlob noch nicht ausgestorbenen Gelehrten und Ungelehrten, welche nach universeller Lebensbildung im Sinne des Goetheschen Ideals streben, kann Cohns Buch gar nicht genug empfohlen werden.

(Aus Prof. Dr. Adolf Wagners Besprechung des Werkes in den Jahrbüchern für Nationalökonomie und Statistik. N. F. Bd. XII.)

Das Buch ist geistvoll und mit einer sprachlichen Durchsichtigkeit geschrieben, die es in hohem Grade zu einem Lesebuch für alle Gebildeten geeignet macht. Es ist nicht ein trockenes und langweiliges Aneinanderreihen von Lehrsätzen, sondern eine anregende, gefällige, lebendige und elegante Schilderung, die uns fesselt und packt.

(Aus Prof. Dr. Meilis Besprechung des Werkes in der Zeitschrift für Handelsrecht. Bd. XXXII.)

Wenn wir den Wert des ganzen Buches für unsre Wissenschaft kurz formulieren sollen, so beruht er darauf, dass es energischer als irgend ein andres systematisches Werk, das bisher erschienen, die ganze Wissenschaft wieder auf ihre wahren Quellen zurückführt, auf die psychologischen, sittlichen und historischen Probleme; dass es jener Versteinerung und Verlederung der Wissenschaft, die durch eine scheuklappenartige Abschliessung auf die angeblich rein volkswirtschaftlichen Fragen drohte, eine Vergeistigung und Ethisierung entgegensetzt, wie sie auch von seinen Vorgängern angestrebt, aber in dieser Weise bisher nicht erreicht wurde. Ein Teil der weiter notwendigen Ausbildung und Umwandlung, welcher die Nationalökonomie — nach unsrer subjektiven Ueberzeugung — noch entgegengeht, ist von Cohn noch nicht vollzogen. Ein erheblicher Teil dessen, was er an den ältern Doktrinen korrigiert, ist Miteigentum vieler Gesinnungsgenossen des Verfassers. Aber wir können nur wiederholen, es ist das nirgends noch in solchem Zusammenhang, in so schöner Sprache, mit so taktvollem Masse und dabei auch da, wo der Verfasser sich mit andern berührt, doch in so eigenartiger, individueller Weise gesagt worden. Und deshalb wird das Buch nicht eines der zahllosen, rasch wieder den Fluten der Vergessenheit anheimfallenden Lehrbücher sein, sondern es wird einen dauernden Markstein in der Entwickelung unsrer Wissenschaft bilden.

(Schmollers Jahrbuch für Gesetzgebung, Verwaltung u. Volkswirtschaft. X. 3.)

Aehnlich wie Leopold von Rankes Weltgeschichte zum ersten Male eine wirkliche Weltgeschichte ist, in der der Meister, in voller Beherrschung allen Materiales, sich loslösend aus allem verwirrenden Detail, in gewaltigen Zügen zu uns von dem Werden dessen, was wir unsre Geschichte nennen, spricht, so hat es auch Gustav Cohn verstanden, mit einem Blick die ganze Welt erfassend, uns mit meisterhaften Strichen den Stand der wissenschaftlichen Erkenntnis über die letzten Gründe zu zeichnen, welche die wissenschaftlichen, d. i. die eigentlichen Grundlagen unsrer Gegenwart so gestalten, wie wir sie vor uns sehen. (Deutsche Rundschau, 1886, S. 318.)

Druck der Union Deutsche Verlagsgesellschaft in Stuttgart.

Messerer.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Wundt, Wilhelm,

Logik eine Untersuchung der Principien der Erkenntnisse und der Methoden wissenschaftlicher Forschung

Bd.: 2,1

1894

Ph.sp. 956 c-2,1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11171397-4